

# Test aw 2. Zad. 3c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}) = 2$$

• Niech  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie dowolnym ciągiem,  $x_n \in D(f)$  ( $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + x}$ )  
 takim, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

• Obliczamy granicę ciągu  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$   

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n^2 - 3x_n} - \sqrt{x_n^2 + x_n}) \stackrel{[+\infty - \infty]}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x_n^2 - 3x_n} - \sqrt{x_n^2 + x_n})}{\sqrt{x_n^2 - 3x_n} + \sqrt{x_n^2 + x_n}} \quad (**)$$

(\*) mnożymy przez  $1 = \frac{\sqrt{x_n^2 - 3x_n} + \sqrt{x_n^2 + x_n}}{\sqrt{x_n^2 - 3x_n} + \sqrt{x_n^2 + x_n}}$

(\*\*) stosujemy wzór skróconego mnożenia  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 3x_n - (x_n^2 + x_n)}{\sqrt{x_n^2 - 3x_n} + \sqrt{x_n^2 + x_n}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4x_n}{\sqrt{x_n^2}(\sqrt{1 - \frac{3}{x_n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x_n}})} \stackrel{(**)}{=}$$

(\*) uwzględnimy najniższą potęgę  $x_n$  występującą w mianowniku i uproszczymy równość w liczniku, jak i mianowniku

(\*\*)  $\sqrt{x_n^2} = |x_n| = -x_n$ , wobec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4x_n}{-x_n(\sqrt{1 - \frac{3}{x_n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x_n}})} = \frac{-4}{-1(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = 2. \quad \left( \begin{array}{l} \frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \\ \frac{3}{x_n} \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

Wobec dowolności wybranego  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

# Test aw 2. Zad. 4g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} - x - 1 \right) \stackrel{[+\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} - (x+1) \right) \left[ \left( \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} \right)^2 + \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} \cdot (x+1) + (x+1)^2 \right]}{\left( \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} \right)^2 + (x+1) \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} + (x+1)^2}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2 - (x+1)^3}{\left( \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} \right)^2 + (x+1) \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x + 2} + (x+1)^2} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{a^2 + ab + b^2} =$$

(1) mnożymy przez  $1 = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$

(2) stosujemy wzór skróconego mnożenia  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(3) stosujemy wzór skróconego mnożenia  $(c + d)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$

$$\stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{\left( \sqrt[3]{x^3} \right)^2 + \left[ \left( \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 \right]} \stackrel{(5)}{=}$$

(4) redukcję wyrazów podobnych w liczniku i uwzględnienie najniższej potęgi  $x$  w mianowniku i (5) uproszczymy równość w liczniku, jak i mianowniku

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left( \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2} \stackrel{(6)}{=} \frac{1 + 0}{\left( \sqrt[3]{1 + 0 + 0 + 0} \right)^2 + (1 + 0) \sqrt[3]{1 + 0 + 0 + 0} + (1 + 0)^2}$$

(6)  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{4}{x} \rightarrow 0$ ,  $\frac{3}{x^2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{2}{x^3} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ; granica ilorazu równa ilorazowi granic, granica sumy równa sumie granic

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$