

Liczby zespolone

1. Wykonać następujące działania:

- | | |
|---|--|
| (a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$ | (g) $(3 + 7i)(-2 + i) + (-5 - 2i)(-1 + 7i)$ |
| (b) $(4 - 8i) + (5 - 3i)$ | (h) $(1 + i)(1 - i)(-1 + i)(-1 - i)$ |
| (c) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$ | (i) $\frac{2+3i}{1+i}$ |
| (d) $(\sqrt{3} - 2i) - (3 - \sqrt{2}i)$ | (j) $\frac{3+2i}{4+5i}$ |
| (e) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$ | (k) $\frac{(5-2i)(8+i)-(12-13i)(6+7i)}{(1-2i)^2+(1+2i)^2}$ |
| (f) $(\sqrt{5} - \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}i)$ | (l) $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$. |

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie $z^2 - 4z + 13 = 0$.

3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie $z^2 = i$.

4. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| (a) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$, | (b) $5\bar{z} - 4z = 1 - 3i$. |
|-------------------------------|--------------------------------|

5. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie:

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| (a) $z^2 - 5\bar{z} = 0$, | (b) $z^2 = 4\bar{z}$. |
|----------------------------|------------------------|

6. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór tych liczb z , które spełniają warunek

- | | |
|---------------------------|---|
| (a) $Re(z + 4) = 2$, | (e) $Rez - 3Imz = 2$, |
| (b) $Im(2z - 3i) = 7$, | (f) $\frac{4}{z} = \bar{z}$, |
| (c) $Re(iz + 2) \geq 0$, | (g) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 5 - 3i$, |
| (d) $Imz^2 < 0$, | (h) $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$. |

7. Obliczyć moduły następujących liczb zespolonych:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|---|
| (a) $5 - 12i$ | (c) $(1 + 2i)(3 - 4i)$ | (e) $(1 + \sqrt{2}i)^4$ |
| (b) $\sqrt{7} + \sqrt{29}i$ | (d) $\frac{4+i}{3+2i}$ | (f) $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$. |

8. Wyznaczyć argumenty główne następujących liczb zespolonych:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ z = 2 & \text{(c)} \ z = -4 & \text{(e)} \ z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \\ \text{(b)} \ z = i & \text{(d)} \ z = 1 + i & \end{array}$$

9. Zapisać dane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ z = \sqrt{3} + i & \text{(c)} \ z = -\sqrt{3} - i & \text{(e)} \ z = -3 - 3i. \\ \text{(b)} \ z = -\sqrt{3} + i & \text{(d)} \ z = \sqrt{3} - i & \end{array}$$

10. Obliczyć, podając wynik w postaci algebraicznej:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ (\sqrt{3} - i)^{32}, & \text{(c)} \ \frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}, \\ \text{(b)} \ \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}, & \text{(d)} \ \frac{(1+i)^{100}(i-\sqrt{3})^{200}}{(1+i\sqrt{3})^2}. \end{array}$$

11. Wyznaczyć $\sqrt[2]{1 + \sqrt{3}i}$, tzn. zbiór wszystkich pierwiastków zespolonych drugiego liczby $z = 1 + \sqrt{3}i$.

12. Wyznaczyć

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ \sqrt[3]{-27i}, & \text{(b)} \ \sqrt[4]{(1+2i)^8}, & \text{(c)} \ \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}. \end{array}$$

13. Rozwiązać równanie

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ z^4 = (3 - 2i)^8, & \text{(b)} \ z^3 = (1 - 3i)^6, & \text{(c)} \ z^8 = (1 + i)^8. \end{array}$$

14. Rozwiązać równanie $\bar{z}z^4 = -32$.

15. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $\frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi$.

16. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $\frac{3\pi}{2} < \arg(z^3) < 2\pi$.

17. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $\operatorname{Im}(z^3) > \operatorname{Re}(z^3)$.

18. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których $|z^3| \leq 2$ oraz $0 \leq \arg(z^3) \leq \frac{\pi}{4}$.

19. Narysować zbiór tych liczb zespolonych z , które spełniają następujący warunek:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ |z| = 4 & \text{(c)} \ 2 < |z + 2 - i| \leq 3 \\ \text{(b)} \ |z + i| = 3 & \text{(d)} \ |z + 5| = |z - 3i|. \end{array}$$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0