Zestaw I (tensory)

1. Udowodnić, że (a) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, (b) przestrzeń liniowa $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nie ma bazy przeliczalnej.
2. Udowodnić, że $T^K(V) \otimes T^L(V) = T^{K+L}(V)$.
3. Przez $\mathbb{C}$ oznaczamy przestrzeń liczb zespolonych nad $\mathbb{R}$ z bazą $\{1, i\}, i^2 = -1$. Definiujemy $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ wzorem $f(c_1, c_2, c_3) = Re(c_1 c_2 c_3)$. Wykazać, że $f \in T^3(\mathbb{C})$ i znaleźć współczynniki tego 3-tensora w podanej bazie.
4. Wyznaczyć współrzędne 2-tensora $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadanego wzorem $f(v, w) = (v \times w)_1$.
5. Udowodnić, że $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$.
6. Niech $V = \{f(x); f \in W(\mathbb{R}, 3)\}$, gdzie przez $W(\mathbb{R}, 3)$ oznaczamy przestrzeń wielomianów zmiennej rzeczywistej stopnia mniejszego lub równego 3. Jest to przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ wymiaru 4, której bazą jest zbiór $\{1, x, x^2, x^3\}$. Wykazać, że odwzorowanie zadane wzorem $\varphi(f) = f'(x)$ jest liniowe i znaleźć macierz φ w danej bazie i w bazie $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$.
7. Udowodnić, że dla każdego $\omega \in T^k(E)$ mamy $Alt\omega \in \Lambda^k(E)$.
8. Udowodnić, że $Alt(\omega \otimes Alt\eta) = Alt(\omega \otimes \eta) = Alt(Alt\omega \otimes \eta)$.
9. Wykazać, że $w^K \wedge \eta^L = (-1)^{K \cdot L} \eta^L \wedge w^K$.
10. Udowodnić, że $w_1 \wedge ... \wedge w_m = \frac{(k_1 + ... + k_m)!}{k_1! ... k_m!} Alt(w_1 \otimes ... \otimes w_m)$.
11. Udowodnić, że $\varphi^\star \circ Alt = Alt \circ \varphi^\star$.
12. Udowodnić, że $w \in \Lambda^K(E) \Leftrightarrow w \in T^K(E) \wedge Altw = w$.
13. Udowodnić, że $\varphi^\star(\omega \wedge \eta) = \varphi^\star(\omega) \wedge \varphi^\star(\eta)$.