1. Z definicji pochodnej oblicz pochodną podanej funkcji w punkcie x_0.

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ w $x_0 = 1$, (b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ w $x_0 \in (0, \infty)$,

2. Zbadać różniczkowalność funkcji.

   (a) $f(x) = |\ln x|$ w $x_0 = 1$, (b) $f(x) = |x-3|$ w $x_0 = 3$,
   (c) $f(x) = |x|^3$ w $x_0 = 0$, (d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ w $x_0 = 0$,

3. Obliczyć pochodne podanych funkcji

   (a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x},\ x > 0$, (b) $f(x) = \frac{e^x + \sin(x)}{e^x + 4}$,
   (c) $f(x) = \ln(x)(x^4 + \frac{3}{x^2})$, (d) $f(x) = \sin(x^2)$ (e) $\sqrt[3]{\sin x^3}$,
   (f) $f(x) = \frac{1}{\cos(\sin x)}$, (g) $f(x) = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$, (h) $f(x) = \ln(x)^x\ x^x$.

4. Podać wzór na pochodną funkcji odwrotnej.

   (a) $f(x) = \arccos x$, (b) $f(x) = x + e^x$ w $y_0 = 1$,

5. Dobrać parametry a, b tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2. \end{cases}$$

   była różniczkowalna na R.

6. Znaleźć kąty, pod którymi przecinają się krzywe

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$. (b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$,

7. Znaleźć wzór na styczną do wykresu funkcji $e^{\sqrt[3]{x}}$ w punkcie $x_0 = 1$.

8. Znaleźć punkty, w których styczna do krzywej $y = 5x^2 - 8x$ jest

   (a) równoległa do osi odciętych, (b) tworzy z osią odciętych kót $\frac{\pi}{6}$.

9. Sprawdź następujące tożsamości

   (a) $\mathtt{arctg}\frac{1}{x} + \mathtt{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, dla $x > 0$,
   (b) $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

10. [?] Udowodnić nierówności.

   (a) $2\, x\, \mathtt{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$, dla $x \in R$,
   (b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, dla $x \in R$,
   (c) $e^x \geq 1 + x$, dla $x \in R$,

11. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathtt{arctg}x}{\arcsin x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$,

12. Zbadać przedziały monotoniczności następujących funkcji

(a) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$ (b) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = xe^{-3x}$

13. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x$, (b) $f(x) = x^2 \ln x$ $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$

14. Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$,

15. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

(a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ na przedziale $[1, 5]$,

(b) $f(x) = |x-1|$ na przedziale $[0, 3]$.

16. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń

(a) $\cos(0.03)$, (b) $e^{-0.001}$, (c) $\ln(1.004)$.

17. Obliczyć f', f'', f''' podanych funkcji

(a) $f(x) = e^{x^2}$, (b) $f(x) = x\ln(x)$, (c) $\mathrm{tg}(x)$.

18. Zapisać wzór Tylora z resztą w postaci Lagrange'a dla podanych funkcji, w podanych punktach

(a) $f(x) = \ln(x)$ w punkcie $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \sin(2x)$, $x_0 = \pi$, $n = 3$

(c) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$

19. Stosując wzór Maclaurina obliczyć

(a) $\sin(0.1)$ z dokładnością 10^{-5}

(b) $\sqrt[3]{0,997}$ z dokładnością 10^{-3}