Egzamin z matematyki dyskretnej - 12.06.2023
Część I. Test, Wersja A

Imię i nazwisko: ....

W każdym z poniższych punktów przyporządkuj wartość logiczną zdaniom oznaczonym literami a), b) i c). Gdy dane zdanie jest prawdziwe wstaw literę „T” w odpowiadającą mu kratkę ☐*, a gdy fałszywe – literę „N”. Za prawidłową odpowiedź dostaniesz 1 punkt, za nieprawidłową punkt ujemny (–1), za brak odpowiedzi 0 punktów.*

1. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{2, 6, 7, 8, 9\}$
   ☐ a) zbiory te są rozłączne
   ☐ b) $|(A \cap B) \cup C| = 6$
   ☐ c) zbiór $A \cup B$ ma dokładnie 2^7 podzbiorów
   ☐ d) liczba permutacji zbioru $A \cup B \cup C$ jest równa 9!

2. Liczba ciągów binarnych długości 10 mających dokładnie 8 jedynek
   ☐ a) jest równa współczynnikowi przy x^4 wielomianu $(1 + x)^{17}$
   ☐ b) jest liczbą podzielną przez 9
   ☐ c) jest równa liczbie rozkładów 10 identycznych kul do 9 rozróżnialnych szufladek
   ☐ d) jest równa liczbie permutacji zbioru $\{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}$

3. Ze zbioru dziewięciu różnych kul losujemy kolejno pięć zwracając każdorazowo kule do urny po wylosowaniu
   ☐ a) liczba możliwych wyników jest równa 6809
   ☐ b) odpowiednim schematem wyboru są kombinacje bez powtórzeń
   ☐ c) gdyby kolejność wylosowanych kul nie była istotna to byłoby $\frac{14!}{5!\,9!}$ wyników
   ☐ d) gdybyśmy nie zwracali kul do urny to liczba możliwych wyników wynosiłaby $\frac{9!}{4!}$

4. Dzieci w przedszkolu układają wieże z sześciennych klocków w kolorach białym, niebieskim i czerwonym
   ☐ a) jest dokładnie 14 różnych wież zbudowanych z dwóch klocków czerwonych, jednego niebieskiego i jednego białego
   ☐ b) jest dokładnie 81 możliwych różnych wież zbudowanych z 4 klocków
   ☐ c) jest dokładnie 90 różnych wież, do budowy których użyto po 2 klocki każdego koloru
   ☐ d) jest możliwe, że w grupie 20 dzieci budują wieże wysokości 3, wszystkie wieże byłyby różne

5. Dane są trzy zbiory A, B, C takie, że $|A| = 12, |B| = 11, |C| = 10$, $|A \cap B| = 7$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 1$
   - ☐ a) zbiory te są rozłączne
   - ☐ b) $|A \cup B| = |A \cup C|$
   - ☐ c) $|A \cup B \cup C| = 14$
   - ☐ d) $|A \cup C| = |A| + |C| + 2|A \cap C|$

6. Dana rekurencja $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0$
   - ☐ a) liczba 2 jest pierwiastkiem jej wielomianu charakterystycznego
   - ☐ b) ma głębokość 4
   - ☐ c) funkcja tworząca wyrazów ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wynosi $\frac{1+x}{6-11x+6x^2}$
   - ☐ d) wyraz a_4 jest równy -20

7. Funkcja tworząca $f(x)$ rozkładu jednakowych kul do 8 różnych szuflad
   - ☐ a) jest dana wzorem $f(x) = (1+x)^8$
   - ☐ b) jej współczynnik przy x^5 jest równy liczbie 5-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru 8-elementowego
   - ☐ c) przy x^4 ma współczynnik 330
   - ☐ d) jej współczynnik przy x^5 jest równy liczbie 5-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru 17-elementowego

8. Graf pełny o 11 wierzchołkach
   - ☐ a) jest grafem hamiltonowskim
   - ☐ b) jest grafem prostym
   - ☐ c) jako graf oznakowany ma 11^9 różnych drzew spinających
   - ☐ d) ma liczbę chromatyczną równą 10

9. Graf G określony przez swój zbiór wierzchołków $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i multizbiór krawędzi $E(G) = \{12, 14, 24, 25, 26, 34, 35, 46\}$
   - ☐ a) nie jest grafem prostym
   - ☐ b) suma stopni jego wszystkich wierzchołków wynosi 18
   - ☐ c) ma dwie składowe spójne
   - ☐ d) jego liczba chromatyczna wynosi $\chi(G) = 3$

10. Graf G o macierzy sąsiedztwa postaci $A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - ☐ a) jest spójny
    - ☐ b) jest grafem eulerowskim
    - ☐ c) nie jest drzewem
    - ☐ d) ma 9 krawędzi