# Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW III

**$\sigma$-algebra.**

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbiorów zbioru $\Omega$. Pokazać, że w definicji algebry $\mathcal{A}$ warunek
$$(A0) : \emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$$
można zastąpić warunkiem
$$(A0') : \text{ rodzina } \mathcal{A} \text{ jest niepusta.}$$

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbiorów zbioru $\Omega$. Pokazać, że w definicji algebry $\mathcal{A}$ warunek $(A2) : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ można zastąpić warunkiem $(A2') : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

3. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbiorów zbioru $\Omega$. Udowodnić, że jeżeli $A, B \in \mathcal{A}$, to $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

4. Niech $\{A_i\}$ będzie wstępującym ciągiem algebr, tzn. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Udowodnić, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest algebrą.

5. Niech $\Omega = \mathbb{N}$; $\mathbf{A} = \{A \subset \mathbb{N};\ A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A^c \text{ jest zbiorem skończonym}\}$. Pokazać, że $\mathbf{A}$ jest algebrą, a nie jest $\sigma$-algebrą.

6. Niech $X = \{a, b, c, d\}$. Utworzyć możliwe $\sigma$-algebry podzbiorów zbioru $X$.

7. Udowodnić, że $\sigma$-algebra podzbiorów borelowskich jest równa $\sigma$-algebrze $\sigma((a, b);\ a < b, a, b \in \mathbb{R})$.

8. Udowodnić, że $\sigma((a, b);\ a, b \in \mathbb{R}, a < b) = \sigma((-\infty, b);\ b \in \mathbb{R}) = \sigma((-\infty, b];\ b \in \mathbb{R}) = \sigma([a, b];\ a, b \in \mathbb{R}, a < b) = \sigma((a, \infty);\ a \in \mathbb{R}) = \sigma([a, \infty);\ a \in \mathbb{R}) = \sigma((p, q);\ p, q \in \mathbb{Q}, p < q)$.

**Miara.**

9. Niech $\Omega = \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $\delta_c : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ wzorem
$$\delta_c(A) = \begin{cases} 1 & c \in A \\ 0 & c \notin A \end{cases}.$$
Czy $\mu(A) = 2 \cdot \delta_{-1}(A) + 3 \cdot \delta_2(A)$ jest miarą?

10. Niech $X$ będzie ustalonym zbiorem, $\mu$ miarą określoną na $\sigma$-algebrze $S \subset 2^X$, $A, B \in S, \mu(B) = 0$. Udowodnij, że $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A)$.

11. Niech $X$ będzie ustalonym zbiorem, $\mu$ miarą określoną na $\sigma$-algebrze $S \subset 2^X$, $A, B \in S$. Udowodnij, że $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

12. $\Omega_0 \subset \Omega, S = 2^{\Omega}$. Określamy
$$\mu(A) = \begin{cases} \overline{\overline{A \cap \Omega_0}}; & \overline{\overline{A \cap \Omega_0}} < \aleph \\ \infty; & \overline{\overline{A \cap \Omega_0}} \geq \aleph \end{cases}.$$
Pokazać, że $\mu$ jest miarą. Miarę $\mu$ nazywamy miarą liczącą elementy zbioru $\Omega_0$.

13. Niech $\mu$ będzie miarą określoną na $\sigma((-\infty, a],\ a \in \mathbb{Q}_+)$ taką, że $\mu((-\infty, a]) = a^2$ dla $a > 0, a \in \mathbb{Q}$. Oblicz $\mu([1, \sqrt{2}])$.

14. Niech $\mu$ będzie miarą na $B(\mathbb{R}^2)$ określoną następująco:
jeżeli $P$ jest prostokątem o wierzchołkach wymiernych, to $\mu(P) =$ pole $P$. Pokazać, że $\mu(A) = 0$, gdzie $A$ jest prostą o równaniu $y = 0$.

15. Sprawdzić, czy $\mu$ jest miarą:

   (a) $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+ \quad A \subset \mathbb{R}$,
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \infty, & A \neq \emptyset \end{cases},$$

(b) ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$ $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & x_0 \in A \\ 1, & x_0 \notin A \end{cases},$$

(c) $\delta_{-5} : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$ zadana wzorem

$$\delta_{-5}(A) = \begin{cases} 1, & -5 \in A \\ 0, & -5 \notin A \end{cases},$$

(d) $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$

$$A \subset \mathbb{N}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ skończony} \\ +\infty & \text{gdy } A \text{ nieskończony} \end{cases},$$

(e) $f : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{gdy } A \text{ skończony i n elementowy} \\ +\infty, & \text{gdy } A \text{ nieskończony} \end{cases}.$$

16. Z przedziału $[0,1]$ usuwamy przedział $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$. Następnie z pozostałej części usuwamy przedziały $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$, $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, itd. tzn. tworzymy zbiór $B$ typu *Cantora* w następujący sposób. Niech $I_1 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, $I_2 = \left(\frac{5}{32}, \frac{7}{32}\right) \cup \left(\frac{25}{32}, \frac{27}{32}\right)$, ...,

$$I_n = \left(\frac{2^n+1}{2\cdot 4^n}, \frac{2^n+3}{2\cdot 4^n}\right) \cup ... \cup \left(\frac{2\cdot 4^n - 2^n - 3}{2\cdot 4^n}, \frac{2\cdot 4^n - 2^n - 1}{2\cdot 4^n}\right)$$

i niech $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $B = [0,1] \setminus I$. Obliczyć jednowymiarową miarą Lebesque'a zbioru $B$.

**Funkcje mierzalne.**

17. Udowodnić, że:
   (a) funkcja stała jest funkcją mierzalną,
   (b) funkcja $f(x) = \sin x$ jest funkcją mierzalną.

18. Niech $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będą odwzorowaniami mierzalnymi. Udowodnić, że:
   (a) $c \cdot f$ jest funkcją mierzalną, dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
   (b) $f + g$ jest funkcją mierzalną,
   (c) $f - g$ jest funkcją mierzalną,
   (d) $f^2$ jest funkcją mierzalną,
   (e) $f \cdot g$ jest funkcją mierzalną,
   (f) $\frac{1}{f}$ jest funkcją mierzalną,
   (g) $\sup f_n, \inf f_n$, są funkcjami mierzalnymi, gdy $f_n$ są funkcjami mierzalnymi dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
   (h) $\limsup f_n, \liminf f_n$ są funkcjami mierzalnymi, gdy $f_n$ są funkcjami mierzalnymi dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
   (i) $f'$, o ile istnieje, jest funkcją mierzalną,
   (j) $f^{2n}, n \in \mathbb{N}$ jest funkcją mierzalną.

19. Podać przykład zbioru $F \subset \mathbb{R}$, który nie jest mierzalny w sensie Lebesque'a.

20. Sprawdzić, czy następujące funkcje są mierzalne:
   (a) $f(x) = -3 \cdot \chi_{(-\infty,-2)}(x) - 2 \cdot \chi_{[-2,1)}(x) + 2 \cdot \chi_{[1,+\infty)}(x)$,
   (b) $g(x) = 2 \cdot \chi_{(-\infty,1)}(x) - 3 \cdot \chi_{(-1,+\infty)}(x)$,
   (c) $h(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2)$,
   (d) $f(x) = [x]$,
   (e) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$.

21. Obliczyć następujące całki:

(a) $\int_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$,

(b) $\int_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > \frac{1}{3} \wedge x \notin \mathbb{Q} \\ x^3, & x < \frac{1}{3} \wedge x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$,

(c) $\int_{(0,2)} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x-2}, & 1 < x < 2, \end{cases}$,

(d) $\int_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$,

(e) $\int_{[0,2]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x-2}, & 1 < x < 2, \end{cases}$,

(f) $\int_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dla } x \text{ należących do zbioru Cantora} \\ \frac{2}{5^n}, & \text{na każdym z przedziałów "wyrzuconych" o długości} \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$,

(g) $\int_{[0,1]} f dl$, gdzie $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dla } x \text{ należących do zbioru Cantora} \\ \sin x, & \text{na każdym z przedziałów "wyrzuconych" o długości} \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

22. Na podstawie definicji całki z funkcji prostej obliczyć:

(a) $\int_A [\ln x] dl,\ A = [1, e^m]$,

(b) $\int_A [mx] dl,\ A = [0,1]$.

23. Niech $f(x) = \begin{cases} 1, & x < y < x+1 \\ -1, & x-1 < y < x \\ 0, & \text{p.w.} \end{cases}$, obliczyć:

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx$,

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy$.

(c) Udowodnić, że $f$ nie jest całkowalna względem miary $l^2$.

24. Obliczyć:

(a) $\displaystyle\int_A x\ y\ l^2(dxdy)$ gdzie $A$ jest prostokątem ograniczonym krzywymi $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b$,

(b) $\displaystyle\int_A (2x + y - 1)\ l^2(dxdy)$ gdzie $A$ jest obszarem trójkąta o wierzchołkach $A(1,1),\ B(5,3),\ C(5,5)$,

(c) $\displaystyle\int_A \sin(x+y) l^2(dxdy)$ gdzie $A$ jest obszarem ograniczonym prostymi $y = 0,\ y = x,\ x + y = \frac{\pi}{2}$,

(d) $\displaystyle\int_A \sin x \cos x\ l^2(dxdy)$, gdzie $A = [0, \frac{\pi}{2}]^2$,

(e) $\displaystyle\int_A e^{-x^2}\ l^2(dxdy)$, gdzie $A = \{(x,y); 0 < y < x\}$,

(f) $\displaystyle\int_A \frac{l^2(dxdy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie $A = \{(x,y); 1 < x^2 + y^2 < 9\}$,

(g) $\displaystyle\int_A x\ l^2(dxdy)$, gdzie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$,

(h) $\displaystyle\int_A (18x^2 + 8y^2) e^z\ l^3(dxdydz)$, gdzie $A = \{(x,y,z); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} < 1, |z| < 2\}$,

(i) $\displaystyle\int_A x\ l^3(dxdydz)$, gdzie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + 2y + 3z \le 4\}$,

(j) $\displaystyle\int_A z\sin(x^2 + y^2)\, l^3(dxdydz),$ gdzie $A$ jest zbiorem otwartym, ograniczonym powierzchniami $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = 1,$

(k) $\displaystyle\int_A f(x,y)\, l^2(dxdy),$ gdzie $f(x,y) = \begin{cases} \ln\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}, & (x,y) \neq (2,-1) \\ 0, & (x,y) = (2,-1) \end{cases},$

(l) $\displaystyle\int_A ze^{-\frac{9x^2+4y^2}{2}} l^2(dxdydz),$ gdzie $A = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{9} \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\},$

(m) $\displaystyle\int_A z\sin(x^2 + y^2) l^2(dxdydz)$ gdzie $A$ jest bryłą ograniczoną płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1,\ x^2 + y^2 = 1.$

25. Obliczyć, o ile istnieją, granice:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} (1 - \sin^n x)x^2 l^2(dx),$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A n\sin\frac{x}{n} l^2(dxdy),$ gdzie $A$ jest trókątem o wierzchołkach $(0,0), (0,1), (1,2),$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A \sqrt[n]{x^2+y^2} \cdot \chi_{(0,\infty)}(x\cdot y) + (1 - x^2 - y^2)^n \chi_{(-\infty,0]}(x\cdot y),$ gdzie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\},$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)^3} \frac{(1+x+y)^n}{1+(1+x+y)^n} e^{-x-y-\frac{z^2}{2}} l^3(dxdydz),$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} \int_A (n - 3\ln z - \ln(x^2+y^2))^n \cdot (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} l^3(dxdydz),$ gdzie $A = \{(x,y,z); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}.$