CIĄGI LICZBOWE

1. Napisać cztery początkowe wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym

   (a) $a_n = \frac{3n-2}{2^n}$ (b) $b_n = 4 - n^2$ (c) $c_n = \frac{n!-1}{2n^2+3}$

2. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone

   (a) $a_n = 2n$ (b) $b_n = \frac{n+1}{n}$ (c) $c_n = (-1)^n n!$

3. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca

   (a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ (b) $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ (c) $c_n = n^2 - 5n$ (d) $d_n = \frac{n}{2^n}$

4. Zaznacz zdania prawdziwe, uzasadnij odpowiedź

   (a) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ |\frac{1}{n^4} - 1| < \frac{1}{2}$,
   (b) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ |\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2}| < 0,01$,
   (c) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ \ln n > 999$,
   (d) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ \sqrt[n]{n} < \frac{1}{2}$,

5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n+1}}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^3 + 2^3 + ... + n^3}$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sin(n^2)}{n^2 + \cos(n)}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos(n!)}{n^3}$.

6. Obliczyć granice ciągów

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n^2+3)}{3n^3+5}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\frac{1}{3}n+1)(n+2)}{(2n^2-4)(n+3)}$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1+4+7+...+(3n-2)}{n^3+1}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt{n^2+1}}$
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+2} + 5^n}{2^n + 5^{n+3}}$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right)$,
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n}$,
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$,
   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^3+2n+1} \sin(5n!)$,
   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n + 9 \cdot 5^{n+1}}$,
   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$, Wskazówka: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+2} + n^2 + 3^{n+3}}{2^n + n + 3^n}$,
   (m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{2 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 10} + ... + \frac{4}{(4n-2)\cdot(4n+2)}\right)$,
   (n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^n}}$,
   (o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot (3^{n+1} - 2)}{(5^{n+1} - 1) \cdot 3^n}$,
   (p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+2}\right)^n$,
   (r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} - 1\right)^{3n}$,
   (s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{\log_2(n)}}{8^{\log_2(n+1)}}$,
   (u) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+n} - n)$,
   (w) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n}$,
   (x) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$,
   (z) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+4^n}}$.

7. Oblicz granice ciągów określonych rekurencyjnie

   (a) $a_1 = \frac{3}{2}, \ a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n - 2}$, (b) $a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}$,
   (c) $a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \ n \geq 2$.

8. Wskazać podciągi zbieżne

   (a) $a_n = -2 + 2 \cdot (-1)^n$,

   (c) $a_n =$ reszta z dzielenia n przez 5.