Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW I

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$,

   (b) $f(x,y) = \arcsin \sqrt{y - \sqrt{x}}$,

   (c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$,

   (d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

2. Obliczyć, o ile istnieją, granice:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$,

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$,

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sin \dfrac{\pi}{x^2+y^2}$,

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$,

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$,

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{2x^2+y^2}$,

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$,

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,

   (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$,

   (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$,

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

3. Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$,

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$,

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} e^x, & x < y \\ e^y, & x \geq y \end{cases}$,

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \\ 1, & x \in \mathbb{R}, y < 0 \end{cases}$.

4. Obliczyć pochodną kierunkową podanych funkcji:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy + 3y - 1$, w punkcie $(x_0, y_0) = (1,1)$, w kierunku $(2,1)$,

   (b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$, w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$, w kierunku $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, w punkcie $(x_0, y_0) = (-3,3)$, w kierunku $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$,

   (d) $f(x,y) = \sin x \cos y$, w punkcie $(x_0, y_0) = (0,\pi)$, w kierunku $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

   (e) $f(x,y,z) = e^{2xyz}$, w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (-1,-1,1)$, w kierunku $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, \sqrt{3})$.

5. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji we wskazanych punktach:

   (a) $f(x,y) = x \sin(xy)$, w punkcie $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$,

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - y^3}$, w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$,

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (0,0)$.

6. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2y^3 - x\sin y$,

(b) $f(x,y) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$,

(c) $f(x,y) = (\sin x)^{\ln y}$,

(d) $u(x,y) = f(3xy, y^2x, x)$,

(e) $f(u,v) = e^{uv}$, gdzie $u = \ln(x^2+y^2)$, $v = \operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x})$,

(f) $f(u,v) = \ln \frac{u}{v+1}$, gdzie $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

(g) $f(x,y) = xy^2z^3 - y\sin z$,

(h) $f(x,y) = x^y$, $x > 0$,

(i) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$,

(j) $u(x,y,z) = f(z, xz^2, y)$,

7. Obliczyć:

(a) $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}$, gdzie $f(x,y) = xe^{-y}$,

(b) $\frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x \partial y}$, gdzie $f(x,y,z) = \ln(x^2+2y-z)$.

8. Napisać macierz Jacobiego dla następujących odwzorowań:

(a) $f(x,y) = (xy^2, 2x+y^2, 3xy)$,

(b) $f(x,y) = x^4y^2$,

(c) $f(x,y) = (xy^2, 2x+y^2, 3xy)$.

9. Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, w punkcie $(x_0,y_0) = (0,0)$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4+z^4}$, w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$,

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, w punkcie $(x_0,y_0) = (1,-2)$,

(e) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, w punkcie $(x_0,y_0) = (0,0)$,

(f) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

10. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresów pochodnych funkcji we wskazanych punktach wykresów:

(a) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2)$,

(b) $f(x,y) = x^y$, w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (2,4,16)$,

(c) $f(x,y) = \frac{\arcsin x}{\arccos y}$, w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$.

11. Napisać wzór Tylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli

(a) $f(x,y) = \sin^2(x+y)$, $(x_0,y_0) = (\pi,\pi)$, $n = 2$,

(b) $f(x,y) = -x^2 + +2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $(x_0,y_0) = (-2,1)$, $n = 3$,

(c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $n = 3$,

(d) $f(x,y) = \sin(x)e^{2y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $n = 3$.

12. Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + (y-x)^4$,

(b) $f(x,y) = 2x^4 - 3y^7$,
(c) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$.

13. Znaleźć ekstrema lokalne podanych funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$,
(b) $f(x,y) = (2x + y^2)e^x$,
(c) $f(x,y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$,
(d) $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$,
(e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$,
(f) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,

(b) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$,
(d) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,
(f) $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, gdzie $x, y > 0$,
(h) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$,
(j) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^2$,
(l) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+2z)}$.

14. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 1$,
(b) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ w obszarze domkniętym ograniczonym liniami $y = x^2$ i $y = 4$,
(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ w kwadracie $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$,
(d) $f(x,y) = x^2y - 8x - 4y$ w trójkącie o wierzchołkach $(0,0), (0,4), (4,0)$.

15. W równoramiennym trójkącie prostokątnym znaleźć punkt o tej własności, że suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza.

16. Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć trójkąt o największym polu.
(wsk. skorzystać ze wzoru Harona na pole trójkąta.)

17. Na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

18. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)$ przy danym warunku $g(x,y) = 0$.

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $g(x,y) = x + y - 1$,
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $g(x,y) = x + y - 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,
(c) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8$,
(d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = xy - 1$,
(e) $f(x,y,z) = x + y + z$ przy warunkach $xyz = 8$, $\frac{xy}{z} = 2$.

19. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych określonych podanymi równaniami

(a) $y = y(x)$,
(i) $y + \mathrm{arctg} y - x^3 = 0$,
(ii) $xe^y + ye^x - 2 = 0$, w $x_0 = 0$,
(iii) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$, w $x_0 = 1$,
(b) $z = z(x,y)$,
(i) $z^3 - 3xyz = a^3$.

20. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej określonej równaniami

(a) $y = y(x)$,
(i) $x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0$,
(ii) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$,
(b) $z = z(x,y)$,
(i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$,
(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej). Niech U będzie otwartym podzbiorem produktu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ oraz $F : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w U. Jeżeli F spełnia warunki

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0),

(3) ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłą pochodną $\frac{\partial F}{\partial y}$ różną od zera w punkcie (x_0, y_0),

to w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ istnieje dokładnie jedna funkcja $y = y(x)$ ciągła, spełniająca warunki $y_0 = f(x_0)$ oraz $F(x, y(x)) = 0$ dla każdego x z tego otoczenia.

- Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^2, F : U \to \mathbb{R}$ spełnia w punkcie (x_0, y_0) warunki $(1) - (3)$ z twierdzenia o funkcji uwikłanej oraz istnieje pochodna $\frac{\partial F}{\partial x}$ ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0), to funkcja uwikłana $y = y(x)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $x = x_0$ ciągłą pochodną daną wzorem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

- Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, F : U \to \mathbb{R}$ spełnia w punkcie (x_0, y_0, z_0) warunki $(1) - (3)$ z twierdzenia o funkcji uwikłanej oraz w otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) istnieją ciągłe pochodne $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ (tzn. funkcja F jest klasy C^1 w otoczeniu (x_0, y_0, z_0)), to w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) funkcja uwikłana $z = z(x, y)$ ma ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe (tzn. jest klasy C^1), przy czym pochodne te wyrażają się następującymi wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$