Zadania z analizy matematycznej
kierunek: Informatyka, specjalność: ISI
I rok SI°– inż., grupy: 1, 2, 3 ; rok akademicki 2019/2020

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej. Granica funkcji

1. W oparciu o definicję Heinego granicy funkcji wykazać, że

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$,
   (b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x+2} = 4$,
   (c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-27} = \frac{1}{27}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^4-16} = \frac{1}{32}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = 4$.

2. Wykazać, że nie istnieją następujące granice:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to 2} \cos\frac{1}{x-2}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to 3} [x]$,
   (h) $\lim\limits_{x\to -1} [x]$.

3. Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji wykazać, że

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3x+1} = +\infty$,
   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{7-5x^3} = 0$,
   (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2+x}) = 2$,
   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{9x^2+5x} - \sqrt{9x^2+2x}) = -\frac{1}{2}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{4x^2-x} - 2x) = -\frac{1}{4}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{100x^2-15x} - 10x) = -\frac{3}{4}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}} \frac{1}{(1-5x)^2} = +\infty$,
   (h) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{-3}{(x+7)^6} = -\infty$.

4. Obliczyć następujące granice funkcji:

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{10x-3}{1+9x}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4-3x^3-2x+1}{1+6x^4}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+8}{(4-x)(2x+3)(x-2)}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{(1+x)(5x+1)(3-x)}{2x^3+9x^2+6}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x})$,
   (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1})$,
   (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x+2} - x - 1)$,
   (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+9x^2+5x+1} - x + 2)$,
   (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7-x^4}{5+x}$,
   (j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{10+x-x^7}{11+2x+x^2}$.

5. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją następujące granice:

   (a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{|x-5|^3}{x^3-5x^2}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^5+6x^4}{|x+3|^5}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3-5x^2}{|x-5|^3}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{|x+3|^5}{2x^5+6x^4}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{x-2}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to -6} \frac{x-6}{x+6}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} x[x]$,
   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$,
   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x(1-x^2))$.

6. Wykazać, że nie istnieją granice:

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x$,
   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin 5x$,
   (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \cos x^3$,
   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x^2$.

7. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$,
(b) $\lim\limits_{x\to -11} \frac{x^2+10x-11}{x^3+13x^2+22x}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x^{12}-1}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-6x-7}{x^3+x^2-56x}$,
(e) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+x-12}{x^3-x^2-20x}$,
(f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$,
(g) $\lim\limits_{x\to 12} \frac{x^2-5x-84}{x^3-14x^2+24x}$,
(h) $\lim\limits_{x\to -8} \frac{3x^2+28x+32}{3x^3+28x^2+32x}$,
(i) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{4x^2+25x-21}{5x^3+33x^2-14x}$.

8. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+8}+2x}$,
(b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x+4}-2}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$,
(d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt[3]{x+11}-2}{\sqrt{x+12}-\sqrt{-3x}}$,
(e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^3+19}-3}$,
(f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{x}-1}$,
(g) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2\sqrt{-x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x}+1}$,
(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+4}-x)$,
(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$,
(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$.

9. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)+5\mathrm{tg}(\pi x)}{3-4x-x^3}$,
(b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2+x-3x^3}{\sin(\frac{\pi}{4}x)-5\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}x)}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{7x}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 125x}{\sin 25x}$,
(e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sin(4-x)}{\sin(5x-20)}$,
(f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \frac{\sin^2(4x-1)}{4x-1}$,
(g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\mathrm{tg}(x^3-1)}{x^3-1}$,
(h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$,
(i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x-\frac{\pi}{2})}{\pi-4x}$,
(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(\frac{5\pi}{6}-2x)-1}{(\pi-6x)^2}$,
(k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(\frac{7\pi}{12}-x)-1}{\pi-4x}$,
(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)-\mathrm{tg}^2(3x)}{x^4}$.

10. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{6x}-1}{e^x-1}$,
(b) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}-x}}{\cos(3x)+\cos(5x)}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(e^{3x}-1)^2}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{2\mathrm{arctg}(x)}$,
(f) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}} \frac{\ln(\mathrm{tg}(\frac{11\pi}{12}-x))}{\cos(\frac{11\pi}{6}-2x)}$,
(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^{7x}$,
(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$,
(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$,
(j) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\mathrm{tg}(\frac{\pi x}{6})}$,
(k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$,
(l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{12x+7}{13x+1}\right)^{\cos^2(x)}$,
(m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{11x+1}{9x+2}\right)^{\frac{2}{x^2+1}}$,
(n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\mathrm{tg}(x)+1)}{\sin 4x}$.

11. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach,wykazać, że

(a) $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\sin\frac{1}{x-2} = 0$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} = 0$,
(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4[x]}{2x+1} = 2$,
(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(3^x+1)}{\ln(4^x+1)} = \log_4 3$,
(e) $\lim\limits_{x\to 7} (x-7)^2[x] = 0$,
(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{[3e^x]+2}{[2e^x]+1} = \frac{3}{2}$.

12. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach wykazać, że

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2x-\sin x} = +\infty$,
(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2\sin x - x) = -\infty$.

13. W oparciu o definicję Heinego, zbadać ciągłość funkcji f w punkcie x_0, jeśli

(a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x-\sin x}{x} & \text{gdy } x\neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x=0 \end{cases}$, $x_0=0$ (b) $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{gdy } x\leq 3 \\ x^2 & \text{gdy } x>3 \end{cases}$, $x_0=3$.

14. Zbadać ciągłość funkcji f; określić rodzaj punktów nieciągłości:

(a) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & \text{gdy } x\leq 1 \\ 6-5x & \text{gdy } 1<x<3 \\ x-3 & \text{gdy } x\geq 3 \end{cases}$,

(b) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 5x}{x} & \text{gdy } x\neq 0 \\ 1 & \text{gdy } x=0 \end{cases}$,

(c) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(2x-1)}{3-6x} & \text{gdy } x\neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \text{gdy } x=\frac{1}{2} \end{cases}$,

(d) $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{gdy } x\neq 0 \\ 1 & \text{gdy } x=0 \end{cases}$,

(e) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x-1} & \text{gdy } x>1 \\ x+1 & \text{gdy } x\leq 1 \end{cases}$,

(f) $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^{x-1} & \text{gdy } x\leq 1 \\ x+3 & \text{gdy } x>1 \end{cases}$,

(g) $f(x)=x-[x]$,

(h) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-x^2}{|x-1|} & \text{gdy } x\neq 1 \\ 1 & \text{gdy } x=1 \end{cases}$.

15. Dla jakich wartości parametrów $a,b\in R$ funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli

(a) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin[(8a^4+1)x]}{(2a^4+1)x} & \text{gdy } x\neq 0 \\ 1 & \text{gdy } x=0 \end{cases}$, $x_0=0$,

(b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}+a & \text{gdy } x\leq 0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{gdy } x>0 \end{cases}$, $x_0=0$,

(c) $f(x)=\begin{cases} x & \text{gdy } |x|\leq 1 \\ x^2+ax+b & \text{gdy } |x|>1 \end{cases}$, $x_0\in\{1,-1\}$,

(d) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{gdy } x<1 \\ \log_a x & \text{gdy } 1\leq x\leq 4 \\ \frac{\pi}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}} & \text{gdy } x>4 \end{cases}$.

16. Dana jest funkcja $f: R\setminus\{0\}\to R$ określona wzorem $f(x)=\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$. Czy można funkcję f określić w punkcie $x=0$ tak, aby stała się ciągła w R?

17. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{x}{\sqrt{16-x}-4}$. Czy można funkcję f określić w punkcie $x=0$ tak, aby stała się ciągła w zbiorze $(-\infty,16]$?

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\; a>0$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ a>0,\ a\neq 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tgh}x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a,\ a\in R$
$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a,\ a\in R$	$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\ldots+b_1x+b_0}=$ $a_k\neq 0,\ b_l\neq 0$	$\begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & gdy\ \ k=l \\ 0 & gdy\ \ k<l \\ +\infty & gdy\ \ k>l,\ \frac{a_k}{b_l}>0 \\ -\infty & gdy\ \ k>l,\ \frac{a_k}{b_l}<0 \end{cases}$