Zestaw 2. Zad. 5b)

$$\lim_{x\to -3^+} \underbrace{\frac{2x^5+6x^4}{|x+3|^5}}_{f(x)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^4(x+3)}{|x+3|\,|x+3|^4} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^4\cancel{(x+3)}^{1}}{\cancel{(x+3)}_{1}|x+3|^4} \overset{(2)}{=} \frac{2\cdot(-3)^4}{0^+} \overset{(3)}{=} +\infty$$

(1) $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{dla } x+3<0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x\geq -3 \\ -(x+3) & \text{dla } x<-3 \end{cases}$

$x\to -3^+ \iff (x\to -3) \wedge (x>-3) \implies |x+3| = x+3$

(2) $x\to -3^+ \implies |x+3|^4 \to 0^+$ (tzn. $|x+3|^4 \to 0$ oraz $|x+3|^4>0$)

(3) wynik operacji algebraicznej na granicach w $\overline{R} = R\cup\{-\infty,+\infty\}$

$$\frac{162}{0^+} = 162\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{2x^5+6x^4}{|x+3|^5} \overset{(2')}{=} \lim_{x\to -3} \frac{2x^4(x+3)}{-(x+3)|x+3|^4} = \frac{2\cdot(-3)^4}{(-1)\cdot 0^+} \overset{(4)}{=} -\infty$$

(4) operacje algebraiczne w $\overline{R}$: $\frac{-162}{0^+} = -\infty$

(2') $x\to -3^- \implies (x\to -3)\wedge(x<-3) \implies |x+3| = -(x+3)$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim_{x\to -3^-} f(x) \implies \lim_{x\to -3} f(x)$ nie istnieje

Zestaw 2. Zad. 6b)

$\lim_{x\to +\infty} \sin 5x$ nie istnieje $\leftarrow$ do wykazania

Konstruujemy dwa ciągi: $(x_n)_{n\in N}$, $(x_n')_{n\in N}$ takie, że

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = +\infty$, oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$,

gdzie $f(x) = \sin 5x$

Wybieramy $(x_n)_{n\in N}$ oraz $(x_n')_{n\in N}$ w taki sposób, aby odpowiadające im ciągi wartości funkcji f (tzn. $(f(x_n))_{n\in N}$, $(f(x_n'))_{n\in N}$) były ciągami stałymi – jest to możliwe wobec okresowości f.

- Wskażemy x_n w taki sposób, aby $f(x_n)=1$. Zatem, oczekujemy, iż
$f(x_n) = 1 = \underline{\sin 5x_n} \overset{(1)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin 5\,\frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{5} = \underline{\sin 5\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}n\pi\right)}$

(1) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(x) = \sin(x+2n\pi)$ dla dowolnego $n\in N$

Przyjmujemy $x_n = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}n\cdot\pi$; ponieważ $\frac{2}{5}\pi>0$, więc $\frac{2}{5}n\pi \to +\infty$, skąd wynika również, że $x_n \to +\infty$ ($\frac{\pi}{10}+\infty = +\infty$ w $\overline{R}$)

- Wskażemy x_n' w taki sposób, aby $f(x_n')=0$. Spełnimy, zatem, następujące warunki
$f(x_n') = 0 = \underline{\sin 5x_n'} \overset{(2)}{=} \sin(0+2n\pi) = \underline{\sin 5\left(\frac{2n\pi}{5}\right)}$

(2) $\sin 0 = 0 \wedge \sin x = \sin(x+2n\pi)$, $n\in N$

Stąd, $x_n' = \frac{2}{5}n\pi$; oczywiście $x_n' \to +\infty$.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, więc,

wobec $1\neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nie istnieje.

Zestaw 2. Zad. 5b)

$$\lim_{x\to -3^+} \underbrace{\frac{2x^5+6x^4}{|x+3|^5}}_{f(x)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^4(x+3)}{|x+3|\,|x+3|^4} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^4\cancel{(x+3)}^{1}}{\cancel{(x+3)}_{1}|x+3|^4} \overset{(2)}{=} \frac{2\cdot(-3)^4}{0^+} \overset{(3)}{=} +\infty$$

(1) $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{dla } x+3<0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{dla } x<-3 \end{cases}$

$x \to -3^+ \iff (x\to -3) \wedge (x > -3) \implies |x+3| = x+3$

(2) $x\to -3^+ \implies |x+3|^4 \to 0^+$ (tzn. $|x+3|^4 \to 0$ oraz $|x+3|^4 > 0$)

(3) wynik operacji algebraicznej na granicach w $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\frac{162}{0^+} = 162\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{2x^5+6x^4}{|x+3|^5} \overset{(2')}{=} \lim_{x\to -3} \frac{2x^4(x+3)}{-(x+3)|x+3|^4} = \frac{2\cdot(-3)^4}{(-1)\cdot 0^+} \overset{(4)}{=} -\infty$$

(4) operacje algebraiczne w $\overline{R}$: $\frac{-162}{0^+} = -\infty$

(2') $x\to -3^- \implies (x\to -3) \wedge (x<-3) \implies |x+3| = -(x+3)$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim_{x\to -3^-} f(x) \implies \lim_{x\to -3} f(x)$ nie istnieje

Zestaw 2. Zad. 6b)

$\lim_{x\to +\infty} \sin 5x$ nie istnieje $\leftarrow$ do wykazania

Konstruujemy dwa ciągi: $(x_n)_{n\in N}$, $(x_n')_{n\in N}$ takie, że

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = +\infty$, oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$,

gdzie $f(x) = \sin 5x$

Wybierzemy $(x_n)_{n\in N}$ oraz $(x_n')_{n\in N}$ w taki sposób, aby odpowiadające im ciągi wartości funkcji f (tzn. $(f(x_n))_{n\in N}$, $(f(x_n'))_{n\in N}$) były ciągami stałymi – jest to możliwe wobec okresowości f.

- Wskażemy x_n w taki sposób, aby $f(x_n) = 1$. Zatem, oczekujemy, iż

$$f(x_n) = 1 = \sin 5x_n \overset{(1)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin 5\,\frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{5} = \sin 5\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}n\pi\right)$$

(1) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(x) = \sin(x+2n\pi)$ dla dowolnego $n\in N$

Przyjmujemy $x_n = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}n\cdot\pi$; ponieważ $\frac{2}{5}\pi > 0$, więc $\frac{2}{5}n\pi \to +\infty$, skąd wynika również, że $x_n \to +\infty$ ($\frac{\pi}{10} + \infty = +\infty$ w $\overline{R}$)

- Wskażemy x_n' w taki sposób, aby $f(x_n') = 0$. Spełnimy, zatem, następujące warunki

$$f(x_n') = 0 = \sin 5x_n' \overset{(2)}{=} \sin(0+2n\pi) = \sin 5\left(\frac{2n\pi}{5}\right)$$

(2) $\sin 0 = 0 \wedge \sin x = \sin(x+2n\pi)$, $n\in N$

Stąd, $x_n' = \frac{2}{5}n\pi$; oczywiście $x_n' \to +\infty$.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, więc,

wobec $1\neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nie istnieje.