Zestaw III (rozmaitości)

1. Dowieść,że M jest rozmaitością, gdy
   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, wyznaczyć $T_{(1,0,0)}M$,
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y^2 + z^2, x + y = z + 1\}\}$, wyznaczyć $T_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}M$,
2. Znaleźć brzeg następujących rozmaitości:
   (a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 4\}$,
   (b) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2, y \geq 0\}$,
   (c) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$,
   (d) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4(x^2 + y^2) \leq z \leq x^2 + y^2 + 4\}$,
   (e) kuli domkniętej w $\mathbb{R}^3$,
   (f) sfery w $\mathbb{R}^3$.
3. Udowodnić, że sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest dwuwymiarową rozmaitością, wyznaczyć przestrzeń styczną w dowolnym punkcie, podać parametryzację sfery.
4. Sprawdzić, że $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; e^{x \cos y} \cos y + e^{x \sin y} \sin y + x + y - 1 = 0\}$ jest krzywą, tzn. 1-wymiarową, gładką podrozmaitością $\mathbb{R}^2$. Napisać równanie przestrzeni stycznej do H w $(0, 0)$.
5. Sprawdzić, że $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^2; e^{x+y+z} + e^{x+y+t} + z - 2 = 0, e^{x+z} + e^{x+y-z} + z - t - 2 = 0\}$ jest krzywą, tzn. 2-wymiarową, gładką podrozmaitością $\mathbb{R}^4$. Napisać równanie przestrzeni stycznej do H w $(0, 0, 0, 0)$. Napisać równanie przestrzeni normalnej w $(0, 0, 0, 0)$.
6. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym. Pokazać, że jeżeli M jest n-wymiarową rozmaitością z brzegiem, to $\partial M = M \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$.
7. Podać parametryzację wstęgi Mŏbiusa.
8. Podać parametryzację torusa.
9. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem gładkim. Rozważmy $M = \{(x, y, \varphi(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Znaleźć ciągłe pole reperów na M.
10. Obliczyć (a) $\displaystyle\int_L ydx + xdy$, (b) $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, gdzie L jest ćwiartką okręgu zadanego wzorami: $x = r \cos t, y = r \sin t$ dla $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
11. Obliczyć (a) $\displaystyle\int_C x^2 + y^2 dy$, gdzie C jest brzegiem prostokąta opisanego prostymi: $x = 1, y = 1, x = 3, y = 5$ (orientacja dodatnia).
12. Pokazać, że $\displaystyle\int_L w = 0$ gdy L jest konturem zamkniętym oraz
    (a) $w = yzdx + xzdy + xydz$,
    (b) $w = \frac{dx-3dy}{z} + \frac{3y-x}{z^2}dz$.
13. Obliczyć $\displaystyle\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, gdzie L jest częścią prostej od $(1, 1, 1)$ do $(2, 3, 4)$.
14. Sprawdzić prawdziwość twierdzenia Stokesa dla $\displaystyle\int_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, gdzie C jest konturem trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1), B(2, 2), C(1, 3)$ dodatniej orientacji.
15. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć
    (a) $\displaystyle\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną powierzchni sześcianu: $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$,

(b) $\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdzie S jest powierzchnią bryły ograniczonej płaszczyznami $x+y+z=a, x=0, y=0, z=0$.

16. Obliczyć całkę $\int_{(M,\tau)}$, jeśli τ jest orientacją M daną przez pola wersorów normalnych $\overrightarrow{n}$ oraz

    (a) $w(x,y,z) = x(y^2+z^2)dy \wedge dx + x^2 dx \wedge dz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y^2+z^2 = 4, y \geq 0, 1 \geq x \geq 0\}$, $\overrightarrow{n}(\frac{1}{2}, 2, 0) = (0,1,0)$,

    (b) $w(x,y,z) = ydz \wedge dx + xdy \wedge dz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$, $\overrightarrow{n}(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

17. Niech $P = [0,1], \Phi : P \to \mathbb{R}^2$ będzie dyfeomorfizmem takim, że $\Phi(0) = \Phi(1)$, τ niech będzie orientacją zgodną z (P, Φ) oraz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją gładką. Pokazać, że $\int_{(\Phi(P))} f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0$.

18. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem $c(x) := (x, f(x))$. Pokazać, że długość $c([0,1])$ wyraża się wzorem $\int_0^1 \sqrt{1+(f')^2}$.

19. Pokazać, że pole powierzchni σ określonej równaniem $z = f(x,y)$, gdzie f to funkcja gładka taka, że jej rzut na płaszczyznę XOY jest obszarem S, jest równe $\int_S \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$. Znaleźć pole powierzchni części płaszczyzny $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ zawartej między płaszczyznami współrzędnych (XOY, YOZ, ZOX).

20. Niech $a < 0 < b$ oraz niech K będzie będzie 3-komórką określoną nierównościami: $0 \leq t \leq a, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$. Niech $\Phi : [0,a] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem $\Phi(t,u,v) = (t\cos u, (b+t\sin u)\cos v, (b+t\sin u)\cos v)$. Wówczas, $\Phi(K)$ jest pełnym torusem. Obliczyć jego objętość i powierzchnię.