Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZESTAW I

Ciągi liczbowe.

1. Z definicji granicy ciągu udowodnij, że

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3,$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{3n^2+1} = 0.$

2. Zaznacz zdania prawdziwe, uzasadnij odpowiedź.

   (a) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ |\frac{1}{n^4} - 1| < \frac{1}{2},$ (c) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ \ln n > 999,$

   (b) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ |\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2}| < 0,01,$ (d) $\exists_N \ \forall_{n>N} \ \sqrt[n]{n} < \frac{1}{2},$

3. Pokać, że ciągi $a_n = \frac{n}{2^n}$ jest monotoniczny.

4. Jeżeli ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne, to ciąg $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\}.$$

5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n+1}},$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^3 + 2^3 + ... + n^3},$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sin(n^2)}{n + \cos(n)},$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos(n!)}{n^3}.$

6. Obliczyć granice ciągów

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n^2+3)}{3n^3+5},$ (n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^n}},$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\frac{1}{3}n+1)(n+2)}{(2n^2-4)(n+3)},$ (o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot (3^{n+1}-2)}{(5^{n+1}-1) \cdot 3^n},$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1 + 4 + 7 + ... + (3n-2)}{n^3+1},$ (p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+2}\right)^n,$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + ... - 2n}{\sqrt{n^2+1}}$ (r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n - 3n^2}{n(1 - 3n + \sqrt{n}}\right)^{\sqrt[4]{2n+1}},$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+2} + 5^n}{2^n + 5^{n+3}}$ (s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{\log_2(n)}}{8^{\log_2(n+1)}},$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right),$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n},$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+5} - n}{\sqrt{n^2+2} - n},$ (u) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+n} - n),$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^3+2n+1} \sin(5n!),$ (w) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n},$

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n + 9 \cdot 5^{n+1}},$ (x) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!},$

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + ... + n^2},$ Wskazówka: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+2} + n^2 + 3^{n+3}}{2^n + n + 3^n},$ (y) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 4} - \sqrt[3]{n^3+1}),$

(m) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 10}+...+\frac{4}{(4n-2)\cdot(4n+2)}\right)$, (z) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+4^n}}$.

7. Oblicz granice ciągów określonych rekurencyjnie:

   (a) $a_1=\frac{3}{2},\ a_{n+1}=\sqrt{3\cdot a_n-2}$, (b) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{a_n}{2}$,

   (c) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+1}=\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n},\ n\geq 2$.

8. Korzystając z twierdzenia Stolza obliczyć granice:

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}$,

9. Wskazać podciągi zbieżne

   (a) $a_n=sin(\frac{\Pi n}{5})$, (b) $a_n=3+2\cdot(-1)^n$,

   (c) $a_n=$ reszta z dzielenia n przez 3.

10. Udowodnić, że jeżeli $a_n\to 0$, to $\frac{1}{a_n}\to\infty$.

11. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem spełniającym warunek $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$. Pokazać, że jeżeli $q<1$, to $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym do zera.

12. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem spełniającym warunek $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q$. Pokazać, że jeżeli $q<1$, to $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym do zera.

13. Znajdź granice następujących ciągów

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$, (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

14. Podać przykłady ciągów które mają podane zbiory punktów skupienia

   (a) $\{1,2\}$, (b) $\{0,+\infty\}$.

15. Zbadać granice dolne i granice górne następujących ciągów

   (a) $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{2n}$,

   (b) $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{2n^2}\right)^{n^2}$, (d) $a_n=\sin(\frac{\pi n}{3})$,

   (c) $a_n=\left(1+\frac{r_2(n)}{n}\right)^n$, gdzie $r_3(n)=\begin{cases}0; & n=2k,\\ 1; & n=2k+1,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

16. Niech $i_1,i_2,i_3,...$ będzie ciągiem cyfr, tzn. $i_n\in\{0,1,2,...,9\}$. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$; $a_n=\frac{i_1}{10}+\frac{i_1}{10^2}+...+\frac{i_n}{10^n}$ spełnia warunek Cauchy'ego.