

Zestaw 1

1. Określić rodzaj nieciągłości funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.
2. Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{6-x} = -\frac{1}{6}.$$

3. Obliczyć, o ile istnieje, granicę funkcji f w x_0 , jeśli

(a) $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(4 - x^2)$, $x_0 = 2$

(b) $f(x) = \frac{4 \ln(1 + \frac{1}{x})}{x-1}$, $x_0 = +\infty$.

(c) $f(x) = \frac{x-3\sqrt{x^3+4}-1}{4x\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+1}}$, $x_0 = +\infty$.

Zestaw 2

1. Zbadać ciągłość funkcji f , określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+12}-3}{x+3} & \text{dla } x \in (-8, -3) \cup (-3, 9) \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = -3 \end{cases}.$$

2. Korzystając z definicji granicy funkcji w $-\infty$, wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}) = 3.$$

3. Korzystając ze znajomości standardowych granic oraz z twierdzeń neodwołujących się do rachunku różniczkowego, obliczyć:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 5}{x^3 - 5} \right)^{4x^3 - 1}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)^2}{\operatorname{tg}(x-3)}$.

Zestaw 3

1. Dla jakich parametrów a i b funkcja f , określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) \sin \frac{1}{x-2} & \text{dla } x < 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \\ b \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases},$$

jest ciągła w zbiorze R .

2. Korzystając z definicji granicy funkcji w $+\infty$, wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - x^2} - 2x) = -\frac{1}{12}.$$

3. Korzystając ze znajomości standardowych granic oraz z twierdzeń neodwołujących się do rachunku różniczkowego, wyznaczyć granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 , jeśli:

(a) $f(x) = \frac{3x^4 + 27x^3 + 24x^2}{2x^2 - 12x - 14}$, $x_0 = -1$,

(b) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{e^{x-1} - e}$, $x_0 = 2$.

(c) $f(x) = \sin \frac{1}{x-6}$, $x_0 = 6$.
