Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Szeregi liczbowe.

1. Obliczyć sumy szeregów.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{6^n}$

(d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

2. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium porównawczego.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

3. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium D'Alemberta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$

4. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium Cauchy'ego.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$

5. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{1}{n})$

6. Zbadać zbieżność szeregów.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)\,3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}, \quad a > 1$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{4^n+5^n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{6^n}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{e^{\sqrt{n^2+n}}}\right)$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$

7. Korzystając z kryterium o zagęszczaniu zbadać zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{n^2}$

8. Zbadać zbieżność szeregów ze względu na parametr $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n, \quad a > 0$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0$

9. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n}$

10. Pokazać, że jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne, to następujące szeregi też są zbieżne

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$

11. Pokazać, że $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$

12. Dowieść, że jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne i jeden z nich jest bezwzgldnie zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest bezwzględnie zbieżny.