**Zadania z analizy matematycznej**
**kierunek: Informatyka, specjalność: ISI**
**I rok SI°– inż., grupy: 1, 2, 3 ; rok akademicki 2019/2020**

---

# *Ciągi i szeregi nieskończone*

1. Znaleźć pięć początkowych wyrazów ciągu $(a_n)_{n\in N}$, którego wyraz ogólny dany jest wzorem:
a) $a_n = \frac{n+1}{n+4}$, b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$, c) $a_n = \frac{5n-3}{2^n}$, d) $a_n = \frac{n!+1}{n^2+2n}$.

2. W oparciu o wartości kilku początkowych wyrazów ciągu $(a_n)_{n\in N}$, podać jedną z możliwych postaci jego wyrazu ogólnego:
(a) $-1, 4, 9, 14,$ (b) $3, -6\sqrt{2}, 24, -48\sqrt{2},$ (c) $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{6}{10}, \frac{24}{13}, \frac{120}{16},$
(d) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4},$ (e) $0.5, 0.55, 0.555, 0.5555.$

3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n$. Podać wzory, określające wskazane wyrazy tego ciągu, jeśli
(a) $a_n = \sqrt[n]{n+1},\ a_{10},$ (b) $a_n = (n!)^{n+1},\ a_5,$ (c) $a_n = \frac{n^n}{n!},\ a_7,$
(d) $a_n = 4^n + 4^{n+1} + \ldots + 4^{2n},\ a_3,$ (e) $a_n = (-n)^n,\ a_4,$ (f) $a_n = \dfrac{\binom{n+2}{n} + \binom{n+1}{n}}{\binom{n+1}{n-1}},\ a_5.$

4. W oparciu o definicje granicy właściwej i granic niewłaściwych, uzasadnić, że:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} = 2,$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-1) = +\infty,$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-n^2) = -\infty.$

5. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli

(a) $a_n = \frac{-4n^2+5n-7}{2n^2+6n-1},$
(b) $a_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{2n+5},$
(c) $a_n = \frac{(3n-1)(n+4)}{(2n+5)(4n-3)},$
(d) $a_n = \frac{n^3-3n^2+7}{(\frac{1}{2}n+1)^3},$
(e) $a_n = \frac{(2n^2+3)^2}{n^4-9},$
(f) $a_n = (\frac{1-3n}{5-2n})^2,$
(g) $a_n = \sqrt{\frac{(2+7n)^2}{(1-3n)^2}},$
(h) $a_n = \frac{5\cdot 8^n+1}{3\cdot 8^n-4},$
(i) $a_n = \frac{1-2\cdot 7^n}{7^{n+1}+3},$
(j) $a_n = \frac{2\cdot 6^n+2\cdot 4^n}{7\cdot 4^n+6^{n+1}},$
(k) $a_n = \frac{5n-n^2+7}{1-6n},$
(l) $a_n = \frac{27-n^3}{2n+n^4},$
(m) $a_n = \frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2},$
(n) $a_n = \frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4},$
(o) $a_n = \frac{(3n+2)^2-(2n-1)^3}{3n^3+(2n+1)^2},$
(p) $a_n = \frac{(n+2)(4n-3)(7-10n)}{5n^3}.$

6. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli

(a) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+4}}{3n},$
(b) $a_n = \frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{6n^6+5}-n},$
(c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n^6+1}-3n^2}{n-\sqrt{5n^4-1}},$
(d) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n},$
(e) $a_n = n - \sqrt{n^2+7n+1},$
(f) $a_n = \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n},$
(g) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-2}),$
(h) $a_n = \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}).$

7. Korzystając z definicji liczby $e$ oraz twierdzenia o granicy podciągu, obliczyć granice następujących ciągów:

(a) $a_n = \left(1+\frac{6}{n}\right)^n,$
(b) $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n,$
(c) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$
(d) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$
(e) $a_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^{n+2},$
(f) $a_n = \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n,$
(g) $a_n = \left(\frac{3n+7}{3n+1}\right)^{n-2},$
(h) $a_n = \left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3},$
(i) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2},$
(j) $a_n = \left(\frac{n+9}{n}\right)^{n+2},$
(k) $a_n = \left(\frac{n^3+2}{n^3-2}\right)^{3n-n^3},$
(l) $a_n = \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1},$
(m) $a_n = \left(1+\frac{1}{6n^2+5}\right)^n.$

8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, wyznaczyć granicę ciągu $(a_n)_{n\in N}$:

(a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n}$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{5n + \sin n}$,

(c) $a_n = \frac{\cos n}{n}$,

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} + 6n}$,

(e) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}}$,

(f) $a_n = n(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n})$,

(g) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n \cdot 2^n}$,

(h) $a_n = 2n(\sqrt{n^2+1} - n)$,

(i) $a_n = \sqrt[n]{5^n + (-1)^n}$,

(j) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+\cos(n!)}{n^2}}$.

9. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n\in N}$ nie ma granicy

(a) $a_n = (-1)^n$,

(b) $a_n = n^{(-1)^n+1}$,

(c) $a_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$,

(d) $a_n = n[1 - (-1)^n]$,

(e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n}$,

(f) $a_n = (1 + (-1)^n) + \frac{n}{n+5}$.

10. *Jeśli* $\forall_{n\in N}, a_n > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
*Jeśli* $\forall_{n\in N}, a_n > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 1$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Korzystając z powyższych stwierdzeń, oblicz granicę ciągu $(a_n)_{n\in N}$:

(a) $a_n = \frac{3^n}{n!}$,

(b) $a_n = \frac{10^n}{n^6}$,

(c) $a_n = \frac{n^2}{a^n}$, $a > 1$,

(d) $a_n = \frac{a^n}{n}$, $a > 1$,

(e) $a_n = \frac{n+n^2}{5^n+10^n}$.

11. *Jeśli* $\forall_{n\in N}, a_n > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.
Korzystając z powyższego stwierdzenia, obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli
a) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ , b) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

12. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, wykazać zbieżność ciągu $(a_n)_{n\in N}$:
a) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, b) $a_n = \frac{n^3}{10^n}$, c) $a_n = \frac{n^2}{4^{n+1}}$.
Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

13. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

(a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \in N$,

(b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in N$,

(c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{1}{n}}$, $n \in N$.

14. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli

(a) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n-n^2+3}$,

(b) $a_n = \frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}$,

(c) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$,

(d) $a_n = \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(e) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)}$,

(f) $a_n = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

15. Podać definicje ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i sumy tego szeregu. Wyznaczyć ciąg sum częściowych danego poniżej szeregu i zbadać jego zbieżność, jeśli:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n,\ |q| < 1$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{6^n}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{8^n}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+5^n}{10^n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n+1]{2} - \sqrt[n]{2})$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n+2]{5} - \sqrt[n+3]{5})$.

16. Wyznaczyć szereg i jego sumę, jeśli ciąg $(S_n)_{n\in N}$ sum częściowych tego szeregu określony jest wzorem:
a) $S_n = \frac{n+2}{n}$, b) $S_n = \frac{2^n-1}{2^n}$, c) $S_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

17. Przedstawić w postaci ułamka zwykłego liczbę o następującym zapisie dziesiętnym:
a) $0,3(5)$, b) $4,(123)$, c) $10,1(25)$.

18. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\in N}$. Znaleźć szereg, dla którego $(a_n)_{n\in N}$ jest ciągiem sum częściowych.

19. Dane są następujące szeregi rozbieżne: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n+1}{2n^2+3}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1})$. Rozbieżność którego spośród danych szeregów można uzasadnić w oparciu o warunek konieczny zbieżności szeregu?

20. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność następujących szeregów:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n^2+2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln\frac{n^4+1}{n^4}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

21. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\pi^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

22. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{10^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^5}{3^n+4^n}$.

23. Zbadać zbieżność poniższych szeregów. W przypadku szeregów zbieżnych, ustalić czy szeregi te są zbieżne bezwzględnie, czy zbieżne warunkowo.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$,

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$,

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n$.

---

24. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 4^n}{3^n}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{(2n+\frac{1}{n})^n}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^4-2}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$,

(k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!}{(2n-2)!}$,

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7+(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$,

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n^3}$,

(n) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$,

(o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

(p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$,

(q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{3^n}$,

(r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+(-1)^n)}{4^n}$,

(s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$,

(t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2 \sin\frac{1}{n}}{n^{2n-1}}$,

(u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$,

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{2^n}$,

(w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$,

(x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

25. Wykazać, że jeśli $a > 1$ i $p \in Z$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$.

26. Zbadać zbieżność ciągu $(a_n)_{n\in N}$, gdzie $a_n = \frac{\sin 1}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2}{2\cdot 3} + \frac{\sin 6}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{\sin n!}{n(n+1)}$.

27. Zbadać ograniczoność ciągu $(a_n)_{n\in N}$, gdzie $a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{6}{8} + \ldots + \frac{n!}{2^n}$.

28. Obliczyć $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

29. W oparciu o kryteria zbieżności szeregów sprawdzić, czy:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n\right) = 0$.

30. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz $0 \le b_n \le M < +\infty$ dla $n \in N$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

31. Wykazać, że jeśli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$ są zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

32. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

33. Czy jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest również zbieżny?