Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW II

Całka podwójna.

1. Obliczyć całki iterowane

(a) $\int_0^1 \Big(\int_0^1 (x+y)dy \Big) dx,$

(b) $\int_0^4 \Big(\int_4^{12} x\, y\, dy \Big) dx$

(c) $\int_{-2}^4 \Big(\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\, dx \Big) dy.$

2. Zmienić kolejność całkowania

(a) $\int_0^2 \Big(\int_x^{2x} dy \Big) dx,$ (b) $\int_1^2 \Big(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \Big) dx,$ (c) $\int_0^1 \Big(\int_{x^3}^{x^2} dy \Big) dx,$

(d) $\int_1^e \Big(\int_0^{\ln x} dy \Big) dx,$ (e) $\int_{-2}^1 \Big(\int_{y^2}^4 dx \Big) dy,$ (f) $\int_0^1 \Big(\int_x^{2-x^2} q\, dy \Big) dx,$ (g) $\int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{y}}^y z\, dx \Big) dy.$

3. Obliczyć całkę podwójną $\int\int f(x,y)(dxdy)$, gdzie

(a) $f(x,y) = x \cdot y$ i D jest prostokątem ograniczonym krzywymi $x = 0,\ x = a,$ $y = 0,\ y = b,$

(b) $f(x,y) = 2x + y - 1$ i D jest obszarem trójkąta o wierzchołkach $A(1,1),\ B(5,3),\ C(5,5),$

(c) $f(x,y) = \sin(x+y)$ i D jest obszarem ograniczonym prostymi $y = 0,\ y = x,$ $x + y = \frac{\pi}{2},$

(d) $f(x,y) = |\cos(x+y)|$ i $D = [0,\pi] \times [0,\pi],$

(e) $f(x,y) = \max(2x,y)$ i $D = [0,2] \times [0,1],$

(f) $f(x,y) = [y]$ i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \le y \le \frac{5}{2}\},$

(g) $f(x,y) = [x+y]$ i $D = [0,2] \times [0,2],$

(h) $f(x,y) = sgn(x^2 - y^2 + 2)$ i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 4\},$

(i) $f(x,y) = x^2$ i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \le 1\},$

(j) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2 + y^2 \le 4\},$

(k) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ i $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \le 2x, x \ge 1, y > 0\},$

(l) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ i $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 9,\ x < 0, y < 0\},$

(m) $f(x,y) = x$ i $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \le 0\},$

(n) $f(x,y) = xy$ i $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 2\},$

(o) $f(x,y) = y^2 e^{x^2+y^2}$ i $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\},$

(p) $f(x,y) = x^2 + y^2$ i $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \le x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\}.$

4. Obliczyć pole figury ograniczonej:

(a) prostymi $y^2 = x,\ x^2 = 8y,$

(b) parabolą $y = x^2 - 2x + 2,$ styczną do niej w punkcie $(3,5)$, osiąOY i osią OX,

(c) $3x^2 = 25y,\ 5y^2 = 9x,$

(d) lemniskatą $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$

5. Obliczyć objętość figury ograniczonej powierzchniami:

(a) $x^2 + z^2 = 1, x + y = 1, z = 0, y = 0,$ przy czym $z \ge 0,\ y \ge 0,$

(b) $2z = x^2 + y^2$ i $y + z = 4$,
(c) $x + z = 2, y - z = 2$ oraz walcem $x^2 + y^2 = 4$,
(d) $z = x^2 + y^2, x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$,
(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 2x$.

Całka krzywoliniowa.

6. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane (I rodzaju):
   (a) $\int_L (x^2 + y^2)dl$, gdzie L jest krzywą o równaniach $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi], a > 0$,
   (b) $\int_L (y - x)dl$, gdzie L jest łukiem krzywej $y = x^3$ zawartym między punktami $A(1, 1)$ i $B(2, 8)$,
   (c) $\int_K \frac{dl}{x - y}$, gdzie K jest odcinkiem prostej $y = \frac{1}{2}x - 2$ zawartym między punktami $A(0, -2)$ i $B(4, 0)$,
   (d) $\int_K ydl$, gdzie K jest łukiem paraboli $y^2 = 2px$ od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2, 2\sqrt{p})$,
   (e) $\int_L \sqrt{2y}ds$, gdzie L jest łukiem cykloidy o równaniach parametrycznych $x = y - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$,
   (f) $\int_L (x + y)dl$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1)$,
   (g) $\int_K x^2ydl$, gdzie K jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.
7. Znaleźć współrzędne środka ciężkości ćwiartki elipsy $x = a\cos t, y = b\sin t$ znajdujacej się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, jeżeli gęstość w każdym punkcie krzywej jest równa rzędnej tego punktu.
8. Znaleźć współrzędne środka ciężkości linii łańcuchowej $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ między jej punktami o odciętych $x_1 = 0, x_2 = a$, jeżeli gęstość krzywej w każdym punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do rzędnej punktu.
9. Obliczyć momenty bezwładności jednorodnego łuku półkola o równaniach $x = a\cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, \pi]$.
10. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane (II rodzaju)
    (a) $\int_L xdy$, gdzie L jest obwodem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych i prostą $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ w kierunku dodatnim,
    (b) $\int_{AB} x^2 - y^2dx$, gdzie AB to łuk paraboli $y = x^2$ od punktu $A(0, 0)$ do punktu $B(2, 4)$,
    (c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y - x)dy$, po krzywej $y = x^3$,
    (d) $\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos ydx + y\sin xdy$, po odcinku łączącym punkty $(0, 0)$ i $(\pi, 2\pi)$,
    (e) $\int_K (x^2 + y^2)dy$, gdzie K jest brzegiem prostokąta opisanego prostymi $x = 1, y = 1, x = 3, y = 5$, (orientacja dodatnia),
    (f) $\int_K 2x(y - 1)dx + x^2dy$, gdzie K jest konturem figury ograniczonej liniami $y = x^2, y = 9$.
11. W każdym punkcie elipsy działa siła $\vec{F}$ o współrzędnych $F_x = x^2$ i $F_y = -y^2$. Znaleźć prace wykonaną przez tą siłę przy przesunięciu punktu materialnego P o masie m po całej elipsie.
12. Dane jest pole się o składowych $F_x = xy - y,\ F_y = 2x + y^2$. Wyznaczyć jaką pracę trzeba wykonać, aby pokonać siły pola wzdłuż drogi łuku $y = x^3$ od punktu $A(0, 0)$ do $B(1, 1)$.
13. Obliczyć przy pomocy całki krzywoliniowej pola figur ograniczonych danymi krzywymi zamkniętymi
    (a) asteroidą $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$,

(b) lemniskatą $x = a\cos t\sqrt{2\cos(2t)}, y = a\sin t\sqrt{2\cos(2t)}, t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

14. Sprawdzić, czy dane całki obliczone po krzywej zamkniętej L są równe zeru

(a) $\int_L 2xydx + x^2dy$,

(b) $\int_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, przy czym początek układu współrzędnych leży poza linią L,

(c) $\int_L ydx + (x + y)dy$, po krzywej L określonej równaniami $y = x^2, y = 4$.

15. Wykazać, że następujące wyrażenia są różniczkami funkcji $F(x, y)$ oraz wyznaczyć tę funkcję

(a) $(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$,

(b) $\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$,

(c) $\int_L (y^2e^{xy} - 3)dx + e^{xy}(1 + xy)dy$,

(d) $(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$.

16. Korzystając z Twierdzenia Greena obliczyć całki

(a) $\int_L (2y^2+1)dx+(y^2+2x)dy$, gdzie L jest konturem trójkąta o wierzchołkach $A(-1, -1), B(2, 2), C(-1, 1)$,

(b) $\int_L \frac{2}{3}(x^3dy - y^3dx)$, gdzie L jest górną połową okręgu $x^2 + y^2 = 2x$,

(c) $\int_L (x^2 + 1)dx + \sqrt{x^2 + y^2}dy$, gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = a^2$.

Całka potrójna.

17. Obliczyć całki iterowane

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{2}(4 + z)dzdydx$,

(b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}}\int_{1-x}^{2-2x} ydzdydx$,

(c) $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^3\sin z\cos zdxdydz$,

(d) $\int_{0}^{e-1}\int_{0}^{e-x-1}\int_{e}^{x+y+e} \frac{\ln(z - x - y)}{(x - e)(x + y - e)}dzdydx$.

18. Obliczyć całkę potrójną $\int\int\int_G f(x, y, z)(dxdydz)$, gdzie

(a) $f(x, y, z) = \frac{1}{1-x-y}$, a G jest obszarem ograniczonym płaszczyznami $x + y + z = 1$, $x = 0, y = 0, z = 0$,

(b) $f(x, y, z) = (18x^2 + 8y^2)e^z$, a $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1,\ |z| < 2\}$,

(c) $f(x, y, z) = 2x + 3y - z$, a G jest graniastosłupem ograniczonym płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, z = 3, x + y = 2$,

(d) $f(x, y, z) = z\sin(x^2 + y^2)$ oraz G jest bryłą ograniczoną płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = 1$,

(e) $f(x, y, z) = ze^{-\frac{9x^2+4y^2}{2}}$, a $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{4} + \frac{v^2}{9} \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$,

(f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, oraz G jest ograniczone powierzchniami: stożkiem $x^2 + y^2 = z^2$ i płaszczyzną $z = 1$,

(g) $f(x, y, z) = xyz$, a G jest bryłą ograniczoną płaszczyznami $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

19. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = x$,

(b) elipsoidą trójwymiarową $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$,

(c) $x = 0, x = 1, y = 2, y = 5, z = 2, z = 4$,

(d) $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$,

(e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1, |z| < 2$,

(f) $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 - 2y = 3$,

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0, z \in \mathbb{R}$.

Całka powierzchniowa.

20. Obliczyć całki powierzchniowe

(a) $\int\int_S (8 - 2z) ds$, gdzie $S : z = 4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ dla $z > 0$,

(b) $\int\int_S y ds$, gdzie S jest powierzchnią półkuli: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

(c) $\int\int_S \frac{ds}{(1+x+z)^2}$, gdzie S jest częścią powierzchni $x + y + z = 1$ zawartej w pierwszej ósemce,

(d) $\int\int_S (x^2 + y^2) ds$, gdzie $S : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

21. Obliczyć całkowity ładunek elektryczny rozmieszczony na części powierzchni $2x + y + 5z - 15 = 0$ zawartej w pierwszej ósemce, jeżeli gęstość ładunku jest wprost proporcjonalna do $3x + 2y + 5z$.

22. Obliczyć masę tej części paraboloidy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, która zawarta jest między płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$ i której gęstość w każdym punkcie równa się trzeciej współrzędnej punktu powierzchni.

23. Obliczyć całki powierzchniowe zorientowane:

(a) $\int\int_S x dydz + y dzdx + z dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

(b) $\int\int_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni stożka $x^2 + y^2 = z^2$ dla $0 \leq z \leq h$,

(c) $\int\int_S x^3 dydz + x^2 y dzdx + x^2 z dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną tej powierzchni walca $x^2 + y^2 = a^2$, która jest ograniczona płaszczyznami $z = 0$, i $z = h$.

24. Wykazać, ze objętość V bryły ograniczonej powierzchnią S zamknięta, gładką i zorientowaną może być wyrażona wzorem: $V = \frac{1}{3} \int\int_S x dydz + y dzdx + z dxdy$.

25. Obliczyć za pomocą twierdzenia Stokesa pracę wykonaną przez siłę $F = (x+z, x-y+2z, y-4x)$ działającą wzdłuż obwodu ABCA trójkąta o wierzchołkach $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$.

I. Całka krzywoliniowa I rodzaju (nieskierowana).

Całkę krzywoliniową nieskierowaną funkcji $f(x,y)$ oznaczamy: $\int_L f(x,y)dl$.
Jeżeli równanie łuku L zadane jest w postaci jawnej $y=y(x)$ dla $a\le x\le b$, to

$$dl=\sqrt{1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}dx \quad \text{oraz} \quad \int_L f(x,y)dl=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}dx.$$

Jeżeli krzywa jest dana równaniami parametrycznymi tzn. $x=x(t), y=y(t)$ dla $\alpha\le t\le\beta$, to

$$dl=\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}dt \quad \text{oraz} \quad \int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}dt.$$

Jeżeli równanie krzywej jest dane w układzie biegunowym $r=r(\phi)$ dla $\phi_1\le\phi\le\phi_2$, to

$$dl=\sqrt{r^2+\Big(\frac{dr}{d\phi}\Big)^2}d\phi \quad \text{oraz} \quad \int_L f(x,y)dl=\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(r\cos\phi,r\sin\phi)\sqrt{r^2+\Big(\frac{dr}{d\phi}\Big)^2}d\phi.$$

II. Całka krzywoliniowa II rodzaju.

Całkę krzywoliniową skierowaną oznaczamy: $\int_L F(x,y)dx$ lub $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.
Jeżeli równanie łuku L zadane jest w postaci jawnej $y=y(x)$ dla $a\le x\le b$, to

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\Big(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\Big)dx.$$

Jeżeli łuk L jest dany równaniami parametrycznymi tzn. $x=x(t), y=y(t)$ dla $\alpha\le t\le\beta$, to

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt.$$

Analogiczne twierdzenia istnieją dla całek krzywoliniowych w przestrzeni.

III. Całka powierzchniowa niezorientowana.

Jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ jest ciągła i płat S jest gładki (regularny), to całka powierzchniowa $\int\int_S F(x,y,z)ds$ istnieje i wyraża się za pomocą całki podwójnej następującym wzorem:

$$\int\int_S F(x,y,z)ds=\int\int_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}dxdy,$$

gdzie D jest rzutem płata S na płaszczyznę Oxy.

Jeżeli płat powierzchniowy dany jest równaniami parametrycznymi: $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v)$, gdzie punkty (u,v) należą do obszaru jednospójnego Δ, to całka krzywoliniowa niezorientowana funkcji ciągłej na gładkim płacie S wyraża sie wzorem:

$$\int\int_S F(x,y,z)ds=\int\int_\Delta F(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big)^2}dudv.$$

Interpretacja fizyczna: Jeżeli $F(x,y,z)$ jest gęstością powierzchniową masy rozpostartej na płacie gładkim S, to $\int\int_S F(x,y,z)ds$ jest masą powierzchni S. Jeżeli $F(x,y,z)$ jest gęstością ładunku elektrycznego, to $\int\int_S F(x,y,z)ds$ przedstawia całkowity ładunek znajdujący się na powierzchni S.

III. Całka powierzchniowa zorientowana. Całka powierzchniowa zorientowana płata powierzchni S

wyraża się wzorem:

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

gdzie $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ jest wektorem jednostkowym na osi normalnej zgodnie z nią skierowanym.

Jeżeli powierzchnia S jest zadana równaniami parametrycznymi : $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v)$, gdzie $(u,v) \in \Delta$(obszar płaski), to mamy

$$\cos\alpha = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ \cos\beta = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ \cos\gamma = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Wówczas

$$\int\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int_\Delta \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) dudv,$$

Twierdzenie Greena. Jeżeli funkcje $P(x,y)$ oraz $Q(x,y)$ są ciągłe wraz z pochodnymi $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ wewnątrz i na brzegu obszaru D normalnego względem obu osi współrzędnych, przy czym brzeg L obszaru D jest skierowany dodatnio, to:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Niech $F = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, gdzie $P, Q, R \in C^1(V)$, V jest obszarem domkniętym i normalnym względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych oraz niech S będzie powierzchnią zamkniętą, gładką, zorientowaną na zewnątrz ograniczającą obszar V. Wówczas,

$$\int\int_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int\int\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Uogólnienie.Twierdzenie Stokesa. Niech $F = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, gdzie $P, Q, R \in C^1(V)$, V jest obszarem przestrzennym zawierającym powierzchnię gładką S i jej brzeg K Wówczas,

$$\int_K (Pdx + Qdy + Rdz)dS = \int\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Uwaga. $rot(P,Q,R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$