Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i $x_0 \in U$.

Definicja. Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in U$ minimum lokalne, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że

- $B(x_0, r) \subset U$,
- $\forall\ x \in B(x_0, r)\ \ f(x) \geqslant f(x_0)$.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in U$ maksimum lokalne, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że

- $B(x_0, r) \subset U$,
- $\forall\ x \in B(x_0, r)\ \ f(x) \leqslant f(x_0)$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.
Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne oraz jest w x_0 różniczkowalna, to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ dla $i = 1, 2, ..., d$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$.
Jeżeli

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,
- $$D^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ - macierz Hessa}$$

  (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ i $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0 \ \Rightarrow\ f$ ma minimum w (x_0, y_0),
  (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ i $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0 \ \Rightarrow\ f$ ma maksimum w (x_0, y_0),
  (c) $\det D^2 f(x_0, y_0) < 0 \ \Rightarrow\ f$ nie ma ekstremum,
  (d) $\det D^2 f(x_0, y_0) = 0 \ \Rightarrow$ nie wiadomo.

Ekstremum globalne.
Funkcja f ciągła w pewnym obszarze domkniętym i ograniczonym D musi przyjmować w tym obszarze wartość największą i najmniejszą, przy czym wartości te (ekstrema absolutne) są bądź ekstremami lokalnymi leżącymi wewnątrz obszaru D, bądź występują na brzegu obszaru.

Schemat postępowania:
A. Znajdujemy punkty krytyczne leżące wewnątrz obszaru D i obliczamy w nich wartość funkcji.
B. Wyznaczamy największą i najmniejszą wartość badanej funkcji na granicy obszaru D.
C. Porównujemy otrzymane wartości.

Ekstremum lokalne związane.

Niech $f, g_1, ..., g_s : U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^d, g_i \in C^1$. Zdefiniujmy zbiór $M := \{x \in U;\ g_i(x) = 0, i = 1, ..., s\}$.

Definicja. Punkt $x_0 \in M$ nazywać będziemy

- lokalnym maksimum związanym funkcji f na zbiorze M jeżeli
$$\exists_{r>0}\ \forall_{x \in B(x_0,r)\cap M}\ f(x) \leqslant f(x_0),$$
- lokalnym minimum związanym funkcji f na zbiorze M jeżeli
$$\exists_{r>0}\ \forall_{x \in B(x_0,r)\cap M}\ f(x) \geqslant f(x_0),$$

Metoda mnożników Lagrange'a.

1. Sprawdzamy czy
$$\text{rz} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_d}(x) \\ & ... & \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial g_s}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} = s$$
dla $x \in U$ takich, że $g_i(x) = 0$ dla każdego $i = 1, ..., s$.
2. Tworzymy funkcję Lagrange'a:
$$F(x_1, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_d) + \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_d) + ... + \lambda_s g_s(x_1, ..., x_d)$$
$1 \leqslant s < d$, (λ_i- mnożniki Lagrange'a).
3. Rozwiązujemy układ równań:
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) &= 0 \\ \quad ... \\ \frac{\partial F}{\partial x_d}(x) &= 0 \\ g_1(x) &= 0, \\ \quad ..., \\ g_s(x) &= 0. \end{cases}$$
4. Badamy, czy fumkcja F przyjmuje ekstremum lokalne w punkcie będącym rozwiązaniem powyższego układu równań.