

Test aw 2. Zad. 7e)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^3 - x^2 - 20x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x^2-5x)} = \frac{-4-3}{(-4)^2-5(-4)} = \frac{-7}{36}$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + x - 12) = (-4)^2 + (-4) - 12 = 0; \lim_{x \rightarrow -4} (x^3 - x^2 - 20x) = (-4)^3 - (-4)^2 - 20(-4) = 0$$

(1) rozkład wielomianu  $x^2 + x - 12$  :  
(uwzględnijmy wyznacznik liniowy  $(x+4)$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 1^2 - 4(-12) = 49 \\ x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3 \\ x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) \end{array} \right.$$

(2) rozkład wielomianu  $x^3 - x^2 - 20x$  :  
 $x^3 - x^2 - 20x = (x+4)(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -20 & 0 \\ & & -4 & 20 & 0 \\ \hline -4 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ & a & b & c & \end{array} \quad (\text{schemat Hornera})$$

Test aw 2. Zad. 8e)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^3+19} - 3} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x}) \cdot \frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}}{(\sqrt[3]{x^3+19} - 3) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{x^3+19} + 3^2}{(\sqrt[3]{x^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{x^3+19} + 3^2}} =$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x}) = \sqrt{3 \cdot 2 - 2} - \sqrt{2 \cdot 2} = 0; \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x^3+19} - 3) = \sqrt[3]{2^3+19} - 3 = 0$$

(2) mnożenie licznika i mianownika przez 1 - w szczególnej postaci, pozwalającej na zastosowanie wzoru skróconego mnożenia  
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  (licznik) oraz wzoru  $(c-d)(c^2 + cd + d^2) = c^3 - d^3$  (mianownik)  
 $a = \sqrt{3x-2}, b = \sqrt{2x}, c = \sqrt[3]{x^3+19}, d = 3$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-2-2x) \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}}{(x^3+19-3^3) \frac{1}{(\sqrt[3]{x^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{x^3+19} + 3^2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}}{(x^3-8) \frac{1}{(\sqrt[3]{x^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{x^3+19} + 3^2}} \quad (3)$$

$$(3) \quad x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}}{(x-2)(x^2 + 2x + 4) \frac{1}{(\sqrt[3]{x^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{x^3+19} + 3^2}} = \frac{(\sqrt[3]{2^3+19})^2 + 3\sqrt[3]{2^3+19} + 3^2}{(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt{2 \cdot 2})} = \frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 4(2+2)} = \frac{9}{16}$$

Test aw 2. Zad. 8j)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}\right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{3x-2}{x}} + \sqrt[3]{\frac{2x-3}{x^{\frac{3}{2}}}}\right)} \stackrel{(3)}{=} \frac{2+0+0}{\sqrt{3-0} + \sqrt[3]{0-0}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(2 + 3x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(2 + \frac{3}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{5}{x^{\frac{9}{10}}}\right) = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{2x-3}}{\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}}\right)$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}$$

(\*) - wyłączenie potęgi  $x$  o największym wykładniku; tutaj  $x^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{x})$

$$(3) \quad \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{\sqrt[10]{x^3}} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0, \quad \frac{3}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{3}{\sqrt[6]{x}} \rightarrow 0$$