Wstęp do analizy zespolonej – podstawowe pojęcia i fakty

Adam Doliwa

1 Liczby zespolone

1.1 Liczby zespolone i płaszczyzna zespolona

Zbiór *liczb zespolonych* $\mathbb{C}$ definiujemy jako zbiór par liczb rzeczywistych (a, b); w zbiorze tym określamy działania $+$, $\cdot$ w następujący sposób

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2),\\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2).\end{aligned}$$

Fakt 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot, (0,0), (1,0))$ *jest ciałem.*

Przyporządkowanie $\mathbb{R} \ni a \mapsto (a, 0) \in \mathbb{C}$ zanurza ciało liczb rzeczywistych w ciało liczb zespolonych. Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy przez i ($i^2 = -1$). Każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Re} z$, liczbę b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Im} z$. Liczbę $a - ib$ nazywamy *sprzężeniem* z i oznaczamy $\bar{z}$. *Modułem* z nazywamy liczbę $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ i oznaczamy ją $|z|$.

Fakt 1.2.

(a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

(b) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \quad z_2 \neq 0$,

(c) $|\mathrm{Re} z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im} z| \leq |z|$,

(d) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Argumentem liczby $z \neq 0$ nazywamy zbiór

$$\arg z = \{\phi \in \mathbb{R} : \mathrm{Re} z = |z| \cos\phi,\ \mathrm{Im} z = |z| \sin\phi\};$$

jedyną wartość argumentu z przedziału $]-\pi, \pi]$ nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Arg} z$. Przy pomocy argumentu zapisujemy liczbę zespoloną w *postaci trygonometrycznej*

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Fakt 1.3.

(a) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$,

(b) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

1.2 Ciągi i szeregi zespolone

Mówimy, że ciąg (z_n) liczb zespolonych jest zbieżny do granicy $c \in \mathbb{C}$ jeśli

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq N} \quad |z_n - c| < \epsilon.$$

Fakt 1.4. *Zbieżność ciągu zespolonego jest równoważna zbieżności ciągów jego części rzeczywistych i urojonych, ponadto*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re}\, c \quad \textit{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im}\, c.$$

Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny jeśli zbieżny jest ciąg jego sum częściowych $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$.

Fakt 1.5. *Zbieżność szeregu zespolonego* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *jest równoważna zbieżności szeregów rzeczywistych* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, *gdzie* $a_n = \mathrm{Re}\, c_n$ *oraz* $b_n = \mathrm{Im}\, c_n$.

Fakt 1.6 (Warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeśli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Fakt 1.7. *Jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny.*

Fakt 1.8 (Kryterium Cauchy'ego). *Jeśli* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, a gdy* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *jest rozbieżny.*

2 Funkcje zespolone

2.1 Funkcje zmiennej zespolonej

Odwzorowanie $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ nazywamy *funkcją zespoloną*. Funkcje rzeczywiste $u, v : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ określone jako

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy),$$

nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *urojoną* funkcji f.

Niech punkt z_0 będzie punktem skupienia zbioru D. Mówimy, że funkcja f ma granicę w punkcie z_0 równą c jeśli

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{z\in D} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - c| < \epsilon.$$

Fakt 2.1. *Funkcja zespolona ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ granicę $c = a + ib$ wtedy i tylko wtedy gdy jej części rzeczywista i urojona mają granice w punkcie (x_0, y_0) równe odpowiednio a oraz b.*

Mówimy, że funkcja zespolona f jest ciągła w punkcie $z_0 \in D$ jeśli

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{z\in D} \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Fakt 2.2. *Ciągłość funkcji zespolonej w punkcie $z_0 = x_0+iy_0$ jest równoważna ciągłości jej części rzeczywistej i urojonej w punkcie (x_0, y_0).*

Fakt 2.3. *Zachodzą analogiczne do przypadku rzeczywistego twierdzenia o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji ciągłych.*

2.2 Pochodna zespolona

Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, gdzie $r > 0$, nazywamy *otoczeniem punktu z_0 o promieniu r*. Dana funkcja zespolona f określona w pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja ta ma w punkcie z_0 *pochodną* równą $f'(z_0)$, jeśli istnieje granica

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Fakt 2.4. *Jeśli funkcja f ma w z_0 pochodną, to jest w tym punkcie ciągła.*

Fakt 2.5. *Zachodzą analogiczne do przypadku rzeczywistego twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji różniczkowalnych.*

Fakt 2.6. *Jeśli funkcja f ma w punkcie z_0 pochodną $f'(z_0)$ oraz funkcja g ma w punkcie $w_0 = f(z_0)$ pochodną $g'(w_0)$, to superpozycja $g \circ f$ tych funkcji ma w z_0 pochodną równą*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Twierdzenie 2.7. *Funkcja f ma w punkcie z_0 pochodną zespoloną $f'(z_0) = P + iQ$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcje u, v są różniczkowalne w (x_0, y_0) i ich pochodne cząstkowe spełniają warunki (Cauchy'ego—Riemanna)*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = P, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = Q.$$

Fakt 2.8. *Jeśli funkcje u, v mają w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pochodne cząstkowe ciągłe w tym punkcie i spełniające w nim warunki Cauchy'ego—Riemanna, to funkcja $f = u + iv$ ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ pochodną.*

Uwaga. Warunki Cauchy'ego—Riemanna są równoważne równaniu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \text{gdzie} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Twierdzenie 2.9. *Niech funkcja zespolona f ma pochodną w pewnym otoczeniu punktu z_0, ciągłą w z_0 i spełniającą warunek $f'(z_0) \neq 0$. Wtedy istnieje otoczenie U punktu z_0 na którym funkcja f jest jednokrotna oraz otoczenie V punktu $w_0 = f(z_0)$ zawarte w $f(U)$. Ponadto funkcja g odwrotna do f, określona na $f(U)$ ma pochodną w punkcie w_0 i*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Uwaga. Pokażemy później, że istnienie pochodnej zespolonej w otoczeniu punktu z_0 implikuje ciągłość pochodnej w tym otoczeniu.

Mówimy, że funkcja zespolona f jest *holomorficzna* w punkcie z_0 jeśli jest określona w pewnym otoczeniu tego punktu i ma pochodną w każdym punkcie tego otoczenia. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w zbiorze D jeśli jest holomorficzna w każdym punkcie tego zbioru. Zbiór nazywamy *otwartym* jeśli wraz z każdym swoim punktem zawiera pewne jego otoczenie.

Fakt 2.10. *Jeśli funkcje u, v mają w zbiorze otwartm D pochodne cząstkowe ciągłe i spełniające warunki Cauchy'ego—Riemanna, to funkcja $f = u + iv$ jest holomorficzna w D.*

2.3 Funkcje harmoniczne

Niech $u : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły na otwartym podzbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcję u nazywamy *harmoniczną* jeśli spełnia w D równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Twierdzenie 2.11. *Jeśli funkcja holomorficzna f ma ciągłą drugą pochodną to część rzeczywista i urojona funkcji f są funkcjami harmomicznymi. Odwrotnie, każda funkcja harmoniczna jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej.*

Uwaga. Jak pokażemy później funkcja holomorficzna ma pochodne dowolnego rzędu, więc zalożenie o istnieniu i ciągłości drugiej pochodnej można opuścić.

3 Szeregi potęgowe

3.1 Ciągi i szeregi funkcji zespolonych

Dany ciąg funkcji zespolonych $f_n : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$. Zbieżność (punktową) ciągu (f_n) do funkcji $f : D \to \mathbb{C}$ określamy jako zbieżność ciągu liczbowego $(f_n(z))$ do $f(z)$ w każdym punkcie $z \in D$. Mówimy, że ciąg (f_n) jest *zbieżny jednostajnie* na D do funkcji f jeśli

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq N} \bigwedge_{z \in D} \quad |f(z) - f_n(z)| < \epsilon.$$

Twierdzenie 3.1. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Twierdzenie 3.2 (Cauchy). *Ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na D wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq N} \bigwedge_{z\in D} |f_n(z) - f_N(z)| < \epsilon.$$

Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ nazywamy zbieżnym (jednostajnie zbieżnym) jeśli zbieżny (jednostajnie zbieżny) jest odpowiedni ciąg funkcyjny sum częściowych.

Fakt 3.3. *Suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Twierdzenie 3.4 (Weierstrass). *Dany zbieżny szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Jeśli dla każdego $z \in D$ i każdego n, $|f_n(z)| \leq a_n$ to szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na D.*

3.2 Funkcja dana szeregiem potęgowym

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach a_n nazywamy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Twierdzenie 3.5. *Jeśli szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie $z_1 \neq z_0$ to jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$ dla dowolnego $0 < \rho < |z_1 - z_0|$.*

Wniosek 3.6. *Jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny w punkcie z_2 to jest rozbieżny w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > |z_2 - z_0|$.*

Największe koło $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, w którym szereg potęgowy jest zbieżny nazywamy *kołem zbieżności* szeregu, a jego promień nazywamy *promieniem zbieżności* tego szeregu.

Twierdzenie 3.7 (Cauchy–Hadamard). *Jeśli $\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ to promień zbieżności R szeregu potęgowego wyraża się wzorem*

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad \lambda = 0, \\ 1/\lambda & \text{dla} \quad 0 < \lambda < +\infty, \\ 0 & \text{dla} \quad \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Twierdzenie 3.8. *Szereg potęgowy jest funkcją holomorficzną w swoim kole zbieżnosci a jego pochodna wyraża się wzorem*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Wniosek 3.9. *Funkcja dana szeregiem potęgowym ma w kole zbieżności pochodne dowolnego rzędu.*

Twierdzenie 3.10 (Abel). *Jeśli funkcja f dana jest szeregiem potęgowym zbieżnym w punkcie brzegowym z_1 swego koła zbieżności do sumy s, to istnieje granica* $\lim_{z\to z_1} f(z) = s$, *gdy z dąży do z_1 po dowolnej drodze zawartej między dwiema dowolnymi cięciwami tego koła wychodzącymi z punktu z_1.*

Funkcją pierwotną funkcji zespolonej $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ określonej na zbiorze otwartym D nazywamy funkcję F mającą pochodną w D taką, że $F'(z) = f(z)$ w każdym punkcie $z \in D$.

Fakt 3.11. *Szereg potęgowy posiada w swoim kole zbieżnosci funkcję pierwotną daną wzorem*

$$F(z) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

4 Całki zespolone

4.1 Całka zwyczajna i krzywoliniowa

Dana funkcja $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{C}$ zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych, całkę funkcji f w przedziale $[a,b]$ określamy jako odpowiednią kombinację całek jej części rzeczywistej u i urojonej v

$$\int_a^b f\,dt = \int_a^b u\,dt + i\int_a^b v\,dt.$$

Fakt 4.1. *Jeśli f jest ograniczona i ciągła za wyjątkiem skończonej liczby punktów to jest całkowalna.*

Fakt 4.2. *Jeśli f jest ciągła w zbiorze wartości funkcji $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, mającej ciągłą pochodną oraz $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ to*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(\tau))\phi'(\tau)\,d\tau.$$

Fakt 4.3. *Jeśli f jest funkcją całkowalną na $[a, b]$ to także $|f|$ jest całkowalna na $[a, b]$ oraz*

$$\Big|\int_a^b f\,dt\Big| \leq \int_a^b |f|\,dt.$$

Krzywą sparametryzowaną regularną γ nazywamy odwzorowanie $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ mające ciągłą i nieznikającą pochodną. Krzywą przeciwną do krzywej γ nazywamy krzywą określoną odwzorowaniem $z_1 : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ danym wzorem $z_1(t) = z(-t)$ i oznaczamy $-\gamma$. Jeśli f jest funkcją ciągłą na obrazie krzywej to liczbę

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt,$$

nazywamy *całką krzywoliniową* funkcji f wzdłuż krzywej sparametryzowanej γ. Definicję całki krzywoliniowej możemy uogólnić na krzywe kawałkami regularne.

Fakt 4.4.

(a) $\int_\gamma (a_1 f_1 + a_2 f_2)dz = a_1 \int_\gamma f_1\,dz + a_2 \int_\gamma f_2\,dz$,

(b) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz$

(c) $\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz$.

Dwie krzywe sparametryzowane regularne γ i $\tilde{\gamma}$ określone funkcjami $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\tilde{z} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ nazywamy równoważnymi jeśli istnieje rosnąca surjekcja $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mająca ciągłą pochodną oraz $\tilde{z} = z \circ \phi$.

Fakt 4.5. *Całki krzywoliniowe tej samej funkcji wzdłuż dróg równoważnych są równe.*

Fakt 4.6. *Jeśli M jest kresem górnym funkcji $|f|$ na obrazie krzywej γ to*

$$\Big|\int_\gamma f\,dz\Big| \le M|\gamma|,$$

gdzie $|\gamma|$ oznacza długość krzywej γ

$$|\gamma| = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |z'(t)|dt.$$

Fakt 4.7. *Jeśli ciąg (f_n) funkcji ciągłych na krzywej regularnej γ jest jednostajnie zbieżny na γ do funkcji f to*

$$\int_\gamma f\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n\,dz.$$

Twierdzenie 4.8. *Funkcja zespolona f ciągła w zbiorze otwartym D ma w nim funkcję pierwotną F wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej zamkniętej krzywej regularnej γ przebiegającej w D mamy $\int_\gamma f dz = 0$. Wtedy też dla dowolnej krzywej γ_{AB} łączącej punkty $A, B \in D$ i przebiegającej w D*

$$\int_{\gamma_{AB}} f\,dz = F(B) - F(A).$$

4.2 Twierdzenie Cauchy'ego

Lemat 4.9 (Goursat). *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w zbiorze otwartym D to całka funkcji f wzdłuż brzegu dowolnego trójkąta zawartego w D znika.*

Twierdzenie 4.10 (Cauchy). *Dany ograniczony zbiór otwarty D o brzegu ∂D składającym się ze skończonej liczby krzywych zamkniętych kawałkami regularnych. Jeśli f jest holomorficzna w domknięciu $\overline{D} = D \cup \partial D$ zbioru D to*

$$\int_{\partial D} f\,dz = 0.$$

Uwaga. Krzywe zamknięte składające się na brzeg obszaru D są zorientowane dodatnio, tzn. przy obiegu krzywej obszar D jest po lewej stronie.

Twierdzenie 4.11 (Wzór całkowy Cauchy'ego). *Dany ograniczony zbiór otwarty D o brzegu ∂D składającym się ze skończonej liczby krzywych zamkniętych kawałkami regularnych. Jeśli f jest holomorficzna w $\overline{D}$ jej wartość w dowolnym punkcie $z \in D$ wyraża się całką*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Twierdzenie 4.12 (Rozwijalność funkcji holomorficznej w szereg potęgowy). *Dany ograniczony zbiór otwarty D o brzegu ∂D składającym się ze skończonej liczby krzywych zamkniętych kawałkami regularnych. Jeśli f jest holomorficzna w $\overline{D}$ to jest rozwijalna w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in D$ w szereg potęgowy zbieżny w kole o środku z_0, którego promień jest nie mniejszy niż odległość punktu z_0 od brzegu zbioru D. Współczynniki rozwinięcia dane są wzorem*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\, d\zeta}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Uwaga. W powyższym wzorze kontur całkowania ∂D możemy zastąpić brzegiem koła zawartego w D o środku w z_0.

Wniosek 4.13. *Funkcja holomorficzna w zbiorze otwartym D ma w każdym punkcie tego zbioru pochodną dowolnego rzędu.*

Twierdzenie 4.14 (Morera). *Jeśli f jest funkcją ciągłą w zbiorze otwartym D i całka funkcji f wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w D znika, to f jest funkcją holomorficzną w D.*

Wniosek 4.15 (Nierówności Cauchy'ego). *Niech funkcja f będzie holomorficzna w kole domkniętym $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ i niech jej moduł nie przekracza w tym kole wartości M. Wtedy współczynniki a_n rozwinięcia f w punkcie z_0 spełniają nierówności*

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Twierdzenie 4.16 (Liouville). *Funkcja holomorficzna na $\mathbb{C}$ i ograniczona jest funkcją stałą.*

Twierdzenie 4.17 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian $w(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ ma w $\mathbb{C}$ dokładnie n miejsc zerowych licząc z krotnościami.*

Twierdzenie 4.18 (Weierstrass). *Dany ciąg (f_n) funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym D zbieżny niemal jednostajnie w D. Wtedy granica f ciągu (f_n) jest funkcją holomorficzną w D oraz dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg pochodnych $(f_n^{(m)})$ jest zbieżny do $f^{(m)}$. Ponadto zbieżność ciągu pochodnych jest również niemal jednostajna w D.*

5 Szereg Laurenta i residua

5.1 Szereg Laurenta

Szeregiem Laurenta o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ i współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, nazywamy szereg postaci

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

nazywamy *częścią regularną* szeregu Laurenta, a szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

nazywamy *częścią główną* szeregu Laurenta. Zbieżność szeregu Laurenta definiujemy jako zbieżność jego części regularnej i części głównej jednocześnie.

Fakt 5.1. *Szereg Laurenta jest zbieżny w pierścieniu $r < |z - z_0| < R$, gdzie $r = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$, $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, oraz przedstawia w nim funkcję holomorficzną.*

Twierdzenie 5.2. *Jeśli funkcja zespolona f jest holomorficzna w pierścieniu $r_1 < |z - z_0| < r_2$ to f jest rozwijalna w szereg Laurenta o środku w z_0 i współczynnikach*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdzie $C(r)$ jest dowolnym okręgiem o środku w z_0 i promieniu r takim, że $r_1 < r < r_2$.

5.2 Izolowane punkty osobliwe

Punkt z_0 nazywamy *punktem osobliwym izolowanym* funkcji zespolonej f jeśli funkcja f jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie $0 < |z - z_0| < \rho$ tego punktu.

Fakt 5.3. *Jeśli z_0 jest punktem izolowanym osobliwym funkcji f to w pewnym sąsiedztwie z_0 funkcja ta jest rozwijalna w szereg Laurenta.*

Jeśli część główna rozwinięcia w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu izolowanego osobliwego z_0 znika, to z_0 nazywamy punktem *pozornie osobliwym.*

Fakt 5.4. *Funkcja f holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 ma osobliwość pozorną w tym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy istnieje granica $\lim_{z\to z_0} f(z)$.*

Fakt 5.5. *Jeśli funkcja f jest holomorficzna i ograniczona w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 to ma w tym punkcie osobliwość pozorną.*

Jeśli część główna rozwinięcia w szereg Laurenta ma postać

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad a_{-k} \neq 0,$$

to z_0 nazywamy *biegunem rzędu k.*

Fakt 5.6. *Funkcja f holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 ma w tym punkcie biegun rzędu k wtedy i tylko wtedy gdy istnieje niezerowa granica $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^k f(z)$.*

Mówimy, że funkcja f jest *meromorficzna w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$*, gdy jest holomorficzna w sąsiedztwie tego punktu i punkt z_0 jest punktem pozornie osobliwym lub biegunem funkcji f. Jeśli f nie znika w tożsamościowo w żadnym sąsiedztwie tego punktu to możemy ją rozwinąć w szereg Laurenta postaci

$$\sum_{n=\ell}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_\ell \neq 0,$$

gdzie ℓ jest liczbą całkowitą nazywaną *rzędem funkcji f w punkcie z_0*.

Twierdzenie 5.7. *Na to, by funkcja f była meromorficzna w punkcie z_0 i miała w tym punkcie rząd ℓ, potrzeba i wystarcza, by w pewnym sąsiedztwie Ω punktu z_0 dała się na przedstawić w postaci*

$$f(z) = (z - z_0)^{\ell} h(z),$$

gdzie h jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $\Omega \cup \{z_0\}$ i różną od 0 w każdym punkcie tego otoczenia.

Jeśli część główna rozwinięcia w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu izolowanego osobliwego z_0 ma nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera, to z_0 nazywamy punktem *istotnie osobliwym*.

Twierdzenie 5.8 (Casorati-Sochocki-Weierstrass). *Zbiór wartości przyjmowanych przez funkcję f w dowolnym sąsiedztwie Ω jej punktu istotnie osobliwego z_0 leży wszędzie gęsto na płaszczyźnie, tzn. dla dowolnego $\epsilon > 0$ i dowolnego $w \in \mathbb{C}$ istnieje takie $z \in \Omega$, że $|f(z) - w| < \epsilon$.*

5.3 Residuum funkcji

Jeśli funkcja zespolona f jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 to *residuum* funkcji f w tym punkcie nazywamy współczynnik a_{-1} rozwinięcia w szereg Laurenta funkcji f w z_0 i oznaczamy $\mathrm{res}_{z_0} f$.

Fakt 5.9. *Jeśli funkcja f ma w z_0 biegun rzędu k, to*

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}.$$

Twierdzenie 5.10. *Dany ograniczony zbiór otwarty D o brzegu ∂D składającym się ze skończonej liczby krzywych zamkniętych kawałkami regularnych. Jeśli f jest holomorficzna w $\overline{D}$ poza skończoną ilością punktów $z_1, z_2, \ldots, z_p$ leżących w D to*

$$\int_{\partial D} f\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{res}_{z_k} f.$$

6 Punkt w nieskończoności

6.1 Sfera Riemanna

Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^3$ sferę $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta\}$ mającą średnicę 1 i styczną do płaszczyzny $\zeta = 0$ (identyfikowanej z $\mathbb{C}$) w początku układu współrzędnych. Obrazem sferycznym $Z = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ punktu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ nazywamy punkt przecięcia sfery i prostej łączącej z i punkt $P = (0, 0, 1) \in S$

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Odwzorowanie to (rzut stereograficzny) ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość zbiorów $\mathbb{C}$ i $S \setminus \{P\}$

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}.$$

Płaszczyznę $\mathbb{C}$ uzupełniamy nowym punktem oznaczanym ∞ przyporządkowanym w rzucie stereograficznym punktowi P.

Mówimy, że ciąg zespolony (z_n) ma granicę ∞ jeśli ciąg jego obrazów sferycznych dąży do P, czyli

$$\bigwedge_{R>0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq N} \quad |z_n| > R.$$

6.2 Zachowanie się funkcji w punkcie ∞

Jeśli funkcja zespolona f jest holomorficzna w sąsiedztwie $R < |z| < \infty$, punktu ∞, to wówczas funkcja $f(1/z)$ jest holomorficzna w sąsiedztwie $0 < |z| < 1/R$ punktu 0.

Mówimy, że funkcja f holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu ∞ ma w nieskończoności (i) punkt regularny, (ii) biegun rzędu k, (iii) punkt istotnie osobliwy – zależnie od tego, czy funkcja $f(1/z)$ ma w punkcie 0 osobliwość usuwalną, biegun rzędu k, czy punkt istotnie osobliwy. W rozwinięciu w szereg Laurenta funkcji holomorficznej w sąsiedztwie punktu ∞

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n},$$

pierwszy szereg jest częścią osobliwą a drugi częścią regularną.

Residuum w nieskończoności funkcji f holomorficznej w sąsiedztwie ∞ nazywamy liczbę $-a_{-1}$ jej rozwinięcia w szereg Laurenta o środku w ∞ i oznaczamy $\mathrm{res}_\infty f$.

Fakt 6.1. *Jeśli funkcja f jest holomorficzna w sąsiedztwie $R < |z| < \infty$ punktu ∞ to*

$$\mathrm{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C(r)} f\,dz,$$

gdzie $C(r)$ jest dowolnym okręgiem o środku w 0 i promieniu $r > R$.

Twierdzenie 6.2. *Jeśli funkcja zespolona f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ za wyjątkiem skończonej liczby punktów to suma jej residuów, łącznie z residuum w nieskończoności, jest równa zeru.*

Podręczniki

1. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1979.
2. J. Chądzyński, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 2000.
3. B. W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, PWN, Warszawa 1974.
4. J. Krzyż, *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa 1975.