Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW III

Granice i ciągłość funkcji.

1. Udowodnić, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$.

2. Obliczyć granice

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20}$

(b) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}$,

(d) $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$,

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{x - 2}$,

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$,

(wskazówka: $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$)

(f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$,

(g) $\lim_{x\to 1} (1 - x) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} x)$,

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

(i) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(1 + x) - \ln(x)}{\sin(\frac{1}{x})}$,

(j) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3 - 2x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$,

(k) $\lim_{x\to 1} \frac{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x}{2 \cdot 7^x - 7 \cdot 2^x}$

(wskazówka: skorzystać ze wzoru $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ 0 < a \neq 1$)

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{e^x}$,

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

3. Zbadać istnienie granic jednostronnych i istnienie granic funkcji

(a) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}\ in$ w punkcie $x = 0$,

(b) $f(x) = \frac{x+1}{e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x = 0$,

(c) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} + x$ w punkcie $x = 3$,

(d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ w punkcie $x = 0$,

(e) $f(x) = [x]$ w punkcie $x = 3$.

4. Zbadać ciągłość funkcji

(a) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\Pi x}{2}\right) & |x| \leq 1 \\ |x - 1| & |x| > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} |\frac{\sin x}{x}| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - x - 6|}{x+2} & x \neq -2 \\ 5 & x = -2 \end{cases}$

5. Dobrać parametry a i b tak, aby podana funkcja była ciągła

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -2 \\ ax + b & -2 < x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & |x| < 2 \\ x\sqrt{x^2 - 4} & |x| \geq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & x < 0 \\ x + b & x \geq 0 \end{cases}$

6. Dobrać parametry a i b tak, aby

   (a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - ax - b) = 0$,

   (b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^3} - ax^2 - bx - c) = 0$.

7. Narysować wykres funkcji ciągłej na $[0,1]$ spełniającej warunek $f(0)f(1) < 0$ i takiej, że równanie $f(x) = 0$ ma

   (a) tylko 3 rozwiązania (b) tylko 2 rozwiązania (c) ∞ wiele rozwiązań

8. Uzasadnić,że poniższe równania posiadają rozwiązania w podanych przedziałach

   (a) $x^4 = 4^x,\ (-\infty, 0]$

   (b) $\ln x = 2 - x,\ [1, 2]$

   (c) $x^4 + x - 1 = 0,\ (0, \infty)$

9. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in [0,1]$ będące punktem stałym funkcji f, (tzn. $f(x_0) = x_0$).

10. Niech $f, g : [0,1] \to R$ będzie ciągłe oraz $f(0) < g(0)$ i $f(1) > g(1)$. Wykazać, że istnieje $x \in (0,1)$ taki, że $f(x) = g(x)$.