

# **Wprowadzenie do grafiki maszynowej. Wprowadzenie do rzutowania**

Aleksander Denisiuk  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski  
Olsztyn, ul. Słoneczna 54  
[denisjuk@matman.uwm.edu.pl](mailto:denisjuk@matman.uwm.edu.pl)

# ***Wprowadzenie do rzutowania***

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

# Rzutowanie

# Dwa typy rzutowania

## Rzutowanie

### ❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

- Równoległe
- Perspektywiczne

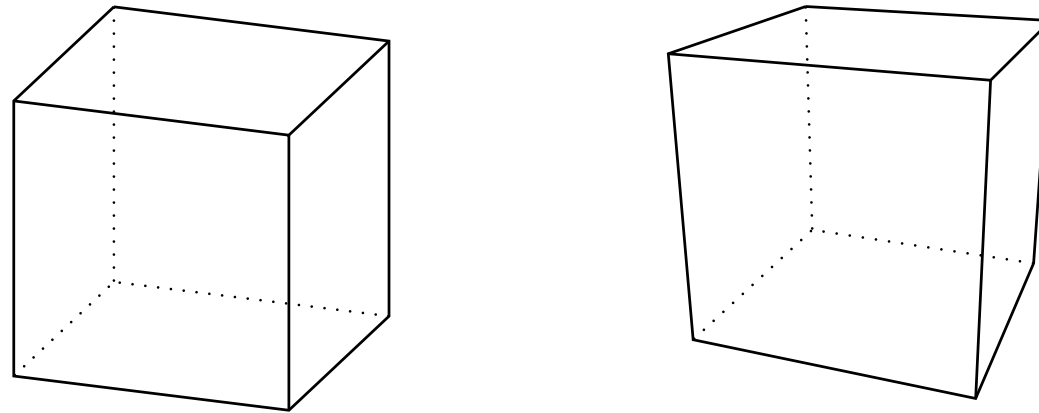


Figure II.18: The cube on the left is rendered with an orthographic projection. The one on the right with a perspective transformation. With the orthographic projection, the rendered size of a face of the cube is independent of its distance from the viewer; compare, for example, the front and back faces. Under a perspective transformation, the closer a face is, the larger it is rendered.

# Ukryte powierzchnie

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania

- ❖ Ukryte powierzchnie

- ❖ Rzutowanie równoległe

- ❖ Rzutowanie perspektywiczne

- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

- Algorytm malarza
- Algorytm buforu głębokości

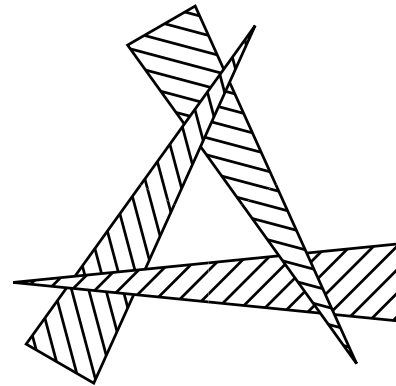


Figure I.12: Three triangles. The triangles are turned obliquely to the viewer so that the top portions of each triangle is in front of the base portion of another.

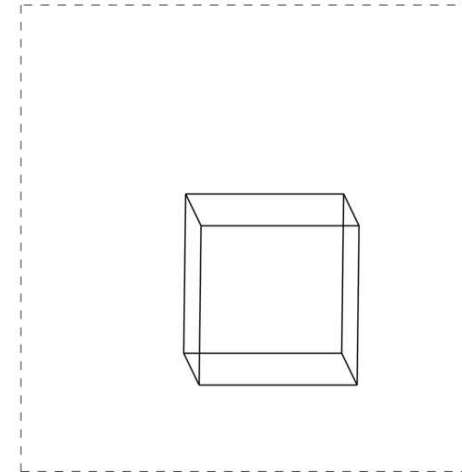
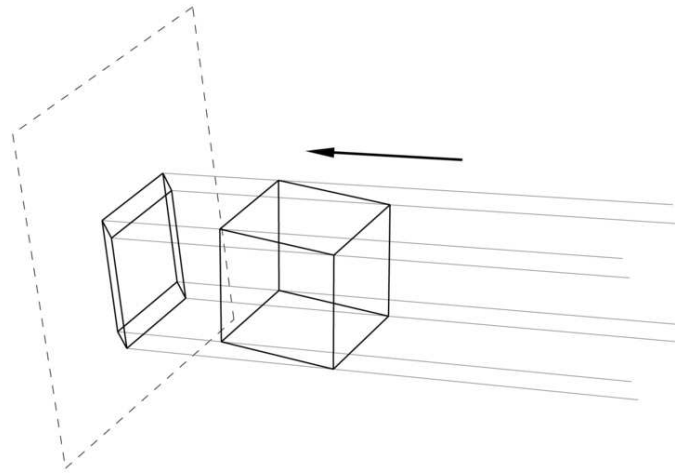
# Rzutowanie równoległe

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów



# Macierz rzutowania równoległego

## Rzutowanie

❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

$$l \leq x \leq r, \quad \text{left, right}$$

$$b \leq y \leq t, \quad \text{bottom, top}$$

$$n \leq -z \leq f, \quad \text{near, far}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

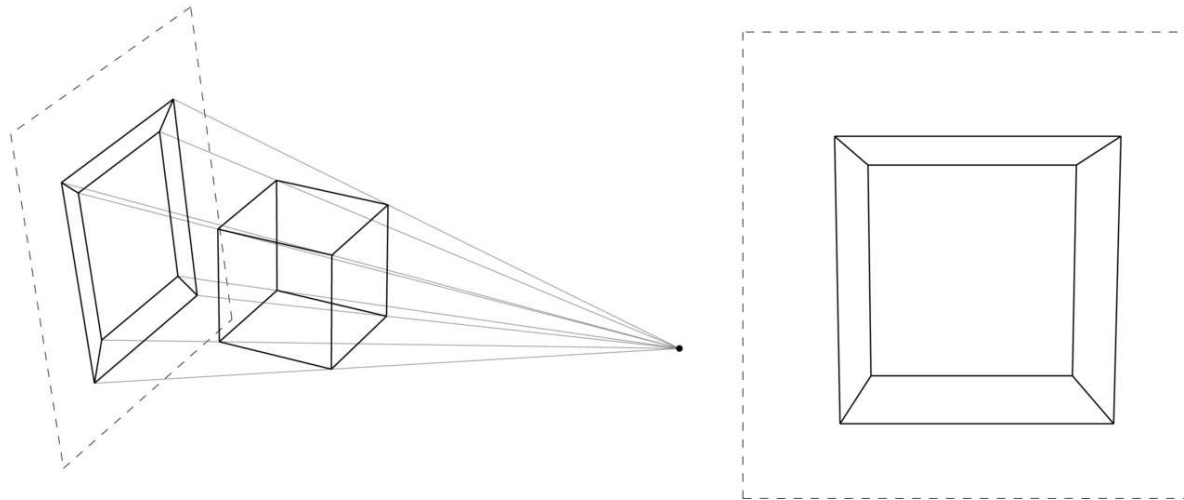
# Rzutowanie perspektywiczne

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów





# Rzutowanie perspektywiczne

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

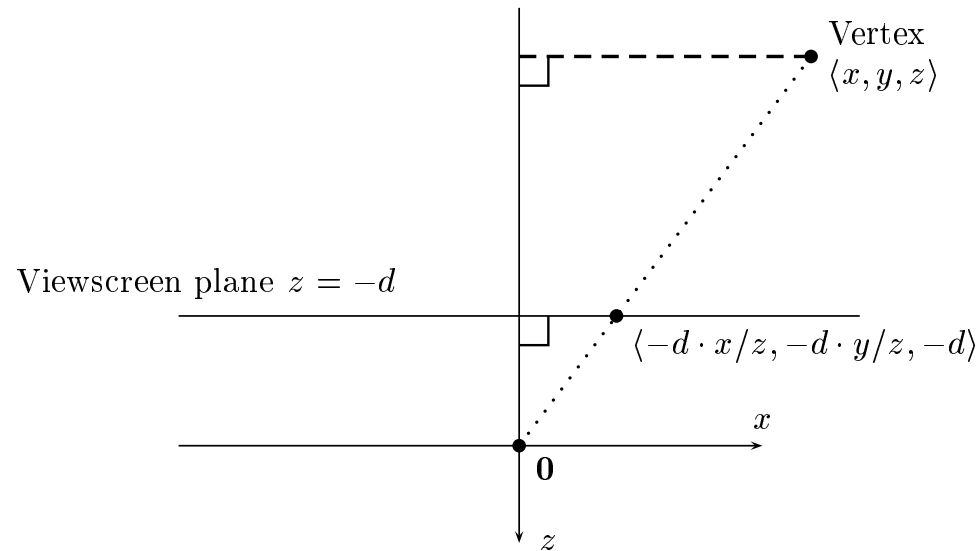


Figure II.19: Perspective projection onto a viewscreen at distance  $d$ . The viewer is at the origin, looking in the direction of the negative  $z$  axis. The point  $\langle x, y, z \rangle$  is perspectively projected onto the plane  $z = -d$ , which is at distance  $d$  in front of the viewer at the origin.

# Funkcja głębokości

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ **Rzutowanie perspektywiczne**
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

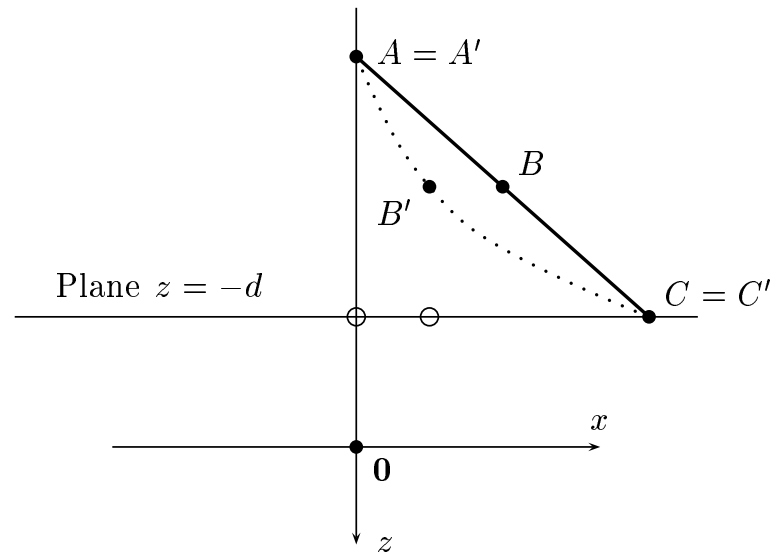


Figure II.20: The undesirable transformation of a line to a curve. The mapping used is  $\langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -d \cdot x/z, -d \cdot y/z, z \rangle$ . The points  $A$  and  $C$  are fixed by the transformation and  $B$  is mapped to  $B'$ . The dotted curve is the image of the line segment  $AC$ . (The small unlabeled circles show the images of  $A$  and  $B$  under the mapping of figure II.19.)

●  $\text{głębokość}(z) = A + \frac{B}{z}$

# Macierz rzutowania

## Rzutowanie

❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

- $(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{dx}{z}, -\frac{dy}{z}, A + \frac{B}{z}\right)$
- we współrzędnych jednorodnych  
 $(x : y : z : 1) \mapsto (dx : dy : -Az - B : -z)$
- macierz:

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Bryła widzenia

## Rzutowanie

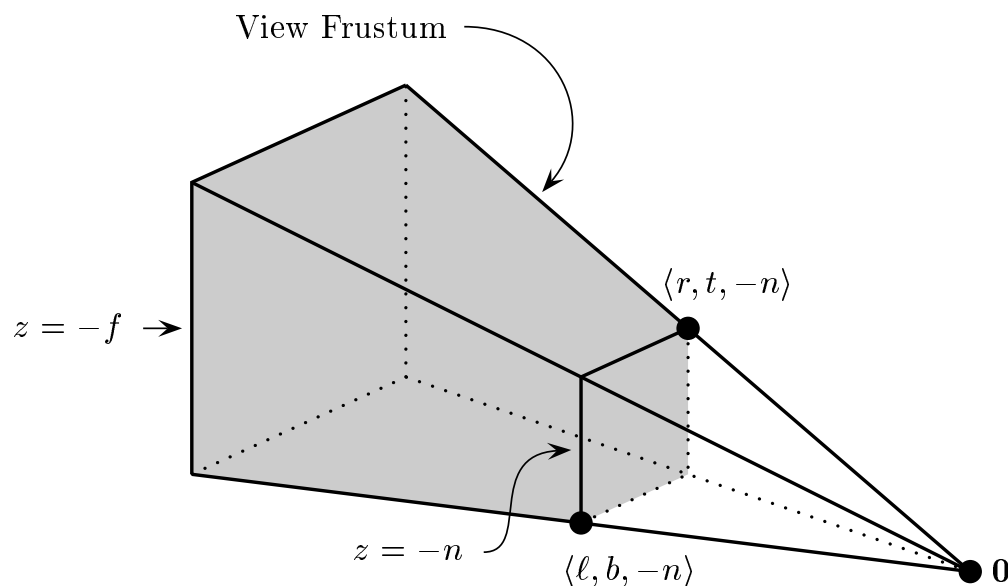
- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe

## ❖ Rzutowanie perspektywiczne

- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów



- głębokość( $z$ ) =  $A + \frac{B}{z}$ , gdzie  $A = \frac{f+n}{f-n}$ ,  $B = \frac{2fn}{f-n}$ .
- macierz: 
$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

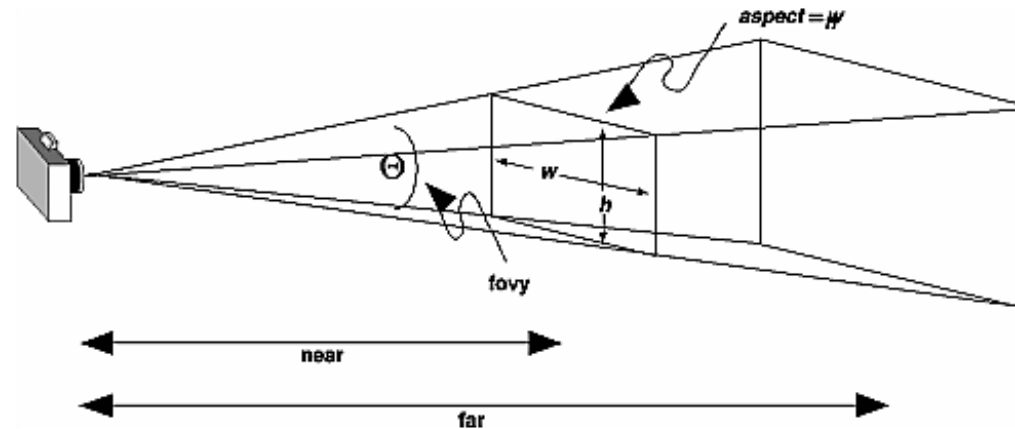
# Macierz rzutowania

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów



- $\theta$  — kąt widzenia
- $a = \frac{w}{h}$  — *aspect ratio*, format obrazu
- macierz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Macierze w modelowaniu

## Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne

## ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

- `Macierz ModelMatrix`
- `Macierz ViewMatrix`
- `Macierz ProjectionMatrix`

Rzutowanie

---

Case study:  
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

---

## Case study: modelowanie cienia

# Zastosowanie rzutowania: cień

## Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

### ❖ Cień

### ❖ Z-fighting

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1 - y/y_0}, 0, \frac{z}{1 - y/y_0} \right)$$

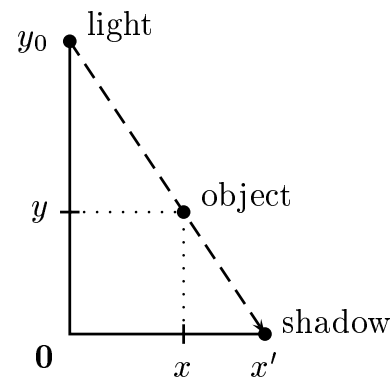


Figure II.22: A light is positioned at  $\langle 0, y_0, 0 \rangle$ . An object is positioned at  $\langle x, y, z \rangle$ . The shadow of the point is projected to the point  $\langle x', 0, z' \rangle$ , where  $x' = x/(1 - y/y_0)$  and  $z' = z/(1 - y/y_0)$ .



Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Z-fighting

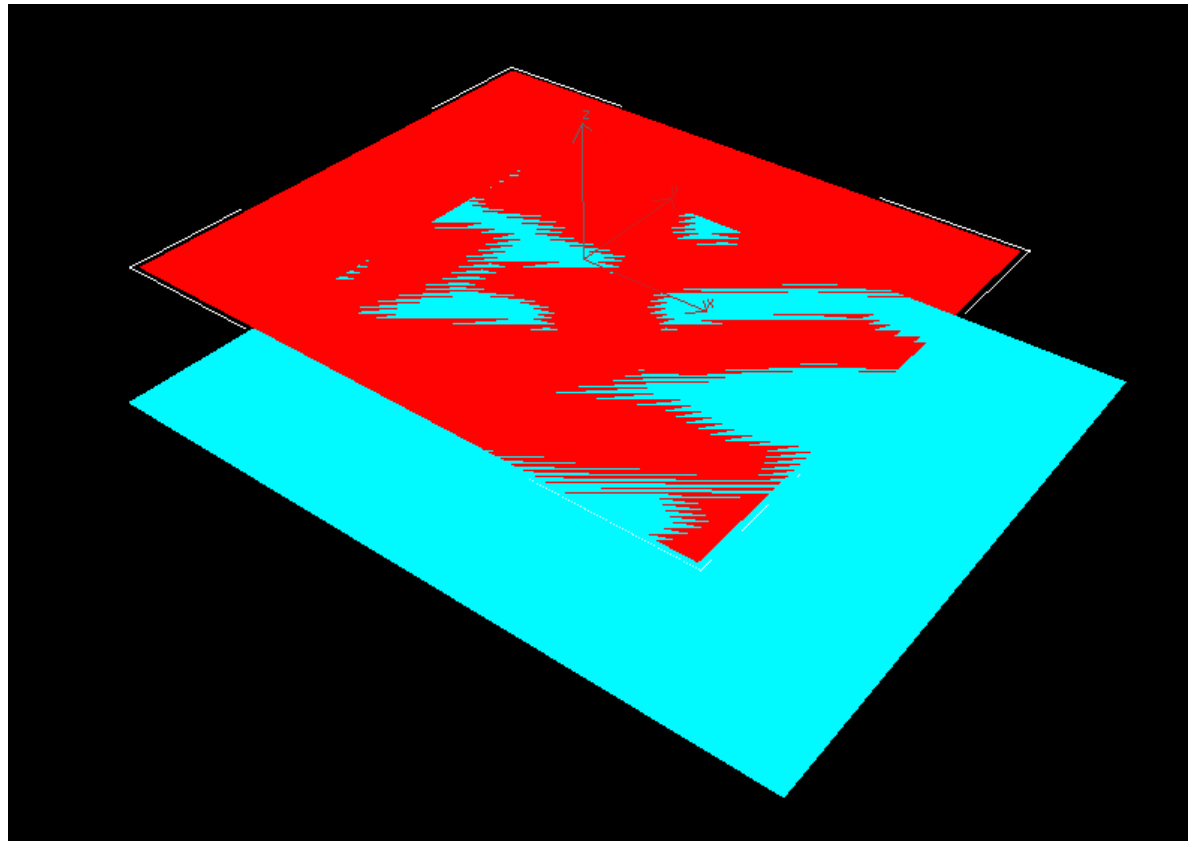
Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów



# *Z-fighting. Przykład w blenderze*

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

## Przykład w blenderze

Rzutowanie

---

Case study:  
modelowanie cienia

---

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

- ❖ Transformacja  
perspektywiczna
- ❖ Cztery punkty

## Case study: przekształcenie rzutowe obrazów

# Transformacja perspektywiczna

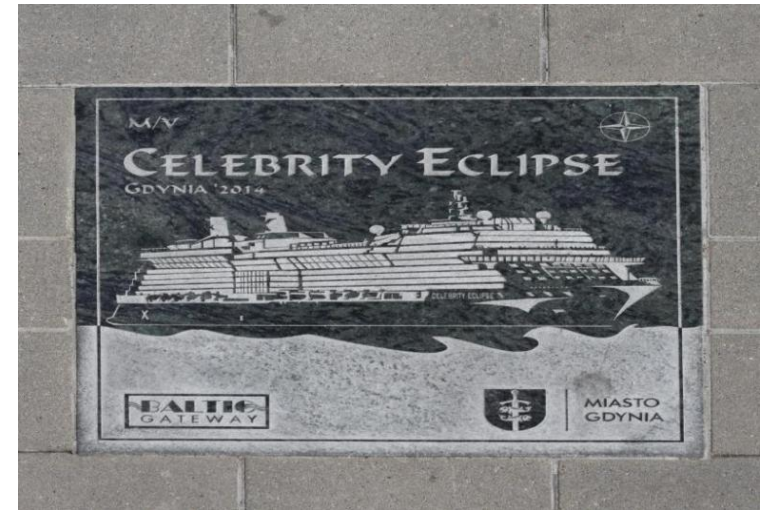
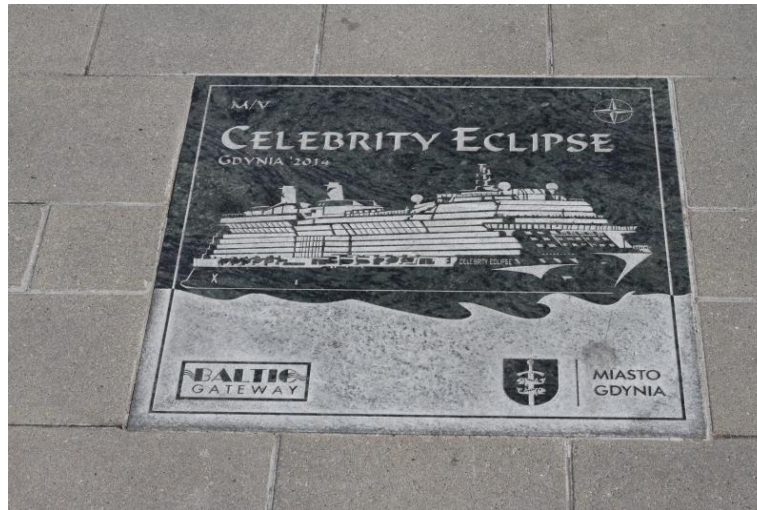
## Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty



- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- ◆ zazwyczaj wymaga się  $\det A \neq 0$ .

- czemu?

# Transformacja po czterech punktach

Rzutowanie

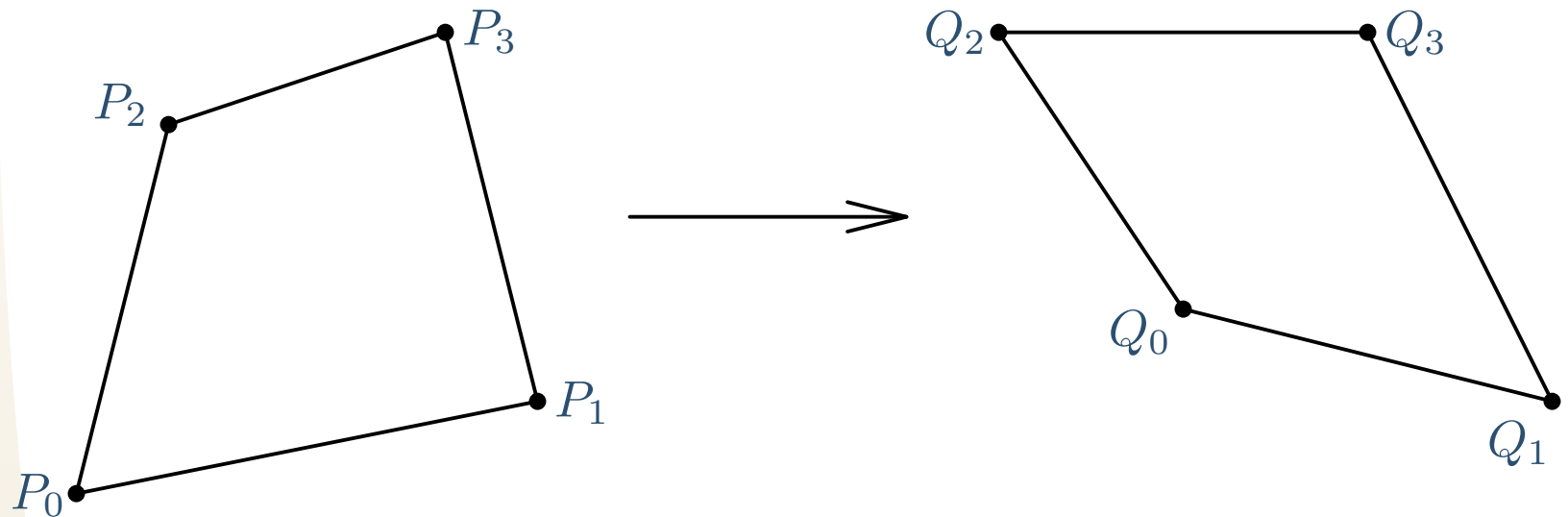
Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Dane są dwie czwórki punktów na płaszczyźnie:  
 $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  oraz  $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ .
  - ◆  $P_j = (x_j, y_j)$ ,  $Q_j = (s_j, t_j)$ ,  $j = 0, \dots, 3$ .
- Znaleźć taką transformację perspektywiczną  
 $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , że  $A(P_j) = Q_j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ .



# Metoda algebraiczna

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych
  - ◆ 8 równań
  - ◆ 9 zmiennych

# Metoda geometryczna

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

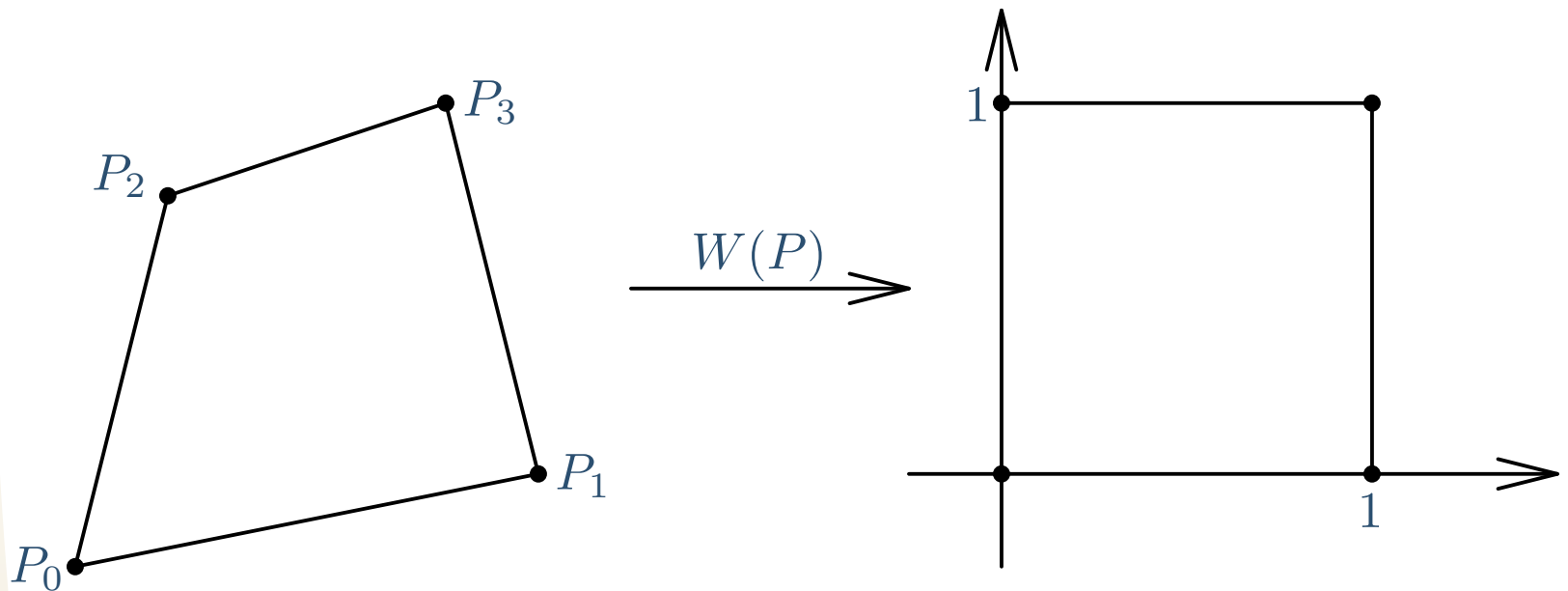
Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Przekształcenie pomocnicze  $W(P) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

◆  $A = (W(Q))^{-1}W(P)$





# Przekształcenie $W$

Rzutowanie

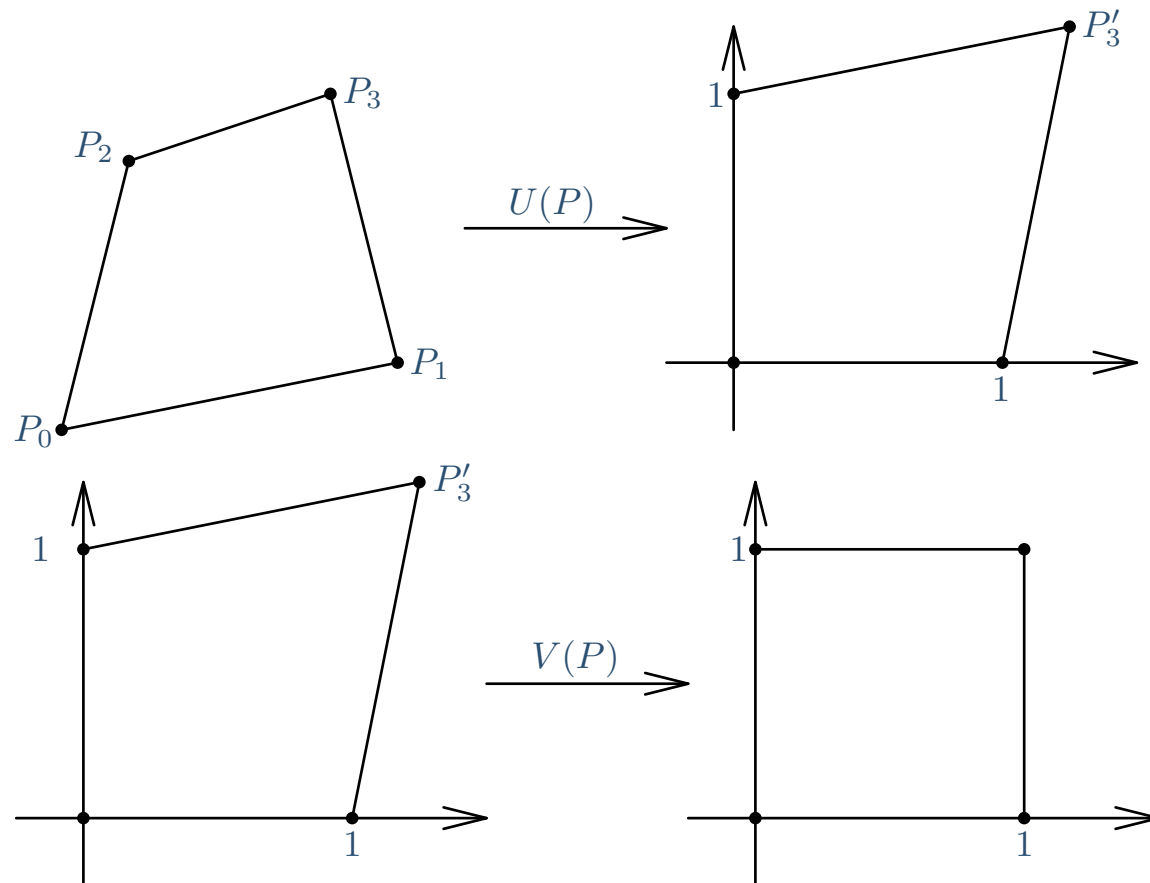
Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywna

❖ Cztery punkty

- Rozkładamy  $W$  w iloczyn  $W(P) = V(P)U(P)$ , gdzie
  - ◆  $U(P)$  będzie przekształceniem afinicznym,
  - ◆  $V(P)$  — rzutowym.



# Przekształcenie $U$

Rzutowanie

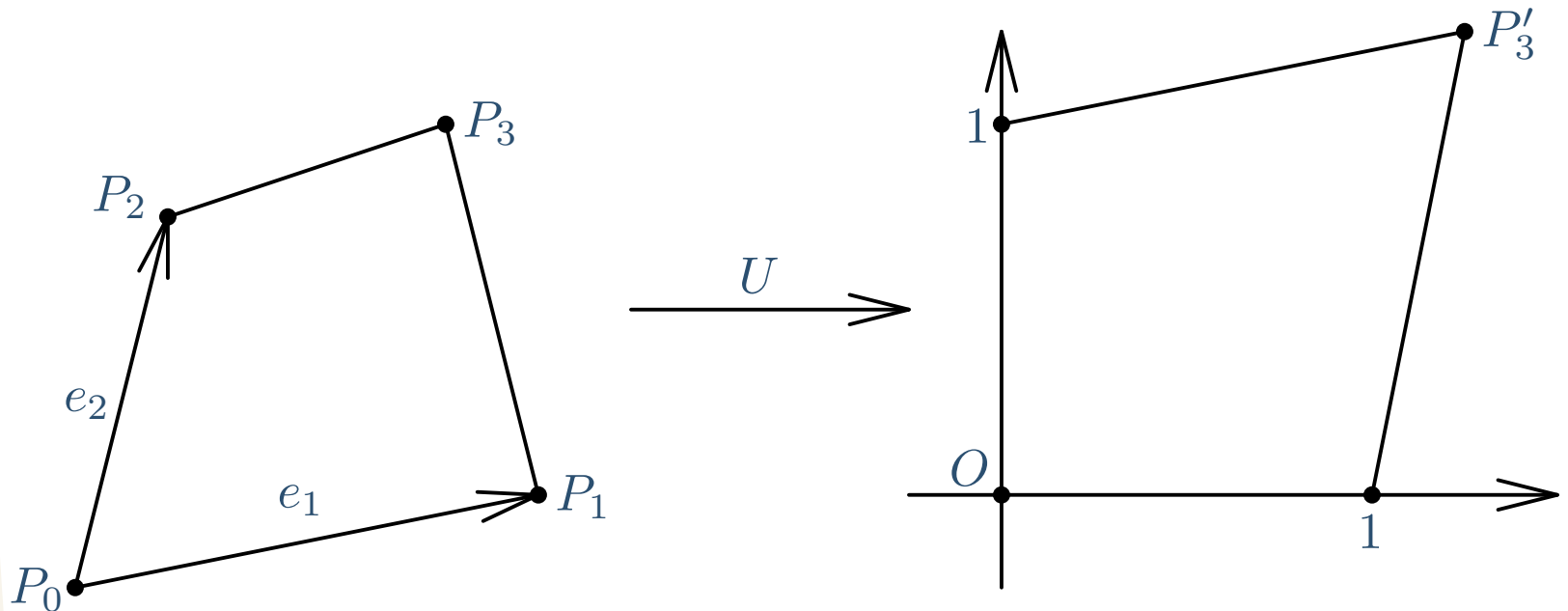
Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywna

❖ Cztery punkty

- Przekształcenie  $U$  to zamiana standardowego układu współrzędnych  $(O, i, j)$  na  $(P_0, e_1, e_2)$ .



# Przekształcenie $U$

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $(e_1 \ e_2) = (i \ j) M = (i \ j) \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{pmatrix}$ , gdzie
  - ◆  $dx_k = x_k - x_0, dy_k = y_k - y_0, k = 1, 2, 3.$
- $(i \ j) = (e_1 \ e_2) M^{-1} = (e_1 \ e_2) \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 \end{pmatrix}$ ,  
gdzie
  - ◆  $\Delta = \det M = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2.$
- W szczególności,  
 $OP_0 = (e_1 \ e_2) M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$ , gdzie
  - ◆  $x'_0 = (x_0 dy_2 - y_0 dx_2) / \Delta,$
  - ◆  $y'_0 = (-x_0 dy_1 + y_0 dx_1) / \Delta.$
- Więc  $U : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$

# Macierz przekształcenia $U$

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $$U = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{\Delta} & -\frac{dx_2}{\Delta} & \frac{-x_0 dy_2 + y_0 dx_2}{\Delta} \\ -\frac{dy_1}{\Delta} & \frac{dx_1}{\Delta} & \frac{x_0 dy_1 - y_0 dx_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◆ W szczególności,

$$P_3 \mapsto \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2 \\ -dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1 \end{pmatrix}$$

- Przekształcenie odwrotne  $U^{-1} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & +x_0 \\ dy_1 & dy_2 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Stosowanie współrzędnych jednorodnych pozwala zamienić  $U$  na prostszą macierz:

$$\begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

# Przekształcenie $V$

Rzutowanie

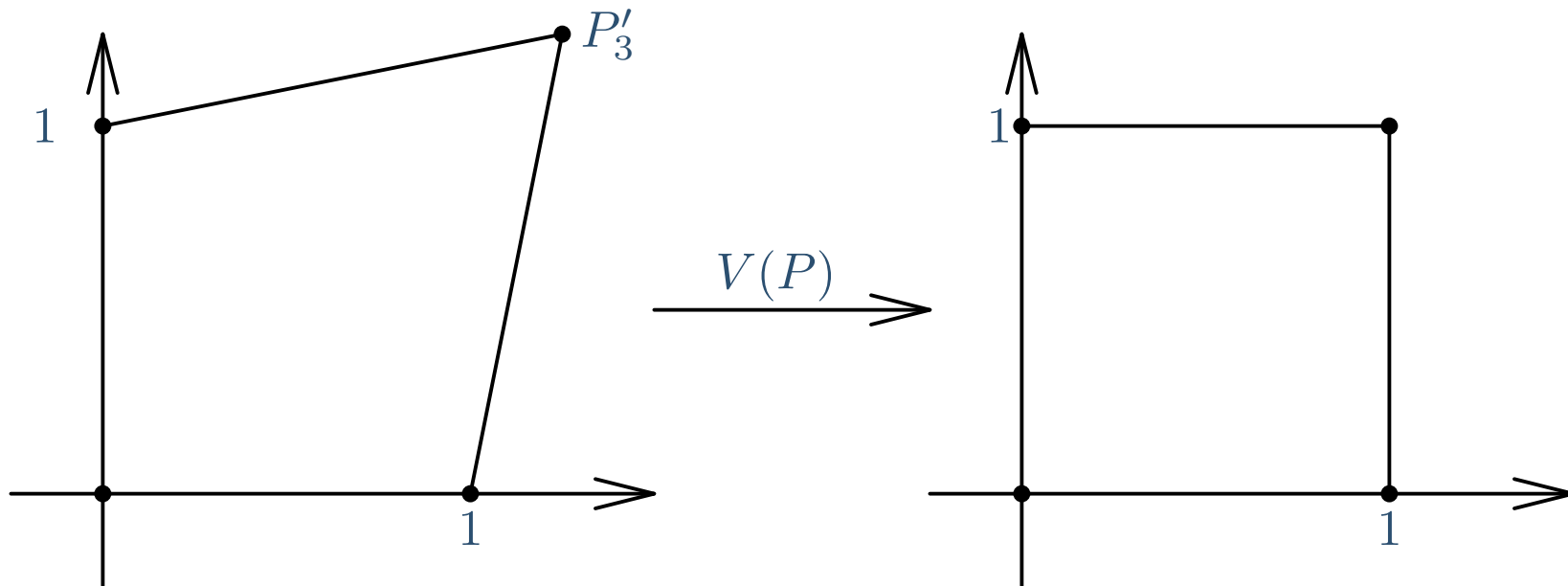
Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywna

❖ Cztery punkty

- $P'_3 = (x'_3, y'_3)$ , określone na slajdzie 28



# Równania na macierz $V$

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $(0, 0) \mapsto (0, 0)$ :
  - ◆  $a_{13} = a_{23} = 0, a_{33} = 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$ :
  - ◆  $a_{11} = \lambda_1, a_{21} = 0, a_{31} + 1 = \lambda_1.$ 
    - $a_{31} = a_{11} - 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$ :
  - ◆  $a_{12} = 0, a_{22} = \lambda_2, a_{32} + 1 = \lambda_2.$ 
    - $a_{32} = a_{22} - 1.$
- $P'_3 \mapsto (1, 1)$ 
  - ◆  $a_{11}x'_3 = \lambda, \quad a_{22}y'_3 = \lambda, \quad -x'_3 - y'_3 + 1 = -\lambda.$

# Macierz $V$

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

● Rozwiązanie równań: 
$$\begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$$

● Inna postać macierzy  $V$ :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{vmatrix} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} & 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

# Macierz $V^{-1}$

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $V^t = TS$ , gdzie  $S$  jest skalowaniem, a  $T$  — przesunięciem równoległym
- $(V^t)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
- $V^{-1} = ((V^t)^{-1})^t = (S^{-1}T^{-1})^t$
- $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 \\ \frac{1-y'_3}{x'_3+y'_3-1} & \frac{1-x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x'_3 & 0 & 0 \\ 0 & y'_3 & 0 \\ 1-y'_3 & 1-x'_3 & x'_3+y'_3-1 \end{pmatrix}$



# Algorytm obliczenia przekształcenia

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

●  $P_j = (x_j, y_j), Q_j = (s_j, t_j), j = 0, \dots, 3$

1.  $dx_j = x_j - x_0, dy_j = y_j - y_0, j = 1, 2, 3$

2.  $\Delta_p = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$

3.  $x'_3 = \frac{dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2}{\Delta_p}, y'_3 = \frac{-dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1}{\Delta_p}$

4.  $U(P) = \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}$

5.  $V(P) = \begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$

# Algorytm obliczenia przekształcenia, cd

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

$$6. \quad ds_j = s_j - s_0, \quad dt_j = t_j - t_0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$7. \quad \Delta_q = ds_1 dt_2 - dt_1 ds_2$$

$$8. \quad s'_3 = \frac{ds_3 dt_2 - dt_3 ds_2}{\Delta_q}, \quad t'_3 = \frac{-ds_3 dt_1 + dt_3 ds_1}{\Delta_q}$$

$$9. \quad V^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} s'_3 & 0 & 0 \\ 0 & t'_3 & 0 \\ 1 - t'_3 & 1 - s'_3 & t'_3 + s'_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad U^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & +s_0 \\ dt_1 & dt_2 & +t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)V(P)U(P)$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

# Uwagi

Rzutowanie

Case study:  
modelowanie cienia

Case study:  
przekształcenie  
rzutowe obrazów

❖ Transformacja  
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Jeżeli punkty  $P$  tworzą kwadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ , to
  - ◆  $U(P) = V(P) = I$
  - ◆  $A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)$
- Jeżeli punkty  $Q$  tworzą kwadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ , to
  - ◆  $U^{-1}(Q) = V^{-1}(Q) = I$
  - ◆  $A = V(P)U(P)$