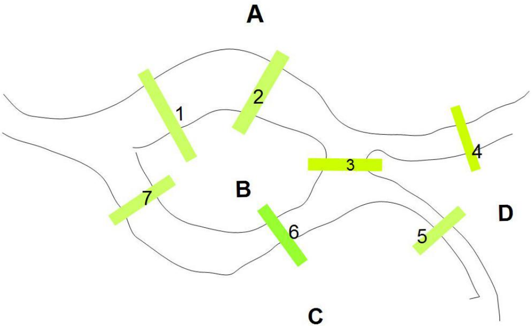
O TYM, JAK LEONHARD EULER SPACEROWAŁ PO MOSTACH W KRÓLEWCU I CO Z TEGO WYNIKŁO...

Bogusław Hajduk

Uniwersytet Warmińsko Mazurski

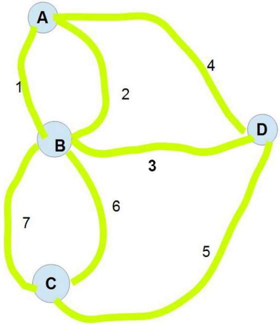
Olsztyn, 30.09.2015

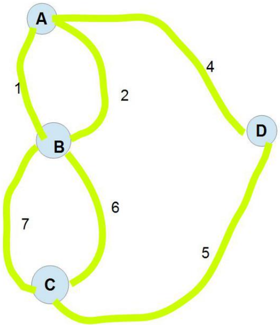
Leonhard Euler (1707 - 1783)

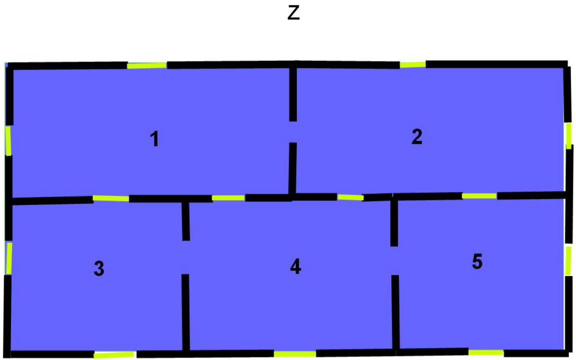

A
1
2
3
4
B
7
6
5
D
C

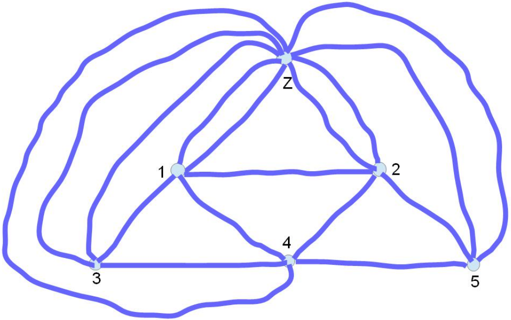
Problem

Czy można przejść wszystkie mosty przechodząc przez każdy tylko raz??


A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
7


A
B
C
D
1
2
4
5
6
7


Z
1
2
3
4
5


Z
1
2
4
3
5

CIĄG FIBONACCIEGO

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,.....

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Ciąg ilorazów $\frac{a_n}{a_{n+1}}$:

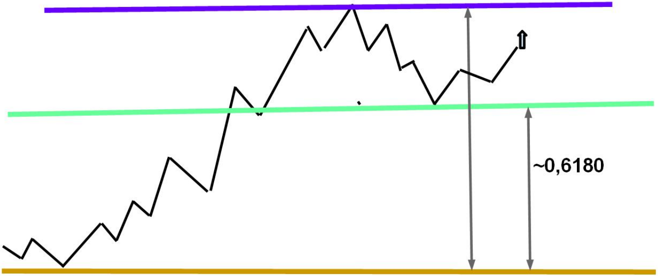
$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots$

$1;\ 0,5000;\ 0,6666;\ 0,6000;\ 0,6250;\ 0,6153;\ 0,6190;$
$0,6176;\ 0,6181;\ 0,6179;\ 0,6180;\ 0,6180;\ 0,6180; \dots$

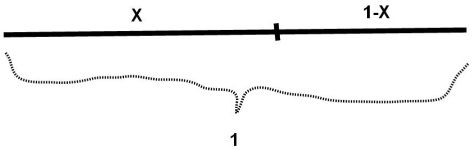
Twierdzenie. Granicą tego ciągu jest liczba $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Oznaczamy $g = lim\,\frac{a_n}{a_{n+1}}$, a ponieważ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$, to $\frac{1}{g} = 1 + g$, więc $g^2 + g - 1 = 0$.

Ponieważ $g > 0$, z równania powyższego otrzymamy $g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.


~0,6180

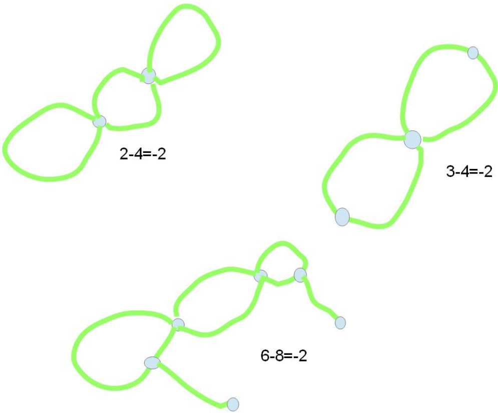
ZŁOTY PODZIAŁ ODCINKA

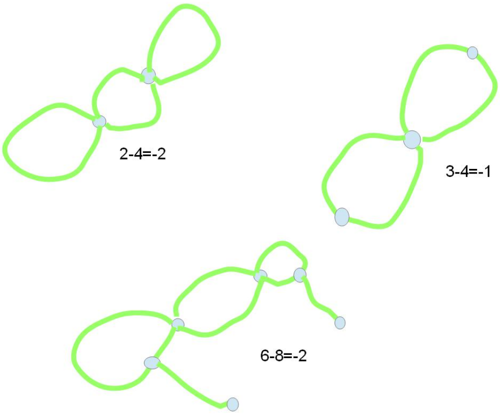


$$\frac{1}{X} = \frac{X}{1 - X}$$

$$X^2 = 1 - X$$

$$X = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$


2-4=-2
3-4=-2
6-8=-2

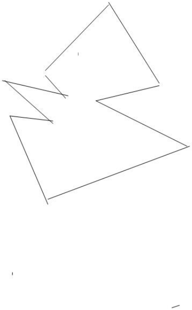

2-4=-2
3-4=-1
6-8=-2

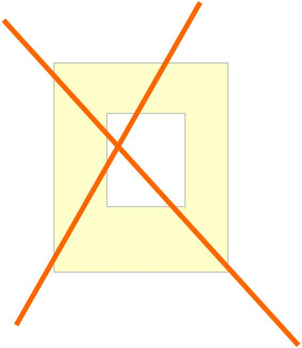
Definicja

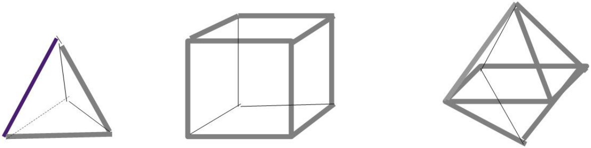
Powierzchnią wielościenną w $\mathbb{R}^3$ nazywa się podzbiór $\mathbb{R}^3$, który jest sumą skończonej liczby trójkątów i spełnia następujące warunki:

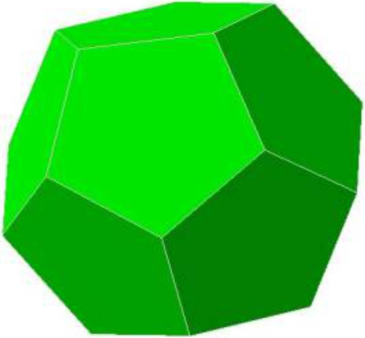
1. *część wspólna dowolnych dwóch różnych trójkątów jest albo pusta, albo wspólnym wierzchołkiem albo wspólną krawędzią;*
2. *każda krawędź należy do dokładnie dwóch trójkątów;*
3. *jeśli dwie krawędzie mają wspólny wierzchołek, to od jednej do drugiej można przejść ciągiem trójkątów takim, że dwa kolejne mają wspólną krawędź.*

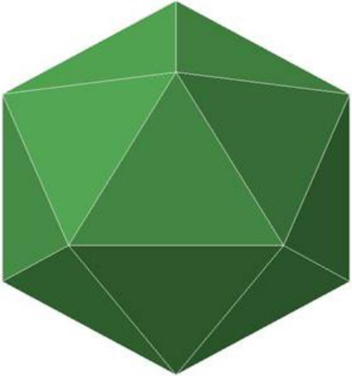
Dla naszych celów możemy zamiast trójkątów dopuścić wielokąty, bo i tak każdy wielokąt można podzielić na trójkąty!
ALE! ALE! CO TO JEST WIELOKĄT?
Jest to podzbiór (ograniczony) płaszczyzny ograniczony łamaną zwyczajną (bez samoprzecięć) zamkniętą.











Definicja

Charakterystyką Eulera powierzchni wielościennej Σ *nazywa się liczbę*

$$e(\Sigma) = W - K + Ś,$$

gdzie W *= liczba wierzchołków,* K *= liczba krawędzi,* $Ś$ *= liczba ścian dwuwymiarowych (wielokątów) dowolnie wybranej triangulacji powierzchni* Σ*.*

Fakt. Definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru triangulacji (dopuszczone są też ściany wielokątne).

Powierzchnie platońskie

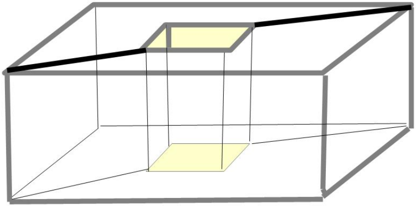
Ś	W	K	e=W-K+Ś
4	4	6	2
6	8	12	2
8	6	12	2
12	20	30	2
20	12	30	2

Powierzchnię nazywa się wypukłą, jeśli dla każdej ściany leży po jednej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez ścianę.

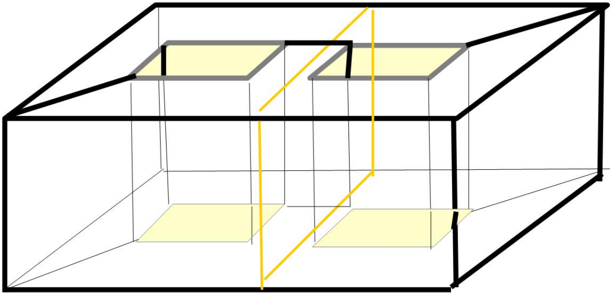
Fakt. Charakterystyka Eulera powierzchni wypukłej jest równa 2.

Dowód. Charakterystyka wielokąta jest równa 1. Powierzchnię wypukłą można zrzutować na dowolnie wybraną ścianę tak, że pozstałe ściany dają podział wybranej ściany na wielokąty. Wynika z tego, że charakterystyka takiej powierzchni jest dwukrotnie większa od charakterystyki wielokąta, a więc wynosi 2.

Powierzchnie inne niż wypukłe: torus ('precel' rodzaju 1)



Torus ('precel') rodzaju 2



Oznaczmy przez T_k torus rodzaju k.

Fakt.

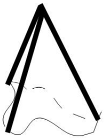
1. $e(T_1) = 0$.
2. $e(T_k) = 2 - 2k$.

1 wylicza się bezpośrednio. Wychodząc z tego, indukcyjnie sprawdza się, że

$$e(T_k) = e(T_{k-1}) + e(T_1) - 2 = e(T_{k-1}) - 2.$$

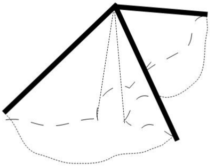
Zakrzywienie w wierzchołku

dodatnie



suma kątów $< 360^0$

ujemne



suma kątów $> 360^0$

Definicja

Defektem wierzchołka nazywa się liczbę $2\pi -$ *suma miar kątów w tym wierzchołku.*

Twierdzenie

Wzór Gaussa - Bonneta. Suma defektów w wierzchołkach powierzchni Σ *jest równa* $2\pi e(\Sigma)$.

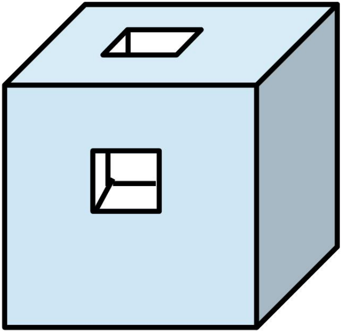
Dowód. Możemy założyć, że ściany są trójkątne. Wtedy suma wszystkich kątów równa jest Śπ. Mamy też równość 3Ś = 2K, więc Ś - K = -$\frac{1}{2}$ Ś. Suma defektów równa jest 2Wπ - Śπ = 2π(W - $\frac{1}{2}$ Ś) = 2π e(Σ).

Przykłady.

Suma defektów torusa rodzaju 1 = $8(\frac{\pi}{2})$ - $8(\frac{\pi}{2})$ = 0.

Suma defektów torusa rodzaju 2 = $8(\frac{\pi}{2})$ - $16(\frac{\pi}{2})$ = -4π.

Jakie są: suma defektów oraz charakterystyka Eulera powierzchni



Wniosek. Jeśli $e(\Sigma)<0$, to przynajmniej w jednym wierzchołku jest ujemne zakrzywienie (czyli ujemny defekt).

Klasyczna wersja gładka wzoru G-B zachodzi dla gładkiej powierzchni w $\mathbb{R}^3$. Określa się krzywiznę (Gaussa) w każdym punkcie i całka z krzywizny równa się $2\pi e(\Sigma)$.