Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW II

Kryteria zbieżności szeregów liczbowych.

Kryterium Potęgowe Cauchy'ego. Niech ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem nierosnńcym o wyrazach nieujemnych. Wówczas,

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny } \Leftrightarrow \text{ szereg } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{jest zbieżny.}$$

Kryterium Cauchy'ego. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (tzn.$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_n > 0$).

(i) Jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, to szereg ten jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, to szereg ten jest rozbieżny.

Kryterium D'Alemberta. Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to szereg ten jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to szereg ten jest rozbieżny.

Kryterium porównawcze 1. Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Jeżeli dla prawie wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $a_n \le b_n$ oraz

(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(ii) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Kryterium porównawcze 2. Rozważmy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Jeżeli dla prawie wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $|a_n| \le b_n$ oraz

(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

(ii) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny (tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest bezwzględnie zbieżny), to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Definicja. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *ograniczony* jeżeli ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ jest ograniczony, tzn. $\exists_{M>0}\ \forall_{n\in N}\ |S_n| \le M$.

Kryterium Dirichleta. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest ograniczony, a ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest taki, że $\forall_n\ \ \lambda_n \ge \lambda_{n+1} \ge 0$ i $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ jest zbieżny.

Kryterium Leibniza. Jeżeli ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest taki, że $\forall_n\ \ \lambda_n \ge \lambda_{n+1} \ge 0$ i $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to szereg $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n$ jest zbieżny.

Kryterium Abela. Niech szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny oraz niech ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie monotoniczny i ograniczony. Wówczas, szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ jest zbieżny.

Kryterium całkowe Cauchy'ego. Niech ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich $a_n = f(n)$.

Wówczas szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (rozbieżny) $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna (rozbieżna), gdzie $f(x)$ - malejąca funkcja ciągła.

Przykład. Uogólniony szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

(i) Jeżeli $p > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $p \leq 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest rozbieżny.

Przykład. Przykłady ciągów zbieżnych.

$\frac{\log_a n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad a > 1$

$\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \quad a > 0$

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\frac{n^k}{a^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad a > 1$

$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad a > 0$

$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$(1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

$(1 + \frac{m}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^m$