Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW IV

Rachunek różniczkowy.

1. Z definicji pochodnej oblicz pochodną podanej funkcji w punkcie x_0.

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ w $x_0 = 1$, (b) $f(x) = \sqrt{x+3}$ w $x_0 = 6$,
   (c) $f(x) = 2x^3 - 5$ (ogólny wzór), (d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (ogólny wzór).

2. Zbadać różniczkowalność funkcji.

   (a) $f(x) = |\ln x|$ w $x_0 = 1$, (b) $f(x) = |x-3|$ w $x_0 = 3$,
   (c) $f(x) = |x|^3$ w $x_0 = 0$, (d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ w $x_0 = 0$,
   (e) $f(x) = x^2$ gdy $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ gdy $x \notin \mathbb{Q}$,
   (e) $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ gdy $x \neq 0$ oraz $f(x) = 0$ gdy $x = 0$.

3. Obliczyć pochodne podanych funkcji

   (a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x},\ x > 0$, (b) $f(x) = \frac{e^x + \sin(x)}{e^x + 4}$,
   (c) $f(x) = \ln(x)(x^4 + \frac{3}{x^2})$, (d) $f(x) = \sin(x^2)$ (e) $\sqrt[3]{\sin x^3}$,
   (f) $f(x) = \frac{1}{\cos(\sin x)}$, (g) $f(x) = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, (h) $f(x) = \ln(x)^x\ x^x$.

4. Podać wzór na pochodną funkcji odwrotnej.

   (a) $f^{-1}(y) = \arccos y,\ x \in [0,\pi],\ -1 \leq y \leq 1$, (b) $f(x) = x + e^x$ w $y_0 = 1$,
   (c) $f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ -1 \leq y \leq 1$, (d) $f(x) = x + \ln x,\ x > 0$, w $y_0 = 1$.

5. Dobrać parametry a, b tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2. \end{cases}$$

   była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\quad |f(x) - f(y)| \leq 7(x-y)^2$. Wykazać, że f jest stała.

7. Znaleźć kąty, pod którymi przecinają się krzywe

   (a) $f(x) = \sin x,\quad g(x) = \cos x$ (b) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = x^3$,
   (c) $f(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = \sqrt{x}$.

8. Znaleźć wzór na styczną do wykresu funkcji $e^{\sqrt[3]{x}}$ w punkcie $x_0 = 1$.

9. Znaleźć punkty, w których styczna do krzywej $y = 5x^2 - 8x$ jest

   (a) równoległa do osi odciętych, (b) tworzy z osią odciętych kąt $\frac{\pi}{6}$.

10. Sprawdź następujące tożsamości.

    (a) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$, dla $x > 0$,
    (b) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} + \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$, dla $x \in (-1, +\infty)$,
    (c) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

11. Udowodnij nierówności.

    (a) $2\,x\ \operatorname{arc\,tg} x \geq \ln(1+x^2)$, dla $x \in \mathbb{R}$,
    (b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, dla $x \in \mathbb{R}$,
    (c) $e^x \geq 1 + x$, dla $x > 0$,

(d) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.

12. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \ \operatorname{tg} x})$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2-\ln(\sin x)}{\ln x^2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2}$, (f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{\arcsin x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$,

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2^x+1)}{x}$, (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 - 3x}{x\sin x + x}$,

13. ZbadaC przebieg zmienności i narysować wykres funkcji

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$,

(c) $f(x) = xe^{-2x}$, (d) $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

14. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

(a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ na przedziale $[1,5]$, (b) $f(x) = |x-1|$ na przedziale $[0,3]$.

15. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń

(a) $\cos(0.03)$, (b) $e^{-0.001}$, (c) $\ln(1.004)$.

16. Obliczyć f', f'', f''' podanych funkcji

(a) $f(x) = e^{x^2}$, (b) $f(x) = x\ln(x)$, (c) $\operatorname{tg}(x)$.

17. Zapisać wzór Tylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \ln(x)$ w punkcie $x_0 = 1$.