Uniwersytet Warmińsko – Mazurski

w Olsztynie

Wydział Matematyki i Informatyki

Kierunek: Matematyka

Anna Michałek

Spektrum pierścienia i topologia Zariskiego

Praca magisterska wykonana w zakładzie Algebry i Geometrii pod kierunkiem dr Michała Germaniuka

OLSZTYN 2002

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Pisząc jakąkolwiek pracę należy mieć świadomość, aby zawierała ona w sobie jakąś wartość pożyteczną nie tylko dla wykonawcy, ale także i dla czytelnika. Praca magisterska powinna naświetlić czytelnikowi pewne nowe problemy, a przede wszystkim poszerzyć wiedzę i nowe horyzonty myślowe piszącego. Praca ta powinna stanowić pewne kompendium wiedzy zdobytej w ciągu toku odbywanych studiów.

Klasyczna geometria algebraiczna poświęcona była badaniu podzbiorów algebraicznych n- wymiarowej przestrzeni zespolonej, tzn. zbiorów rozwiązań skończonych układów równań $f_\alpha (x_1,.......,x_n) = 0$, gdzie f_α to wielomiany o współczynnikach z ciała C liczb zespolonych, a α przebiega skończony zbiór wskaźników. Okazało się, że znaczną cześć wyników oraz metod daje się przenieść na teorię zbiorów algebraicznych nad dowolnym ciałem k algebraicznie domkniętym. Takie uogólnienie pozbawiło jednak obiekty badań geometrii algebraicznej struktur topologicznych, różniczkowych i analitycznych, pochodzących od naturalnych struktur przestrzeni C^n.
W drugiej połowie dwudziestego wieku okazało się jednak, że topologizacja pojęć i metod badawczych tak rozszerzonej geometrii algebraicznej jest możliwa. Ożywiło to geometrię algebraiczną zbliżając ją do takich działów matematyki, jak geometria różniczkowa, topologia algebraiczna, teoria przestrzeni analitycznych, teoria układów dynamicznych.

Niniejsza praca jest poświęcona opisowi podstawowego pojęcia geometrii algebraicznej – spektrum pierścienia przemiennego z jedynką. Przytaczam tu kilka podstawowych pojęć i faktów nie tylko z teorii pierścieni ale i także z teori snopów. Obydwa pojęcia wprowadzają nas do ogólnej definicji schematu i udowadniają jego proste właściwości.

Rozdział pierwszy ma charakter informacyjny, przytaczam tu kilka definicji i twierdzeń (bez dowodów), których znajomość jest potrzebna do rozumienia późniejszych badań – pojęcia spektrum pierścienia, które ma szerokie zastosowanie w geometrii algebraicznej. Zadaniem następnych rozdziałów jest formułowanie i badanie abstrakcyjnego pojęcia rozmaitości algebraicznej. Podstawowe pojęcia są tu określane jako rozmaitości quazirzutowe opierające się na rozmaitości afinicznej. Wszystkie cechy rozmaitości afinicznej X ukazane są w pierścieniu k [X], co potwierdza, iż ogólne pojęcie rozmaitości algebraicznej powinno w pewnym sensie zgadzać się z pojęciem rozmaitości afinicznej. Przy określeniu rozmaitości afinicznej należy wziąć pod uwagę pierścienie specjalnego typu i określić rozmaitość jako ideał geometryczny (w późniejszych rozważaniach jako ideał pierwszy) związany z tym pierścieniem).
Omawiane w rozdziałach drugim i trzecim pojęcia pierścienia spektralnego i snopa dążą do określenia schematu, które ma większe znaczenie niż rozmaitość algebraiczna. Przy określeniu ogólnego pojęcia schematu także za podstawę weźmiemy funkcje regularne na rozmaitościach algebraicznych. Dlatego dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ rozpatrujemy pierścień regularnych funkcji. W ten sposób otrzymamy nie jeden pierścień a układ pierścieni między którymi istnieją różne związki.

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Pierścienie i ich własności

Definicja 1.1

Pierścień A jest to zbiór z dwoma działaniami nazywanymi odpowiednio mnożeniem i dodawaniem, spełniającymi następujące warunki:

1^0 ze względu na dodawanie pierścień A jest grupą abelową,

2^0 mnożenie jest łączne,

3^0 dla dowolnych $x, y, z \in A$

$(x + y) z = xz + yz$ oraz $z (x + y) = zx + zy$.

Element neutralny w dodawaniu oznaczać będziemy przez 0, a w mnożeniu (jeżeli istnieje) przez 1.

Definicja 1.2

Pierścień A nazywamy pierścieniem przemiennym z jedynką, jeżeli $xy = yx$ dla dowolnych $x, y \in A$ i istnieje element neutralny mnożenia.

Definicja 1.3

Podzbiór B pierścienia A nazywamy, podpierścieniem jeżeli:

1^0 dla każdych $a, b \in B$, $a - b \in B$ *i* $a \cdot b \in B$,

2^0 $0, 1 \in B$.

Definicja 1.4

Pierścień A nazywamy pierścieniem bez dzielników zera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $a, b \in A$ jeśli $a \cdot b = 0$ to $a = 0$ lub $b = 0$.

Definicja 1.5

Odwzorowanie $\varphi : A \to B$, pierścieni A i B nazywamy homomorfizmem jeżeli dla każdych $a, b \in A$ mamy:

1^0 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,

2^0 $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,

3^0 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Definicja 1.6

P jest ideałem pierścienia A gdy spełnia następujące warunki:

1^0 $P \subset A$,

2^0 P jest podpierścieniem,

3^0 jest zamknięty na mnożenie zewnętrzne tzn. dla każdych $a \in A$ i $b \in P$ mamy $a \cdot b \in P$.

Definicja 1.7

Ideał P pierścienia A nazywamy pierwszym, gdy:

1^0 $P \neq A$,

2^0 dla każdych $a, b \in A$ jeżeli $a \cdot b \in P$ to $a \in P$ lub $b \in P$.

Twierdzenie 1.1

Przeciwobraz ideału pierwszego przy dowolnym homomorfiźmie jest pierwszy.

Definicja 1.8

Ideał P pierścienia A nazywamy ideałem głównym, jeśli istnieje $a \in A$ takie, że $P = (a)$, gdzie (a) oznacza najmniejszy ideał zawierający element a. Element a nazywamy generatorem ideału P.

Definicja 1.9

Niech P będzie ideałem pierścienia A. Dla dowolnych a , $b \in A$, $a \approx b$ wtedy i tylko wtedy gdy $a - b \in P$ jest relacją równoważności na zbiorze A. Jeżeli [a], [b] są warstwami tej relacji wyznaczonymi przez elementy a i b , to $[\,a\,] \oplus [\,b\,] = [\,ab\,]$ i $[\,a\,] \otimes [\,b\,] = [\,ab\,]$ dobrze określają działania na warstwach.

Zbiór warstw oznaczać będziemy symbolem A/P i nazywać pierścieniem ilorazowym.

Twierdzenie 1.2

Jeżeli P jest ideałem pierwszym pierścienia A to A/P jest pierścieniem bez dzielników zera.

Definicja 1.10

m jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy:

1^0 $m \neq A$,

2^0 dla każdego ideału J pierścienia A jeżeli $m \subset J$ to $J = A$ lub $J = m$.

Twierdzenie 1.3

Jeżeli m jest ideałem maksymalnym pierścienia A to A/m jest ciałem.

Definicja 1.11

Jeżeli m jest ideałem maksymalnym pierścienia A i dla każdego $a \notin m$ istnieje $a^{-1} \in A$ to pierścień A nazywamy pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym m.

Z definicji wynika, że w pierścieniu lokalnym istnieje dokładnie jeden ideał maksymalny, jest nim ideał m.

Definicja 1.12

Pierścień jest notherowski jeżeli jest spełniony jeden z dwóch warunków:

1^0 każdy ideał zawarty w A jest skończenie generowany,

2^0 każdy łańcuch ideałów rosnących jest skończony tzn. jeżeli

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots\ldots\ldots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \ldots\ldots\ldots$$

to istnieje $k \in N$ takie, że $P_k = P_{k+m}$ gdzie $m \in N$.

<u>Twierdzenie 1.4</u>

Jeżeli A jest pierścieniem notherowskim. Wówczas pierścień wielomianów $A[X_1,\ldots,X_n]$ jest również pierścieniem notherowskim.

Powyższe twierdzenie nosi nazwę Twierdzenia Hilberta o bazie.

<u>Twierdzenie 1.5</u>

Jeżeli k jest ciałem algebraicznie domkniętym to jedynymi ideałami maksymalnymi pierścienia $k[X_1,\ldots,X_n]$ wielomianów n zmiennych o współczynnikach z ciała k są ideały $(X_1-a_1,\ldots, X_n-a_n)$ gdzie $a_1,\ldots,a_n \in k$.

Twierdzenie to nosi nazwę słabej formy twierdzenia Hilberta o zerach.

Z twierdzenia tego wynika, że przyporządkowanie punktowi $(a_1,\ldots,a_n) \in k^n$ ideału maksymalnego $(X_1-a_1,\ldots, X_n-a_n) \subset k[X_1,\ldots,X_n]$ jest wzajemnie jednoznaczne. A zatem punkty przestrzeni k^n można utożsamić z ideałami maksymalnymi pierścienia $k[X_1,\ldots,X_n]$.

Wnioskiem tego twierdzenia jest następne twierdzenie.

<u>Twierdzenie 1.6</u>

Dla każdego ideału maksymalnego m pierścienia $k[X_1,\ldots,X_n]$ ciało ilorazowe $k[x_1,\ldots,x_n]/m$ jest izomorficzne z k.

Definicja 1.13

Radykałem ideału a w pierścieniu A nazywamy zbiór:

$$\sqrt{a} = \{ f \in A : istnieje\ n > 0,\ f^n \in a \}.$$

Twierdzenie 1.7

Radykał ideału a równa się części wspólnej wszystkich ideałów pierwszych zawierających a . Radykał ideału jest ideałem.

Definicja 1.14

Radykał ideału zerowego nazywamy nilradykałem pierścienia A. Składa się on z elementów $x \in A$ takich, że $x^n = 0$ dla pewnego $n > 0$.

Nilradykał pierścienia jest przecięciem jego wszystkich ideałów pierwszych.

Definicja 1.15

Niech A będzie pierścieniem. $f \in A$ jest elementem nilpotentnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $n \in N$ takie, że $f^n = 0$.

Nilradykał składa się ze wszystkich elementów nilpotentnych.

Twierdzenie 1.8

Element nilpotentny jest dzielnikiem zera.

Dowód:

Istnieje n takie, że $f^n = 0$ i n jest najmniejszą liczbą o tej własności. Stąd $0 = f^n = f \cdot f^{n-1}$ oraz $f \neq 0$ i $f^{n-1} \neq 0$.

Twierdzenie 1.9

Każdy ideał pierwszy pierścienia A zawiera każdy element nilpotentny pierścienia A.

Definicja 1.16

Zbiorem multyplikatywnym pierścienia A nazywamy zbiór $S \subset A$ nieposiadający zera i zamknięty na mnożenie tzn. jeżeli $f, g \in S$ to $f \cdot g \in S$.

Twierdzenie 1.10

Ideał $P \subset A$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy $S = A \setminus P$ jest zbiorem multyplikatywnym.

Definicja 1.17

Dla każdego zbioru multyplikatywnego można utworzyć pierścień A składający się z par (f, g) gdzie, $f \in A$, $g \in S$ utożsamianych z relacją równoważności:

$$(f, g) \approx (f', g')$$

wtedy i tylko wtedy jeżeli istnieje taki element $g'' \in S$, że:

$$g''(f \cdot g' - f' \cdot g) = 0.$$

Dodawanie i mnożenie takich elementów określone jest wzorami:

$$(f , g) + (f ', g') = (f \cdot g' + g \cdot f ', g \cdot g')$$

$$(f , g) \cdot (f', g') = (f \cdot f', g \cdot g').$$

Niech A_s będzie pierścieniem zlokalizowanym przez system multyplikatywny S, parę (f , g) oznaczać będziemy również przez f / g. Jeśli $S = A - P$, gdzie P jest ideałem pierwszym, to pierścień A_s będziemy oznaczać przez A_p.

Jeżeli żaden element zbioru S nie jest dzielnikiem zera w A, to przyporządkowanie $f \to (f , 1)$ określa homomorfizm $\varphi : A \to A_s$. Jeśli $f \in A$ nie jest elementem nilpotentnym i $S = \{ f^n , n = 1, 2, ...\}$ to pierścień A_s oznaczać będziemy przez A_f.

Topologia. Zbiory afiniczne. Topologia Zariskiego.

<u>Definicja 1.18</u>

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę (X, Q) złożoną ze zbioru X i rodziny Q jego podzbiorów spełniającej warunki:

1^0 $\varnothing \in Q$ oraz $X \in Q$,

2^0 jeżeli U i $V \in Q$ to $U \cap V \in Q$,

3^0 jeśli $U_s \in Q$ dla każdego $s \in S$, gdzie S jest dowolnym zbiorem to $\bigcup_{s \in S} U_s \in Q$.

Zbiór X będziemy nazywać przestrzenią, jego elementy punktami tej przestrzeni. Zbiory rodziny Q będziemy nazywać zbiorami otwartymi przestrzeni topologicznej X, a rodzinę Q nazywamy topologią.
Jeżeli dla pewnego $x \in X$ i zbioru otwartego $U \subset X$ mamy $x \in U$, to mówimy, że U jest otoczeniem punktu x.

<u>Definicja 1.19</u>

Niech $Y \subset X$ to $V \subset Y$ jest zbiorem otwartym w Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ takie, że $V = U \cap Y$.

Zbiory otwarte V określone w ten sposób tworzą topologię indukowaną na zbiorze Y.

Definicja 1.20

Niech będzie dana przestrzeń topologiczna *(X, Q)*. Zbiorem domkniętym w X nazywamy zbiór D, wtedy i tylko wtedy, gdy X / D jest zbiorem otwartym.

.

Twierdzenie 1.11

Rodzina zbiorów domkniętych D_0 przestrzeni topologicznej *(X, Q)* spełnia następujące warunki:

1^0 $\varnothing$ oraz $X \in D_0$,

2^0 jeśli $D_s \in D_0$ to $\bigcap_{s \in T} D_s \in D_0$ dla dowolnego zbioru T indeksów s,

3^0 jeżeli $D_1, D_2 \in D_0$ to $D_1 \cup D_2 \in D_0$.

Definicja 1.21

Domknięciem zbioru C w przestrzeni *(X, Q)* nazywamy cześć wspólną wszystkich zbiorów domkniętych w *(X, Q)* zawierających zbiór C. Domknięcie zbioru C oznaczamy symbolem $\overline{C}$.

Z określenia domknięcia wynika, że domknięcie zbioru C jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym C.

Twierdzenie 1.12

Operacja domknięcia (dla dowolnych podzbiorów C, B) w przestrzeni topologicznej (X, Q) ma nastepujące własności:

1^0 $\overline{\varnothing} = \varnothing$

2^0 $C \subset \overline{C}$

3^0 $\overline{C \cup B} = \overline{C} \cup \overline{B}$

4^0 $(\overline{C} = \overline{C})$

Definicja 1.22

Zbiór C w przestrzeni topologicznej X nazywamy gęstym jeżeli jego domknięcie zbioru C jest równe całej przestrzeni.

Definicja 1.23

Rodzina B podzbiorów zbioru X jest bazą przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subset Q$ oraz dla każdego $x \in X$ i otoczenia U punktu x istnieje zbiór $V \in B$ taki, że $x \in V \subset U$.

Bazę przestrzeni X nazywamy inaczej układem zupełnym otoczeń.

Definicja 1.24

Niech k będzie dowolnym ciałem. Zbiorem algebraicznym afinicznym w k^n (n – wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem k) nazywamy podzbiór k^n złożony z rozwiązań ukladu równań:

$$f_j (X_1,.....,X_n) = 0, \qquad j \in J$$

gdzie J jest dowolnym zbiorem i $f_j \in k [X_1,.....,X_n]$ dla każdego $j \in J$. Zbiór ten będziemy oznaczać przez $W (\{ f_j \})$ lub $W (f_1,....., f_m)$, gdy $J = \{1,.....,m\}$.

Czyli $W(\{f_i\}) = \{(x_1,.....,x_n) \in k^n$: dla każdego $j \in J$ $f_j(x_1,.....,x_n) = 0\}$.

W przestrzeni k^n zbiory afiniczne tworzą topologię zbiorów domkniętych a ich dopełnienia tworzą topologię zbiorów otwartych. Taka topologia nazywana jest <u>topologią Zariskiego</u>.

Jeżeli dwa układy wielomianów generują ten sam ideał, to zbiory algebraiczne afiniczne wyznaczone przez te układy są równe.

Każdemu ideałowi *a* pierścienia $k[X_1,........,X_n]$ możemy przyporządkować zbiór algebraiczny afiniczny *W(a)*. Przyporządkowanie ideałowi a zbioru algebraicznego W(a) nie jest wzajemnie jednoznaczne, gdyż np. $W(\chi_1^2) = W(\chi_1)$.

Definicja 1.25

Niech $\Sigma \subset k^n$ będzie pewnym podzbiorem przestrzeni k^n to ideał $I(\Sigma) = \{ f \in k[X_1,.....,X_n] : f(x_1,....., x_n) = 0$ dla każdego $(x_1,.....,x_n) \in \Sigma\}$ jest zbiorem wielomianów zerujących się na zbiorze Σ.

Twierdzenie 1.13

Jeżeli k jest ciałem algebraicznie domkniętym oraz a ideałem w $k[X_1,.....,X_n]$, to $I(W(a)) = \sqrt{a}$.

Jest to mocna forma twierdzenia Hilberta o zerach.

Twierdzenie 1.14

Jeżeli ciało k jest algebraicznie domknięte to operacje $\Sigma \to I(\Sigma)$ $a \to W(a)$, ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorami algebraicznymi afinicznymi przestrzeni k^n a zbiorem ideałów $a \subset k[X_1,.....,X_n]$ takich, że $a = \sqrt{a}$.

Definicja 1.26

Funkcją regularną na zbiorze algebraicznym afinicznym $\Sigma \subset k^n$ nazywamy taką funkcję, która jest ograniczeniem do Σ funkcji wielomianowej $k^n \to k$.

Zbiór funkcji regularnych na zbiorze algebraicznym Σ tworzy pierścień, który oznaczać będziemy przez $k[\Sigma]$.

Definicja 1.27

Zbiór algebraiczny afiniczny jest zbiorem nieredukowalnym , gdy nie da się przedstawić w postaci sumy dwóch wlaściwych podzbiorów algebraicznych afinicznych.

Opisane w twierdzeniu 1.13 przyporządkowanie ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zbiorami algebraicznymi afinicznymi nieredukowalnymi w k^n a ideałami pierwszymi pierścienia $k[X_1,.....,X_n]$.

Twierdzenie 1.15

Zbiór algebraiczny afiniczny $\Sigma \subset k^n$ jest nieredukowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $k[\Sigma]$ jest pierścieniem bez dzielników zera.

ROZDZIAŁ II

SPEKTRUM PIERŚCIENIA

W pozostałej części pracy rozpatrywany pierścień będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

Definicja 2.1

Spektrum pierścienia A nazywamy zbiór wszystkich ideałów pierwszych pierścienia A.
Spektrum pierścienia A oznaczać będziemy przez Spec A.

Ideały pierwsze noszą nazwę punktów spektralnych.

Ponieważ w każdym niezerowym pierścieniu istnieje przynajmniej jeden ideał maksymalny (a więc pierwszy), to spektrum niezerowego pierścienia jest zawsze zbiorem niepustym.

PRZYKŁAD 1

Spec Z . Niech Spec Z jest spektrum pierścienia liczb całkowitych. Ponieważ jedynymi ideałami w pierścieniu liczb calkowitych są ideały główne generowane przez liczby pierwsze oraz ideał zerowy.
Wobec tego Spec Z = { (0), (2), (3), (5), (7), (11),........}.

Niech E będzie dowolnym podzbiorem zbioru A.

Definicja 2.2

$V(E) = \{ P \in Spec\, A \ :\ P \supset E \}.$

Twierdzenie 2.1

Operacja $E \to V(E)$ ma następujące własności:

1^0 $\bigcap_\alpha V(E_\alpha) = V\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right),$

2^0 $V(J) = V(E_1) \cup V(E_2),$

gdzie J jest przecięciem ideałów generowanych przez zbiory E_1 i E_2.

Powyższe własności pokazują, że zbiory $V(E)$ odpowiadające dowolnym podzbiorom $E \subset A$ tworzą topologię zbiorów domkniętych na zbiorze Spec A. Topologię taką nazywać będziemy Topologią Zariskiego (lub topologią spektralną).

Niech $\varphi : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni A i B.

Definicja 2.3

Przyporządkowanie ${}^a\varphi(p) = \varphi^{-1}(p)$ dla każdego $p \in Spec\, B$, określa odwzorowanie:

$${}^a\varphi \ :\ Spec\, B \to Spec\, A.$$

Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem stowarzyszonym z (lub wyznaczonym przez) φ.

PRZYKŁAD 2

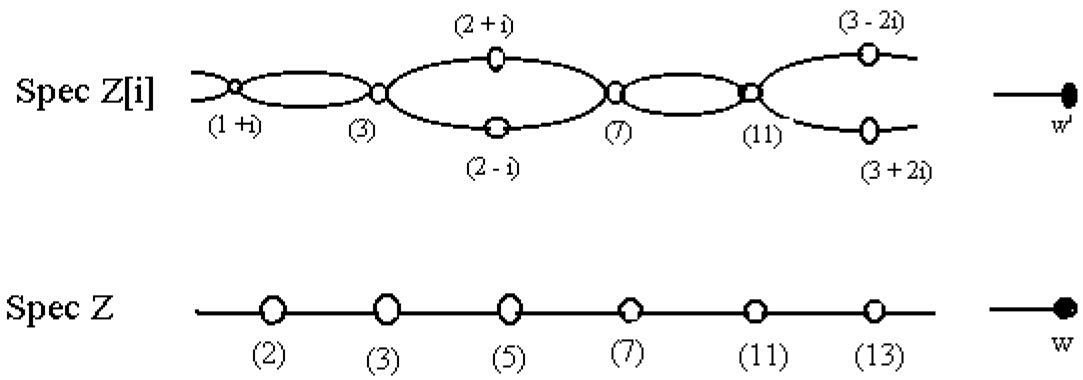
Rozważmy pierścień $Z\,[i]$, $i^2 = -1$ i przedstawimy jego spektrum korzystając z włożenia $\varphi : Z \rightarrow Z\,[\,i\,]$.

Mamy, zatem ${}^a\varphi$: Spec Z[i] $\rightarrow$ Spec Z.

Przez w i w′ oznaczamy punkty Spec Z i Spec Z[i], które odpowiadają ideałom zerowym dla których $({}^a\varphi)^{-1}\ w = w'$. Inne punkty z Spec Z odpowiadają liczbom pierwszym. Jest znany fakt, że w Z[i] ideał pierwszy jest ideałem głównym. Stąd $({}^a\varphi)^{-1}(\,p\,)$ składa się z ideałów pierwszych pierścienia Z[i], których generatory dzielą p w Z[i]. Jeżeli $p \equiv 1 \pmod 4$ to istnieją w sposób jednoznaczny określone liczby $m, k \in Z_+$ takie, że $(m - k \cdot i)(m + k \cdot i) = p$ i wtedy $({}^a\varphi)^{-1}(\,p\,)$ składa się z dwóch ideałów $(m - k \cdot i)$ i $(m + k \cdot i)$.

Jeżeli $p \not\equiv 1 \pmod 4$ to $({}^a\varphi)^{-1}(\,p\,)$ jest ideałem w Z[i] generowanym przez liczbę $(p + 0 \cdot i) = (p)$.

Powyższe rozważania ilustruje nastepujący rysunek.



Twierdzenie 2.2

Dla dowolnego podzbioru $E \subset A$ mamy:

$$({}^a\varphi)^{-1}\ (V(E)) = V(\varphi(E)).$$

Dowód:

$({}^a\varphi)^{-1}(V(E)) = \{ p \in Spec\, B : {}^a\varphi(p) \in V(E) \} =$

$\{ p \in Spec\, B : \varphi^{-1}(p) \in V(E)\} = \{ p \in Spec\, B : p \supset \varphi(E) \} =$

$V(\varphi(E))$. *cnd.*

Stąd wynika, że ${}^a\varphi$ jest przekształceniem ciągłym Spec B w Spec A. Ponadto odwzorowanie identycznościowe pierścienia A na siebie wyznacza przekształcenie tożsamościowe Spec A $\rightarrow$ Spec A.

Twierdzenie 2.3

Jeżeli $\varphi : A \rightarrow B$ jest homomorfizmem "na" to ${}^a\varphi : Spec\, B \rightarrow Spec\, A$ jest morfizmem na podzbiór domknięty i jest izomorficzny z tym zbiorem domkniętym czyli ${}^a\varphi$ jest włożeniem Spec B w Spec A.

Dowód:

Jeżeli ψ jest homomorfizmem naturalnym A na pierścień ilorazowy A/I gdzie $I = Ker\, \varphi \subset A$ to ${}^a\psi$ jest homeomorfizmem $Spec\, A/I$ na $V(I) \subset Spec\, A$.

Twierdzenie 2.4

Jeżeli $\varphi : A \rightarrow B$ jest homomorfizmem różnowartościowym to ${}^a\varphi\, (Spec\, B)$ jest podzbiorem gęstym w Spec A.

Dowód:

Dla każdego ideału $I \subset B$ mamy ${}^a\varphi(V(I)) = V(\varphi^{-1}(I))$.

Stąd:

$$\overline{{}^{a}\varphi\, Spec\ B} = \overline{{}^{a}\varphi\,(V(0))} = \overline{V(\varphi^{-1}(0))} = \overline{V(0)} = Spec\ A.$$

PRZYKŁAD 3

Niech $S \subset A$ będzie systemem multyplikatywnym, $\varphi :\ A \rightarrow A_s$ homomorfizmem kanonicznym. Wtedy ${}^{a}\varphi\ (\ Spec\ A_s\ ) = U_s$ jest zbiorem otwartym w Spec A i jest zbiorem ideałów pierwszych nieprzecinających zbiór S oraz ${}^{a}\varphi$ jest włożeniem . $\psi :\ U_s \rightarrow Spec\ A_s$ ma postać:

$$\psi\,(\,P\,) = \{\ x\,/\,s\ :\ x \in P,\ s \in S\ \}$$

i jest odwzorowaniem odwrotnym.

Twierdzenie 2.5

Jeżeli f i g są elementami pierścienia A to $V\,(\,f\,) \subset V\,(\,g\,)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^{\,n} = sf$ dla pewnych $s \in A,\ n > 0.$

Dowód:

$V(\ f\ ) \subset V(\ g\ )$ wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny ideał pierwszy zawierający f zawiera również g czyli obraz $[\ g\ ]$ elementu g w pierścieniu ${}^{A}/_{(\,f\,)}$ zawiera się w dowolnym ideale pierwszym tego pierścienia, a więc $[\ g\ ]$ jest elementem nilpotentnym. $[\ g\ ]^n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^{\,n} \in (\,f\,)$ dla pewnego $n > 0$. Stąd $g^{\,n} = s\,f$ dla pewnego $n > 0$ i $s \in A.$

Twierdzenie 2.6

Niech E będzie podzbiorem pierścienia A, a jest ideałem generowanym przez E. Wtedy $V(E) = V(a) = V(\sqrt{a})$.

Dowód:

Ponieważ $a \subset \sqrt{a}$ to $V(\sqrt{a}) \subset V(a)$. Jeżeli zaś $p \in V(a)$ czyli $p \supset a$, to $p \supset \sqrt{a}$ gdyż p jest ideałem pierwszym. To znaczy, że $p \in V(\sqrt{a})$ co dowodzi $V(a) \subset V(\sqrt{a})$.

Określimy teraz pewną bazę topologii spektralnej pierścienia. Dla dowolnego podzbioru E pierścienia A, niech $D(E) = Spec\ A \setminus V(E)$, otrzymana w ten sposób rodzina tworzy topologię zbiorów otwartych. Analogicznie niech $D(f) = Spec\ A \setminus V(f)$. Z twierdzenia 2.1 wynika, że $D(fg) = D(f) \cap D(g)$. Zbiory postaci $D(f)$ nazywamy zbiorami otwartymi głównymi. Z przykładu 3 wynika, że zbiór otwarty główny $D(f)$ jest homeomorficzny z Spec A_f

Twierdzenie 2.7

Rodzina $\{ D(f) : f \in A \}$ wszystkich zbiorów otwartych głównych jest bazą topologii Zariskiego na Spec A.

Dowód:

Jeżeli $U = Spec\ A \setminus V(E)$ jest zbiorem otwartym, to $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$ (na mocy własności 1^0 twierdzenia 2.1), a stąd $U = \bigcup_{f \in E} D(f)$.

Twierdzenie 2.8

Dla dowolnego pokrycia zbiorami otwartymi Spec A można wybrać pokrycie skończone.

Dowód:

Ponieważ zbiory otwarte główne $D(f)$, $f \in A$ tworzą bazę topologii z dowolnego pokrycia możemy uzyskać pokrycie zbiorami otwartymi głównymi.

Dlatego tę własność pokażemy dla pokrycia $Spec\ A = \bigcup_{\alpha \in I} D(f_\alpha), f_\alpha \in A$.

Stąd mamy:

$$\bigcap_{\alpha \in I} V(f_\alpha) = V(a) = \varnothing,$$

gdzie a jest ideałem generowanym przez elementy f_α, $\alpha \in I$.

Ideał a nie jest zawarty w żadnym ideale pierwszym co oznacza, że $a = A$.

Wtedy istnieją takie elementy $f_{\alpha 1} \ldots f_{\alpha r}$ i $g_1 \ldots g_r \in A$, że:

$$f_{\alpha 1} g_1 + \ldots + f_{\alpha r} g_r = 1$$

Stąd mamy

$$(f_{\alpha 1} \ldots f_{\alpha r}) = A,$$

a zatem

$$Spec\ A = D(f_{\alpha 1}) \cup \ldots \cup D(f_{\alpha r}). \qquad cnd.$$

Jeżeli $P \subset A$ jest ideałem pierwszym to jego domknięcie jest $\bigcap_{E \subset p} V(E) = V(P)$ tzn. składa się z ideałów pierwszych $P' \supset P$.

Ideał pierwszy $P \subset A$ jest punktem domkniętym w Spec A, wtedy i tylko wtedy, kiedy jest on ideałem maksymalnym.

Jeżeli A nie posiada dzielników zera, to ideał (0) jest pierwszy i zawiera się w dowolnym ideale pierwszym. Dlatego jego domknięcie pokrywa się z całą przestrzenią – jest on punktem gęstym w całej przestrzeni.

Istnienie w topologicznej przestrzeni punktów niedomkniętych określa hierarchia, którą można formułować w następujący sposób:

1^0 Punkt x nazywa się specjalizacją punktu y, jeżeli x zawiera się w domknięciu y.

2^0 Punkt gęsty w całej przestrzeni nazywa się punktem ogólnym przestrzeni.

Wiemy, że przecięcie wszystkich ideałów pierwszych $P \subset A$, składa się z elementów nilpotentnych pierścienia A, tzn. równa się z nilradykałem tego pierścienia. Jeżeli jest on pierwszy, to określa on ogólny punkt w Spec A. Dowolny ideał pierwszy powinien posiadać wszystkie elementy nilpotentne tzn. nilradykał. Spec A posiada punkt ogólny wtedy, kiedy nilradykał pierścienia A jest pierwszy, co oznacza, że ogólny punkt przestrzeni jest nilradykałem.

Twierdzenie 2.9

Przestrzeń topologiczna X posiadająca ogólny punkt nie może być przedstawiona w postaci $X = X_1 \cup X_2$ gdzie X_1, X_2 są zbiorami domkniętymi i $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$.

Przestrzeń posiadająca ogólny punkt jest przestrzenią nieredukowalną.

Dla spektrum pierścienia nieredukowalność jest warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia punktu ogólnego.

Twierdzenie 2.10

Jeżeli przestrzeń Spec A jest nieredukowalna, to nilradykał pierścienia A jest pierwszy

Dowód:

Niech nilradykał N pierścienia A nie jest pierwszy i $f\,g \in N$, $f \notin N$, $g \notin N$. Wtedy:

$$Spec\ A = V(f) \cup V(g)$$

$$V(f) \neq Spec\,A \neq V(g)$$

a to oznacza, że Spec A rozkłada się, co nie jest zgodne z założeniem.

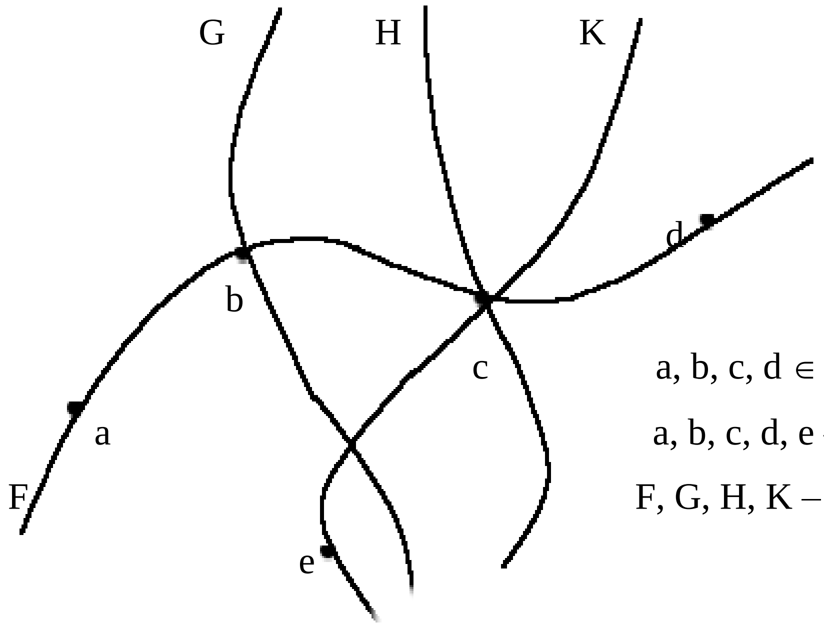
Tak jak wszystkie zbiory domknięte w Spec A są homeomorficzne spektrum pierścienia to ta własność przenosi się na dowolny domknięty podzbiór. W ten sposób istnieje wzajemnie jednoznaczny związek między punktami Spec A i nieredukowalnymi domkniętymi podzbiorami w Spec A. Związek ten określa się przyporządkowaniem punktowi jego domknięcia.

PRZYKŁAD 4

Niech k oznacza ciało algebraicznie domknięte. Przyporządkujemy punktowi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ przestrzeni k^n ideał $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ pierścienia $k[X_1, \ldots, X_n]$. Z twierdzenia Hilberta o zerach wynika, że jest to jedno – jednoznaczne odwzorowanie k^n na zbiór ideałów maksymalnych w $k[X_1, \ldots, X_n]$. Jednak w Spec $k[X_1, \ldots, X_n]$ punktami są nie tylko ideały maksymalne, ale wszystkie ideały pierwsze. Punkty Spec $k[X_1, \ldots, X_n]$ są w odpowiedniości jedno – jednoznacznej z podzbiorami nieredukowalnymi przestrzeni k^n.

Widać, że gdy $p, q \in \mathrm{Spec}\, k[X_1,.....,X_n]$, to $p \in \overline{\{q\}} \Leftrightarrow V(p) \subset V(q)$.

Dla $n = 2$ przestrzeń $\mathrm{Spec}\, k[X_1,.......,X_n]$ można przedstawić za pomocą rysunku.



$a, b, c, d \in \overline{\{F\}}$

a, b, c, d, e – punkty domknięte

F, G, H, K – punkty niedomknięte

<u>PRZYKŁAD 5</u>

$\mathrm{Spec}\ {}^{k[X_1,.......,X_n]}/_{I}$, I jest ideałem. Niech $f_1,......f_m$ będą geratorami I. Ideały pierwsze w pierścieniu ${}^{k[X_1,.......,X_n]}/_{I}$ są naturalnej odpowiedniości jedno – jednoznacznej z ideałami pierwszymi pierścienia $k[X_1,.......,X_n]$ zawierającymi I. Każdy taki ideał p wyznacza rozmaitość algebraiczną afiniczną $W(p) = \{ x = (x_1,.....,x_n) \in k^n : \bigwedge_{f \in p} f(x) = 0 \} \subset W(I)$.

A więc za punkty $\mathrm{Spec}\ {}^{k[X_1,.......,Xn]}/_{I}$ można uważać za rozmaitości algebraiczne zawarte w *W (I)*.

.

Definicja 2.4

Spektrum maksymalnym pierścienia A nazywamy przestrzeń topologiczną Max A, której punktami są ideały maksymalne pierścienia A, a topologia jest indukowana przez topologię Zariskiego na Spec A.

Topologia Zariskiego w spektrach algebr afinicznych daje informacje nie tylko o zbiorach algebraicznych wyznaczonych przez te algebry, ale i o podzbiorach nieredukowalnych tych zbiorów.
W topologii Zariskiego spektrum algebry afinicznej, zbiór ideałów maksymalnych jest gęsty.

ROZDZIAŁ III

SNOPY

Definicja przedsnopa i przedsnopa spektralnego.

Definicja 3.1

Przedsnopem F pierścieni na przestrzeni topologicznej X nazywamy rodzinę $\{ F(U), \rho_{U,V} \}_{U,V}$, gdzie U to dowolny otwarty zbiór, $\rho_{U,V}$ jest określone tylko gdy $V \subset U$ i spełnione są następujące warunki:

1^0 dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$, $F(U)$ jest pierścieniem,

2^0 jeżeli V, U są zbiorami otwartymi i $V \subset U$, to
$\rho_{U,V} : F(U) \rightarrow F(V)$ jest homomorfizmem pierścieni, przy czym:

a) $\rho_{U,U}$ jest homomorfizmem identycznościowym,

b) $\rho_{V,W} \cdot \delta_{U,V} = \delta_{U,W}$ *dla* $W \subset V \subset U.$

Elementy $g \in F(U)$ nazywamy przekrojami przedsnopa F nad zbiorem otwartym U. Homomorfizmy $\rho_{V,W}$ nazywamy homomorfizmami obcięcia (lub obcięciami) w przedsnopie F.

Definicja 3.2

Jeżeli F jest przedsnopem na X i $U \subset X$ jest zbiorem otwartym to odwzorowanie $V \to F(V)$ dla wszystkich zbiorów otwartych $V \subset U$ określa przedsnop na U. Nazywa się go przedsnopem ograniczenia F i oznacza się $F/_U$.

PRZYKŁAD 6

Niech X będzie rozmaitością topologiczną, i niech dla otwartego $U \subset X$, $F(U)$ oznacza pierścień wszystkich funkcji ciągłych rzeczywistych na U. Niech dla $V \subset U$ (V – zbiór otwarty w X) homomorfizm obcięcia będzie określony wzorem $\rho_{U,V}(f) = f|_V$. F jest przedsnopem pierścieni. Podobnie, gdy X jest rozmaitością różniczkową a $F(U)$ – pierścieniem odwzorowań różniczkowych $U \to R$.

Definicja przedsnopa na spektrum pierścienia A, gdy A nie posiada dzielników zera.

Definicja 3.3

Przedsnop określony na przestrzeni topologicznej $X = SpecA$ nazywamy przedsnopem strukturalnym na Spec A i oznaczamy przez $\mathcal{O}$.

Zakładamy, że pierścień A nie posiada dzielników zera i przez K oznaczamy ciało ułamków prostych pierścienia A. Dla otwartego zbioru $U \subset Spec\,A$, oznaczamy przez $\mathcal{O}(U)$ zbiór takich elementów $u \in K$, że dla każdego punktu $x \in U$ mamy $u = a / b$, $a, b \in A$, $b (x) \neq \varnothing$ (tzn. b nie zawiera się w ideale pierwszym x).

$\mathcal{O} (U)$ jest pierścieniem. Wszystkie pierścienie $\mathcal{O} (U)$ zawierają się w K i możemy traktować je jako podzbiory jednego zbioru. Jeżeli $U \subset V$, to $\mathcal{O} (V) \subset \mathcal{O} (U)$. Zanurzenie to $\mathcal{O} (V)$ w $\mathcal{O} (U)$ oznaczamy przez $\rho_{U, V}$, w ten sposób otrzymujemy przedsnop pierścieni.

Jeżeli $u \in \mathcal{O} (Spec\ A)$ to dla dowolnego punktu $x \in Spec\ A$ istnieją takie a_x i $b_x \in A$, że:

$$u = a_x / b_x\ ,\ b_x (x) \neq \varnothing \qquad (1)$$

Rozpatrujemy ideał a utworzony przez wszystkie elementy b_x , $x \in Spec\ A$. Nie zawiera on w żadnym z ideałów pierwszych pierścienia A, co oznacza, że $a = A$. Zatem istnieją punkty $x_1, \ldots, x_r$ i elementy $c_1, \ldots, c_r \in A$, że:

$$c_1 b_{x1} + \ldots + c_r b_{xr} = 1$$

mnożąc równości *(1)* dla $x = x_i$ przez $c_i\, b_{xi}$ i dodając stronami otrzymamy:

$$u = \sum a_{xi}\, c_i \in A$$

Stąd $\mathcal{O}$ (Spec A) = A.

Definicja przedsnopa na spektrum pierścienia A dla dowolnego pierścienia.

Jeżeli zbiór otwarty $U \subset SpecA$ jest zbiorem otwartym głównym czyli $U = D (f)$ dla $f \in A$, to wtedy $D (f)$ jest homeomorficzne z Spec A_f i dlatego możemy przyjąć $\mathcal{O} (D (f)) = A_f$.

Dla głównych zbiorów otwartych $D(g) \subset D(f)$ określimy homomorfizm $\rho_{D(f), D(g)} : A_f \to A_g$.

$\rho_{D(f), D(g)} (a / f^k) = as^k / g^{nk}$ gdzie $g^n = sf$ dla pewnego $n > 0$ i $s \in A$ (patrz twierdzenie 2.5).

Odwzorowanie to nie zależy od przedstawienia elementu $t \in A_f$ w postaci a / f^k i jest homomorfizmem.

Definicja 3.4

Niech I będzie częściowo uszeregowanym zbiorem, $\{ E_\alpha , \alpha \in I \}$ – układem zbiorów i dla dowolnych $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$, $f_{\alpha, \beta}$ jest odwzorowaniem E_β w E_α spełniającym warunki:

1^0 $f_{\alpha\alpha}$ - jedyne odwzorowanie E_α,

2^0 dla $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ mamy $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \cdot f_{\beta\gamma}$.

Rozpatrzymy podzbiór iloczynu $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ zbiorów E_α składających się z elementów $x = \{ x_\alpha, x_\alpha \in E_\alpha \}$, że $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ gdy $\alpha \leq \beta$. Ten podzbiór nazywa się granicą odwrotną układu zbiorów E_α wraz z układem homomorfizmów $f_{\alpha, \beta}$ i oznaczany jest przez $\varprojlim E_\alpha$.

Odwzorowanie $x \to x_\alpha$, $x \in \varprojlim E_\alpha$ określa kanoniczne odwzorowanie granicy odwrotnej.

Jeżeli E_α są pierścieniami i $f_{\alpha, \beta}$ homomorfizmy pierścieni to $\varprojlim E_\alpha$ jest pierścieniem i kanoniczne odwzorowania są homomorfizmami pierścieni.

Definicja 3.5

$Q(U) = \varprojlim Q(D(f))$ gdzie granica odwrotna odnosi się do zbiorów $D(f) \subset U$ i morfizmów $\rho_{D(f),\, D(g)}$ dla $D(g) \subset D(f)$.

Zgodnie z określeniem $Q(U)$ składa się z rodzin $\{u_\alpha\}$, $u_\alpha \in A_{f\alpha}$, gdzie $f_\alpha \in A$ dla których $D(f_\alpha) \subset U$ przy czym:

$$u_\alpha = \rho_{D(f\alpha),\, D(f\beta)}(u_\beta) \quad jeżeli\ D(f_\beta) \supset D(f_\alpha).$$

Dla $U \subset V$ każda rodzina $\{u_\alpha\} \in Q(V)$ składająca się z $u_\alpha \in A_{f\alpha}$, $D(f_\alpha) \subset V$ określa podrodzinę $\{u_\beta\}$ składającą się z u_β z takim indeksem β, że $D(f_\beta) \subset U$. Oczywiście $\{u_\beta\} \in Q(U)$.

Niech $\rho_{U,V}(\{v_\alpha\}) = \{v_\beta\}$, stąd $Q(U)$ i $\rho_{U,V}$ określają przedsnopy pierścieni na Spec A. Przedsnop Q na Spec A nazywa się przedsnopem strukturalnym.

Jeżeli $U = Spec\ A$ to $D(1) = U$ tak, że 1 jest jednym z f_α np. f_0. Odwzorowanie $\{u_\alpha\} \rightarrow u_0$ określa homomorfizm $Q(Spec\ A) \xrightarrow{\sim} A$.

Jeżeli $u = \{u_\alpha :\ D(f_\alpha) \subset U\} \in Q(U)$ to zgodnie z określeniem $\rho_{D(f),\, U}(u) = \{u_\beta : D(f_\beta) \subset D(f)\}$.

Zgodnie z powyższym przyporządkownie: $\{u_\beta,\ D(f_\beta) \subset D(f)\} \longrightarrow u_\alpha$ dla $f = f_\alpha$ określa izomorfizm $Q(D(f_\alpha))$ i $A_{f\alpha}$ gdzie $u_\alpha = \rho_{U,\, D(f\alpha)}(u)$.

Definicja snopa i snopa spektralnego

Definicja 3.6

Przedsnop F pierścieni na przestrzeni topologicznej X nazywamy snopem pierścieni, gdy spełnione są nastepujące warunki:

1^0 każdy lokalnie zerowy przekrój jest zerowy tzn. jeżeli $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i dla $s \in F(U)$ mamy, że $\rho_{U,\, Ui}(s) = 0$ to $s = 0$ gdzie U, U_i są zbiorami otwartymi,

2^0 F ma własność sklejania, to znaczy jeżeli U jest zbiorem otwartym przestrzeni X, $\hat{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ – pokryciem otwartym U, $S = \{s_i\}_{i \in I}$ – zgodną rodziną przekrojów na Û, to znaczy dla każdego $i, j \in I$ $\rho_{Ui,\, Ui \cap Uj}(s_i) = \rho_{Uj,\, Ui \cap Uj}(s_j)$ to istnieje przekrój $s \in F(U)$ taki, że $\rho_{U,\, Ui}(s) = s_i$ dla każdego $i \in I$.

Jeżeli założymy, że przekrój s w warunku 2^0 jest wyznaczony jednoznacznie, to warunek 1^0 będzie spełniony.

Twierdzenie 3.1

$Q_{\text{Spec A}}$ jest snopem na Spec A.

Dowód:

Najpierw sprawdzimy warunki definicji snopa, kiedy U, U_α są głównymi zbiorami otwartymi.

Przede wszystkim zauważmy, że warunki definicji snopa wystarczy sprawdzić dla $U = SpecA$. Ponieważ jeżeli $U = D(f)$, $U_\alpha = D(f_\alpha)$ to dla U i U_α warunki definicji snopa są spełnione jeżeli są spełnione dla Spec A_f i zbiorów $U_\alpha = D(f_\alpha)$, gdzie $\overline{f}_\alpha$ jest obrazem f_α przy kanonicznym homomorfiźmie $A \to A_{f\alpha}$.

Sprawdzamy warunek pierwszy definicji snopa dla $U_\alpha = D(f_\alpha)$, $\bigcup U_\alpha = Spec\ A$

Ponieważ Q jest przedsnopem to należy udowodnić, że jeżeli $u \in Q(Spec\ A) = A$ i $\rho_{SpecA,\ U\alpha}(u) = 0$ dla wszystkich U_α, to $u = 0.$

Warunek $\rho_{SpecA,\ U\alpha}(u) = 0$ oznacza, że:

$$f_\alpha^{n\alpha} u = 0 \tag{2}$$

dla wszystkich α i pewnych $n_\alpha \geq 0$.

Ponieważ $D(f_\alpha) = D(f_\alpha^{n\alpha})$, to $\bigcup D(f_\alpha^{n\alpha}) = Spec\ A$

a stąd wynika tożsamość:

$$f_{\alpha 1}^{n1} g_1 + \ldots\ldots + f_{\alpha r}^{nr} g_r = 1, \quad dla \quad g_1 \ldots\ldots g_r \in A.$$

Mnożąc równość *(2)* dla $\alpha = \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_r$ na $g_1 \ldots\ldots g_r$ i dodając stronami otrzymamy $u = 0.$ cnd

Sprawdzamy drugi warunek definicji snopa

Z quzizwartości przestrzeni SpecA (patrz twierdzenie 2.8) możemy ograniczyć się do skończonego pokryciem Spec A.

Niech $Spec\ A = D(f_1) \cup \ldots\ldots \cup D(f_r)$ i $u_i \in A_{fi}$, $u_i = \upsilon_i / f_i^n$

(wspólne n można wybrać z powodu skończonego pokrycia).

Ponieważ

$$D(f) \cap D(g) = D(fg)$$

zgodnie z określeniem

$$\rho_{D(fi),\,D(fi)\cap D(fj)}(u_i) = \rho_{D(fi)\,D(fi,fj)}(u_i) = \frac{\upsilon_i f_j^n}{(f_i f_j)^n}$$

z równości

$$(f_i f_j)^m \left(\upsilon_i f_j^n - \upsilon_j f_i^n\right) = 0.$$

biorąc $\upsilon_j f_j^m = w_j$, $m + n = l$ otrzymujemy:

$$u_i = w_i \big/ f_i^l, \quad w_i f_j^l = w_j f_i^l. \tag{3}$$

a stąd wynika tożsamość:

$$\sum f_i^l g_i = 1.$$

Załóżmy, że $u = \sum w_j g_j$. Ze względu na warunek (3) otrzymujemy

$$f_i^l u = \sum_j w_j g_j f_i^l = \sum_j w_i g_j f_j^l = w_i.$$

Dlatego $\rho_{SpecA,\,D(fi)}(u) = \upsilon_i / f_i^n = u_i$. cnd.

Spełnienie warunków definicji snopa dla dowolnych otwartych zbiorów wynika z przedstawionego dowodu i z nastepującego ogólnego faktu. Załóżmy, że w topologicznej przestrzeni X dana jest pewna baza $V = \{ V\tau \}$ otwartych zbiorów, zamknięta ze względu na przecięcia się i przedsnop pierścieni F na X spełnia warunki:

a) $F(U) = \varprojlim F(V_\alpha)$, gdzie granica odwrotna dotyczy $V_\alpha \in V$, $V_\alpha \subset U$ względem homomorfizmów $\rho_{V\alpha,V\beta}$.
b) $\rho_{U,\,V\alpha}$ pokrywa się z jedynym kanonicznym homomorfizmem granicy odwrotnej.

Te dwa warunki są spełnione dla przedsnopa Q_{SpecA} ; pierwszy wynika z definicji a drugi z równości $u_\alpha = \rho_{U,D(f\alpha)}(u)$.

Udowodnimy, że jeżeli są spełnione te warunki to F będzie snopem, jeżeli warunki określające snop są spełnione dla zbiorów $V_\tau \in V$.

1. Niech $U = \bigcup\limits_{\xi} U_\xi$, $U_\xi = \bigcup\limits_{\lambda} V_{\xi,\lambda}$, $V_{\xi,\lambda} \in V$. Jeżeli $\rho_{U,U\xi}(u) = 0$ dla wszystkich U_ξ, to $\rho_{U,V\xi,\lambda}(u) = 0$. Wprowadzając nowe indeksy $(\xi, \lambda) = \gamma$ otrzymamy $U = \bigcup V_\gamma$, $\rho_{U,V\gamma}(u) = 0$ dla wszystkich V_γ..

Dla pokazania, że $u = 0$ wystarczy ze względu na warunek b) sprawdzić, że $\rho_{U,V\alpha}(u) = 0$ dla wszystkich $V_\alpha \subset U$.

Ta własność wynika bezpośrednio biorąc homomorfizmy odpowiednich zbiorów

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & U \arrow[dl, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\ V_\alpha \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & V_\gamma \arrow[dl, phantom, sloped, "\supset"] \\ & V_\alpha \cap V_\gamma & \end{tikzcd}$$

Ponieważ

$$\rho_{V\alpha,\, V\alpha\cap V\gamma}\,(\rho_{U,\, V\alpha}(u)) = \rho_{U,\, V\alpha\cap V\gamma}(u) = \rho_{V\gamma,\, V\alpha\cap V\gamma}\,(\rho_{U,\, V\gamma}(u)) = 0$$

dla wszystkich V_γ a stąd $\rho_{U,\, V\alpha}(u) = 0$ ponieważ $V_\alpha = \bigcup (V_\alpha \cap V\gamma)$.

Natomiast dla zbiorów V_α warunek pierwszy definicji snopa zgodnie z założeniem jest spełniony.

Dla pokazania prawdziwości warunku drugiego definicji snopa niech $u_\xi \in F(U_\xi)$, $\rho_{U\xi 1,\, U\xi 1\cap U\xi 2}(u_{\xi 1}) = \rho_{U\xi 2,\, U\xi 1\cap U\xi 2}(u_{\xi 2})$, $U_\xi = \bigcup\limits_{\lambda} V_{\xi,\lambda}$.

Biorąc $\upsilon_{\xi,\lambda} = \rho_{U\xi,\, V\xi,\lambda}(u_\xi)$ i $\gamma = (\xi, \lambda)$ pokażemy, że

$$\rho_{V\gamma 1,\, V\gamma 1\cap V\gamma 2}(\upsilon_{\gamma 1}) = \rho_{V\gamma 2,\, V\gamma 1\cap V\gamma 2}(\upsilon_{\gamma 2}) \qquad (4)$$

Wynika ta równość rozpatrzenia homomorfizmów ρ odpowiednich zbiorów.

$$\begin{tikzcd}
& U_{\xi 1} & & U_{\xi 2} & \\
V_{\gamma 1} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & U_{\xi 1} \cap U_{\xi 2} \arrow[ul, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & V_{\gamma 2} \arrow[ul, phantom, sloped, "\supset"] \\
& & V_{\gamma 1} \cap V_{\gamma 2} \arrow[ull, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[urr, phantom, sloped, "\subset"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\gamma_1 = (\xi_1, \lambda_1)\ ,\ \gamma_2 = (\xi_2\ ,\ \lambda_2)$$

Lewa strona równości równa się

$$\rho_{U\xi 1,\, V\gamma 1 \cap V\gamma 2}(u_{\xi 1}) = \rho_{U\xi 1 \cap U\xi 2,\, V\gamma 1 \cap V\gamma 2}\ (\ \rho_{U\xi 1,\, U\xi 1 \cap U\xi 2}(u_{\xi 1})).$$

Oczywiście, że temu samemu jest równa prawa strona równości *(4).* Z równości *(4)* dla dowolnego $V_\alpha \in V$, $V_\alpha \subset U$ elementy $\rho_{V\gamma,\, V\alpha \cap V\gamma}(\upsilon_\gamma)$ spełniają drugi warunek definicji snopa a stąd wynika, że istnieje taki element $\upsilon_\alpha \in F\ (V_\alpha)$, *że* $\rho_{V\alpha,\, V\alpha \cap V\gamma}(\upsilon_\alpha) = \rho_{V\gamma,\, V\alpha \cap V\gamma}(\upsilon_\gamma)$. Oczywiste sprawdzenie dowodzi, że te elementy określają element u granicy odwrotnej $\varprojlim F\ (\ V_\alpha\ )$ dla którego $\rho_{U,\, V\alpha}(u) = \upsilon_\alpha$.

Dlatego też dla $u'_\xi = \rho_{U,\, U\xi}\ (u)$, $\rho_{U\xi,\, V\tau}(u'_\xi) = \rho_{U\xi,\, V\tau}(u_\xi)$ dla wszystkich $V_\tau \subset U_\xi$, $V_\tau \in V$ a stąd $u'_\xi = u_\xi$ co dowodzi twierdzenie.

Snop Q = Q$_{\text{Spec A}}$ można określić także w nastepujący sposób:

Za elementy $u \in Q\ (\ U\ )$, gdzie U jest zbiorem otwartym w Spec A, przyjmujemy takie rodziny elementów $\{\ u_x :\ u_x \in A_x\ ,\ \ x \in U\ \}$, które spełniają warunek:

- dla każdego punktu $y \in U$ istnieje taki zbiór otwarty główny $D(f) \subset U$, $y \in D(f)$ i taki element $u \in A_f$, że wszystkie elementy u_x *dla* $x \in D(f)$ są obrazami u przy kanonicznych homomorfizmach $A_f \to A_x$.

Gdy U' jest zbiorem otwartym w U, to wybierając z rodziny $\hat{U} = \{ u_x : u_x \in A_x , x \in U \}$ elementy u_x, dla $x \in U'$, otrzymamy rodzinę $\{u_x : u_x \in A_x, x \in U'\}$ i takie przyporządkowanie określa homomorfizm $\rho_{UU'}$.

ROZDZIAŁ IV

SCHEMATY

Definicja 4.1

Schematem afinicznym pierścienia A nazywamy przestrzeń (Spec A, $Q_{\text{Spec A}}$) i będziemy pisać „ schemat afiniczny Spec A”.

Definicja 4.2

Przestrzenią pierścieniowatą nazywa się parę (X, Q) składającą się z przestrzeni topologicznej X i snopa pierścieni Q.

Definicja 4.3

Morfizmem przestrzeni pierścieniowatych $\varphi : (X, Q_x) \to (Y, Q_y)$ nazywa się ogół odwzorowań, odwzorowanie ciągłe $\varphi : X \to Y$ i homomorfizmy $\Psi_u : Q_y (U) \to Q_x (\varphi^{-1} (U))$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset Y$. Dla których diagram

$$
\begin{tikzcd}
Q_x(\varphi^{-1}(V) \arrow[r, "\rho_{\varphi^{-1}(V),\, \varphi^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & Q_x(\varphi^{-1}(U) \arrow[d, "\varphi_U"] \\
Q_Y(V) \arrow[r, "\rho_{V,U}"] & Q_Y(U)
\end{tikzcd}
$$

dla dowolnych zbiorów otwartych $U \subset V$ jest przemienny.
PRZYKŁAD 7

Dowolny pierścień A określa przestrzeń pierścieniowatą (Spec A, Q), gdzie Q jest snopem strukturalnym. Dalej przestrzeń pierścieniowatą oznaczać będziemy przez Spec A. Pokażemy, że homomorfizm $\lambda : A \to B$ określa morfizm φ : Spec B → Spec A. Załóżmy, że $\varphi = {}^a\lambda$.

Dla $U = D(f) \subset Spec\, A$ mamy $\varphi^{-1}(U) = D(\lambda(f))$. Odwzorowanie $a / f^n \to \lambda(a) / \lambda(f)^n$ określa homomorfizm ψ_u pierścienia $A_f = Q_{Spec\, A}(U)$ w pierścień $B_{\lambda(f)} = Q_{Spec\, A}(\varphi^{-1}(U))$.

Takie homomorfizmy przedłużają się do homomorfizmów

$$\psi = Q_{Spec\, A}(U) \to Q_{Spec\, B}(\varphi^{-1}(U))$$

dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset Spec\ A$ i określają morfizm φ przestrzeni pierścieniowatych. W ten sposób powstaje wzajemna jednoznaczność między homomorfizmami pierścieni $A \to B$ i morfizmami przestrzeni pierścieniowej $Spec\ B \to Spec\ A$.

Przestrzeń pierścieniową (X, Q_x) oznaczać będziemy przez X a morfizm $X \to Y$, który oznaczony jest odwzorowaniami φ i ψ_u przez φ. Złożenie morfizmów $\varphi : X \to Y$ i $\varphi' : Y \to Z$ jest morfizmem $\varphi'\varphi : X \to Z$. Morfizm odwracalny nazywa się izomorfizmem.

Jeżeli (X, Q_x) jest przestrzenią pierścieniową i $U \subset X$ jest otwartym podzbiorem to ograniczając snop Q do U otrzymamy przestrzeń pierścieniową $(U, Q_{X/u})$. Zatem zbiór otwarty $U \subset X$ można rozpatrywać jako przestrzeń pierścieniową.

Definicja 4.4

Schematem nazywamy przestrzeń ze snopem pierścieni (X, Q_X), w której każdy punkt x ma otoczenie U takie, że $(U, Q_X/U)$ jest przestrzenią izomorficzną z pewnym schematem afinicznym.

Zbiór otwarty U o powyższej własności nazywamy zbiorem afinicznym schematu X..

Morfizm schematów określa się jako morfizm przestrzeni pierścieniowych.

Jeżeli X jest schematem, A – pierścieniem to morfizm $X \to Spec\ A$ określa się homomorfizmem $A \to Q_x(U)$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ tzn. sprowadza snopy Q_x do snopów algebr nad A.

Schemat X dla którego istnieje morfizm $X \to Spec\ A$ nazywa się schematem nad A. Morfizm schematów nad A określa się za pomocą diagramu przemiennego.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\ A & \end{tikzcd}$$

I odpowiadających homomorfizmów ψ_u, które są homomorfiamami algebr nad A.

Ponieważ dowolny pierścień jest algebrą nad pierścieniem liczb całkowitych Z, to i dowolny schemat jest schematem nad Z.

W taki sposób pojęcie schematu nad A jest uogólnieniem pojęcia schematu.

PRZYKŁAD SCHEMATU

PRZYKŁAD 8

Przykład 7 przestrzeni pierścieniowej pokazuje, że Spec A jest schematem dla dowolnego pierścienia A. Takie schematy nazywają się afinicznymi. Homomorfizmy pierścieni $\lambda : A \to B$ i morfizmy $\lambda : Spec\ B \to Spec\ A$ są w wzajemnej jednoznaczności.

BIBLIOGRAFIA

1. S. Lang
   ALGEBRA
   Warszawa 1984, PWN

2. I. R. Shafarevich
   OSNOWY ALGEBRAICZESKOJ GEOMETRII
   Izdatielstwo Moskwa 1988

3. E. Engelking
   TOPOLOGIA OGÓLNA
   Warszwa 1989, PWN

4. M Szurek
   PODSTAWOWE POJĘCIA WSPÓŁCZESNEJ GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ
   Warszawa 1988, PWN