

Funkcje jednej zmiennej. Granica, ciągłość.

opracowała Grażyna Ciecierska

1 Granica funkcji

Definicja. Niech $x_0 \in R$, $r > 0$. **Otoczeniem punktu x_0 o promieniu r** nazywamy przedział $(x_0 - r, x_0 + r)$. **Otoczeniem prawostronnym punktu x_0 o promieniu r** nazywamy przedział $[x_0, x_0 + r)$. **Otoczeniem lewostronnym punktu x_0 o promieniu r** nazywamy przedział $(x_0 - r, x_0]$.

Oznaczenie. $U(x_0, r)$ – otoczenie punktu x_0 o promieniu r , $U_+(x_0, r)$ – otoczenie prawostronne punktu x_0 o promieniu r , $U_-(x_0, r)$ – otoczenie lewostronne punktu x_0 o promieniu r

Definicja. Niech $x_0 \in R$, $r > 0$. **Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu r** nazywamy zbiór $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$. **Sąsiedztwem prawostronnym punktu x_0 o promieniu r** nazywamy przedział $(x_0, x_0 + r)$. **Sąsiedztwem lewostronnym punktu x_0 o promieniu r** nazywamy przedział $(x_0 - r, x_0)$.

Oznaczenie. $S(x_0, r)$ – sąsiedztwo punktu x_0 o promieniu r , $S_+(x_0, r)$ – sąsiedztwo prawostronne punktu x_0 o promieniu r , $S_-(x_0, r)$ – sąsiedztwo lewostronne punktu x_0 o promieniu r

Oznaczenie. $U(-\infty, r) = (-\infty, r)$, $U(+\infty, r) = (r, +\infty)$, $r \in R$

Definicja. Niech $X \subset R$. Punkt x_0 nazywamy **punktem skupienia zbioru X** , jeśli w dowolnym sąsiedztwie punktu x_0 znajduje się przynajmniej jeden punkt zbioru X .

Twierdzenie. Punkt x_0 jest punktem skupienia zbioru $X \subset R$, jeśli istnieje ciąg $(x_n)_{n \in N}$ taki, że $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $n \in N$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Przykład. Punkt 2 jest punktem skupienia zbioru $X = \{(1 + (-1)^n) \frac{n+1}{n} : n \in N\}$; punkt 0 jest punktem skupienia zbioru $X = (0, 1)$.

Definicja (Heine). Liczbę $g \in R$ nazywamy **granicą funkcji $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$, w punkcie x_0** , jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru X oraz

$$\forall (x_n)_{n \in N}, x_n \in X, x_n \neq x_0, [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ – g jest granicą funkcji f w punkcie x_0

Przykład. Wyznaczyć $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Przykład. Wykazać, że $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7) = 8$.

Twierdzenie. Jeśli

- $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g,$
- $\exists (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, x'_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = g',$
- $g \neq g',$

to nie istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$, gdzie $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$, nie istnieje.

Definicja (Heine). Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy **granica lewostronną funkcji** $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, w punkcie x_0 , jeśli $S_-(x_0, r) \subset X$ dla pewnego $r > 0$ oraz

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X, x_n < x_0, [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g - g$ jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0

Definicja (Heine). Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy **granica prawostronną funkcji** $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, w punkcie x_0 , jeśli $S_+(x_0, r) \subset X$ dla pewnego $r > 0$ oraz

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X, x_n > x_0, [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g - g$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7) = 8.$

Definicja (Heine). Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą** $+\infty$ jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach należących do pewnego sąsiedztwa $S(x_0, r) \subset X$, ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$, tzn.

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X, x_n \neq x_0, [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ $+\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

Definicja (Heine). Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 **granice niewłaściwą** $-\infty$ jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach należących do pewnego sąsiedztwa $S(x_0, r) \subset X$, ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $-\infty$, tzn.

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X, x_n \neq x_0, [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ $-\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2^{\frac{1}{|x|}}) = -\infty$.

Definicja (Heine). Funkcja $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ ma w $+\infty$ **granice właściwą** g jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in N}$ rozbieżnego do $+\infty$ o wyrazach należących do $U(+\infty, r) \subset X$, ciąg $(f(x_n))_{n \in N}$ jest zbieżny do g , tzn.

$$\forall (x_n)_{n \in N}, x_n \in X, x_n \in U(+\infty, r), [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ g jest granicą funkcji f w $+\infty$

Przykład. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7-6x-5x^2}{10x^2+3} = -\frac{1}{2}$.

Definicja (Heine). Funkcja $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ ma w $+\infty$ **granice niewłaściwą** $+\infty$ jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in N}$ rozbieżnego do $+\infty$ o wyrazach należących do $U(+\infty, r) \subset X$, ciąg $(f(x_n))_{n \in N}$ jest rozbieżny do $+\infty$, tzn.

$$\forall (x_n)_{n \in N}, x_n \in X, x_n \in U(+\infty, r), [(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty)].$$

Oznaczenie. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $+\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w $+\infty$

Twierdzenie. Jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru X , to funkcja $f : X \rightarrow R$ posiada w punkcie x_0 co najwyżej jedną granicę.

Twierdzenie. Jeśli $f_1 : X_1 \rightarrow R$, $f_2 : X_2 \rightarrow R$, gdzie $X_1 \subset R$, $f_1(X_1) \subset X_2 \subset R$, są funkcjami spełniającymi warunki: x_0 jest punktem skupienia zbioru X_1 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g$, $g \notin f_1(X_1 \setminus \{x_0\})$, g jest punktem skupienia zbioru $f_1(X_1)$, oraz $\lim_{y \rightarrow g} f_2(y) = h$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_2 \circ f_1)(x) = h$.

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Twierdzenie. Jeśli $f_1, f_2 : X_1 \rightarrow R$, $X_1 \subset R$, spełniają warunki: x_0 jest punktem skupienia zbioru X_1 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = g_1 \in R$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g_2 \in R$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = g_1 \cdot g_2$. Jeśli $g_2 \neq 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}$. Jeśli $a \in R$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} [af_1(x)] = ag_1$.

Przykład. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{6-\sqrt{x}}$.

Twierdzenie. Jeśli $f_1, f_2, f_3 : X_1 \rightarrow R$, $X_1 \subset R$, spełniają warunki: $\forall x \in X_1, [f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)]$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) = g$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = g$.

Przykład. $\lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4) \sin \frac{1}{x-4} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad a > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad a \in R$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a, \quad a \in R$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0} =$ $a_k \neq 0, b_l \neq 0$	$\begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & gdy \quad k = l \\ 0 & gdy \quad k < l \\ +\infty & gdy \quad k > l, \frac{a_k}{b_l} > 0 \\ -\infty & gdy \quad k > l, \frac{a_k}{b_l} < 0 \end{cases}$

Definicja. Prostą $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** funkcji $f : X \rightarrow R, X \subset R$, jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Definicja. Prostą $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** funkcji $f : X \rightarrow R, X \subset R$, jeśli $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Definicja. Prostą $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową funkcji** $f : X \rightarrow R, X \subset R$, jeśli $x = a$ jest asymptotą lewostronną i prawostronną funkcji f .

Przykład. (a) $f(x) = \ln(x-2), \quad x=2$, (b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x=0$.

Definicja. Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną funkcji** f w $+\infty$, jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

Definicja. Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną funkcji** f w $-\infty$, jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Przykład. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2 Ciągłość funkcji

Definicja (Heine). Funkcję $f : X \rightarrow R, X \subset R$ nazywamy **ciągłą w punkcie** x_0 jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in N}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach należących do pewnego otoczenia $U(x_0, r) \subset X$, ciąg $(f(x_n))_{n \in N}$ jest zbieżny do $f(x_0)$, tzn.

$$\forall (x_n)_{n \in N}, x_n \in X, \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \right) \right].$$

Wniosek. Jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru $X \subset R$, to funkcja $f : X \rightarrow R$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Wniosek. Jeśli x_0 nie jest punktem skupienia zbioru $X \subset R$, to funkcja $f : X \rightarrow R$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Przykład. $[x] = \max\{z \in Z : z \leq x\}$, funkcja $E : R \rightarrow R$ określona wzorem $E(x) = [x]$, tzn.

$$E(x) = \begin{cases} \vdots \\ -2 & \text{dla } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{dla } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{dla } 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{dla } 3 \leq x < 4 \\ \vdots \end{cases}.$$

Jeśli $k \in Z$ oraz $k \leq x < k+1$, to $E(x) = k$. Jeśli $x_0 \notin Z$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, tzn. funkcja E jest ciągła w x_0 ; jeśli $x_0 \in Z$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nie istnieje, czyli funkcja E nie jest ciągła w x_0 .

Przykład. a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{dla } x \in R \setminus \{0\} \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in R \setminus \{0\} \\ 3 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, d) $f(x) = |x|$.

Definicja. Funkcję $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ nazywamy **lewostronnie ciągłą w punkcie x_0** , jeśli $U_-(x_0, r) \subset X$ dla pewnego $r > 0$, istnieje właściwa granica $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Definicja. Funkcję $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ nazywamy **prawostronnie ciągłą w punkcie x_0** , jeśli $U_+(x_0, r) \subset X$ dla pewnego $r > 0$, istnieje właściwa granica $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Przykład. Funkcja część całkowita E jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

Twierdzenie. Funkcja $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$, jest ciągła w punkcie x_0 będącym punktem skupienia zbioru X , wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie ciągła i prawostronnie ciągła w tym punkcie.

Definicja. Funkcję $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ nazywamy **ciągłą**, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in X$.

Definicja. Funkcję $f : X \rightarrow R$, $X \subset R$ nazywamy **ciągłą w zbiorze $A \subset X$** , jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$.

Przykład. a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$, b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in Q \\ 0 & \text{dla } x \in R \setminus Q \end{cases}$.

Wniosek. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow R$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$, prawostronnie ciągła w punkcie a oraz lewostronnie ciągła w punkcie b .

Wniosek. Funkcja $f : [a, +\infty) \rightarrow R$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a, +\infty)$ i prawostronnie ciągła w punkcie a .

Wniosek. Funkcja $f : (-\infty, b] \rightarrow R$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (-\infty, b)$ i lewostronnie ciągła w punkcie b .

Przykład. a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x < 0 \\ x + b & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} & \text{dla } x \in R \setminus \{0\} \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$,

$$c) f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < 1 \\ \log_a x & \text{dla } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{\pi}{\arctg \frac{1}{x-4}} & \text{dla } x > 4 \end{cases}.$$

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ oraz $f(x_0) > 0$, to istnieje $U(x_0, r) \subset X$, $r > 0$ takie, że dla każdego punktu tego otoczenia funkcja f przyjmuje wartość dodatnią, tzn. $\exists r > 0 \forall x \in U(x_0, r) (f(x) > 0)$.

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ oraz $f(x_0) < 0$, to istnieje $U(x_0, r) \subset X$, $r > 0$ takie, że dla każdego punktu tego otoczenia funkcja f przyjmuje wartość ujemną, tzn. $\exists r > 0 \forall x \in U(x_0, r) (f(x) < 0)$.

Twierdzenie. Jeśli funkcje $f_1, f_2: X \rightarrow R$, $X \subset R$, są ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, to funkcje $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 \cdot f_2$ określone wzorami:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

dla $x \in X$ są ciągłe w punkcie x_0 . Ponadto funkcja $\frac{f_1}{f_2}$, określona wzorem $\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ dla $x \in X \setminus \{x \in X : f_2(x) = 0\}$, jest ciągła w x_0 .

Twierdzenie. Jeśli $f_1: X_1 \rightarrow R$, $f_2: X_2 \rightarrow R$, $X_1 \subset R$, $f_1(X_1) \subset X_2 \subset R$ są funkcjami spełniającymi warunki: f_1 jest ciągła w punkcie x_0 , f_2 jest ciągła w punkcie $f_1(x_0)$, to funkcja $f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow R$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie. Jeśli X jest przedziałem i funkcja $f: X \rightarrow R$, jest ciągła i rosnąca (malejąca), to $f(X)$ jest przedziałem oraz funkcja odwrotna $f^{-1}: f(X) \rightarrow R$ jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Definicja. **Funkcjami elementarnymi** nazywamy funkcje należące do następujących klas: wielomiany; funkcje trygonometryczne; funkcje wykładnicze; funkcje odwrotne do wymienionych: funkcje pierwiastkowe, funkcje cyklometryczne, funkcje logarytmiczne; sumy, różnice, iloczyny, ilorazy i złożenia funkcji wymienionych.

Twierdzenie. Funkcje elementarne są ciągłe.

Definicja. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy **punktem nieciągłości pierwszego rodzaju funkcji** $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jeśli istnieją granice właściwe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

Definicja. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy **nieusuwalnym punktem nieciągłości pierwszego rodzaju funkcji** $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jeśli jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Definicja. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy **usuwalnym punktem nieciągłości pierwszego rodzaju funkcji** $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jeśli jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju oraz istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, tzn. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Definicja. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy **punktem nieciągłości drugiego rodzaju funkcji** $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$, jeśli przynajmniej jedna z granic $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Przykład. a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x \in R \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$.

Twierdzenie. (Weierstrass) *Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow R$, jest ciągła, to jest ograniczona i osiąga swoje kresy, tzn. $\exists m, M \in R \forall x \in [a, b], (m \leq f(x) \leq M)$; $\exists c \in [a, b], \left(f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)\right)$; $\exists d \in [a, b], \left(f(d) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)\right)$.*

Przykład. a) $f(x) = ax, a > 0, [0, 1]$, b) $f(x) = \frac{a}{x}, a > 0, (0, a)$, c) $f(x) = a^x, a > 1, [0, +\infty)$.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow R$, jest ciągła i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje pierwiastek równania $f(x) = 0$ w przedziale (a, b) , tzn. $\exists c \in (a, b), (f(c) = 0)$.*

Przykład. a) $f(x) = \sin x - x + 1, [0, \frac{3\pi}{2}]$, b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{dla } -2 \leq x < 0 \\ -x^2 - 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Twierdzenie. (Darboux) *Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow R$, jest ciągła i spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to przyjmuje wartości pośrednie, tzn.*

$$\forall y \in R, ((f(a) < y < f(b)) \Rightarrow (\exists c \in (a, b), (y = f(c)))) .$$

Literatura

1. Banaś J., Wędrychowicz S., 2019, Zbiór zadań z analizy matematycznej; Wydawnictwo Naukowe PWN
2. Gewert M., Skoczylas Z., 2019, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna Wydawnicza GiS
3. Gewert M., Skoczylas Z., 2019, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS
4. Kołodziej W., 2020, Analiza matematyczna, Wydawnictwo Naukowe PWN
5. Kaczor W. J., Nowak M. T., 2019, Zadania z analizy matematycznej. Cz. 2. Funkcje jednej zmiennej–rachunek różniczkowy, Wydawnictwo Naukowe PWN
6. Krysicki W., Włodarski L., 2019, Analiza matematyczna w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Część 1
7. Kuratowski K., 2013, Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej, Wydawnictwo Naukowe PWN
8. Leja F., 2016, Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych, Wydawnictwo Naukowe PWN
9. Musielakowie H. i J., 2011, Analiza matematyczna. T.1, cz. 1, 2, Wydawnictwo Naukowe UAM
10. Rudin W., 2019, Podstawy analizy matematycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN
11. Rudnicki W., 2020, Wykłady z analizy matematycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN.