Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Ciągi i szeregi funkcyjne, szeregi potęgowe

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną następujących ciągów funkcyjnych:

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant n \\ 1 & \text{dla} \quad x > n \end{cases}$

   (b) $f_n : \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

   (e) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$

   (f) $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$

2. Zbadać jednostajną zbieżność szeregu

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \ x \in \mathbb{R}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1 + nx}}, \ x \geqslant 0$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(a_n - a_{n-1})$, gdzie $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ograniczonym,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}, \ x \in \mathbb{R}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \ x \in \mathbb{R}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x + n)^2}$

3. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych i zbadać zbieżność szeregów na krańcach przedziałów zbieżności

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n(n + 1)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x + 1)^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{x + 3}{x - 3}\right)^n$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^{2n}}{n9^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})x^n$

4. Policzyć sumę szeregu (obliczyć przedział jego zbieżności)

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n + 1}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)x^n$

5. Następujące całki wyrazić za pomocą szeregów

(a) $\int \frac{\sin x}{x^2}dx$

(b) $\int e^{x^2}dx$

(c) $\int \cos(x^2)dx$

(d) $\int \sin(x^3)dx$

6. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

(c) $f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2}$

(d) $\int_0^x e^{-t^2}dt$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

(f) $f(x) = \frac{4x}{x+2}$

(g) $f(x) = \ln(4+x^2)$

Twierdzenie o różniczkowaniu

Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma promień zbieżności R, a suma jego równa się $f(x)$, to szereg potęgowy z pochodnych wyrazów szeregu pierwotnego $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ ma ten sam promień zbieżności R, a suma jego $g(x)$ jest pochodną sumy szeregu pierwotnego, tzn. $g(x) = f'(x)$ dla $|x-x_0| < R$.

Twierdzenie o całkowaniu szeregów

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (gdzie a_n jest funkcją ciągłą w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$) jest jednostajnie zbiezny w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ do sumy $f(x)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)$ jest zbieżny do sumy $\int_a^b f(x)dx$.