Wprowadzenie do grafiki maszynowej. Wprowadenie do algorytmów rastrowych

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Wprowadenie do algorytmów rastrowych

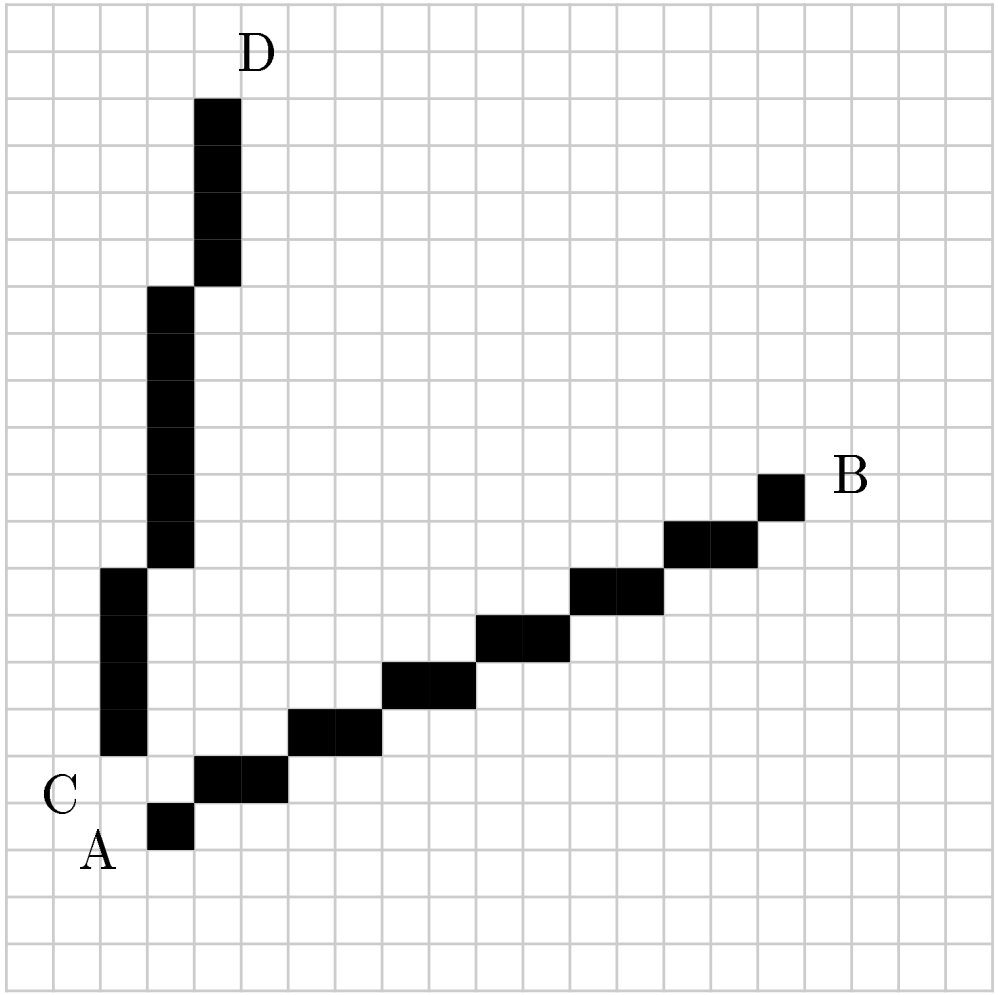
- Rasteryzacja odcinka
- Rasteryzacja okręgu
- Rasteryzacja elipsy
- Rasteryzacja krywej
- Wypełnienie obszaru

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm

Rasteryzacja odcinka

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru



Założenia

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- (x, y) — współrzędne „abstrakcyjne”, liczby rzeczywiste
- (i, j) — współrzędne ekranowe, liczby całkowite
- $x_2 > x_1, y_2 \geqslant y_1$
- $y_2 - y_1 \leqslant x_2 - x_1$
- Zaokrąglenie: $i_1 = \mathrm{round}(x_1)$, $i_2 = \mathrm{round}(x_2)$, $j_1 = \mathrm{round}(y_1)$, $j_2 = \mathrm{round}(y_2)$

Algorytm

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- $y(i) = j_1 + \frac{i-i_1}{i_2-i_1}(j_2 - j_1)$
- $j = \mathrm{round}(y)$
- Kod:

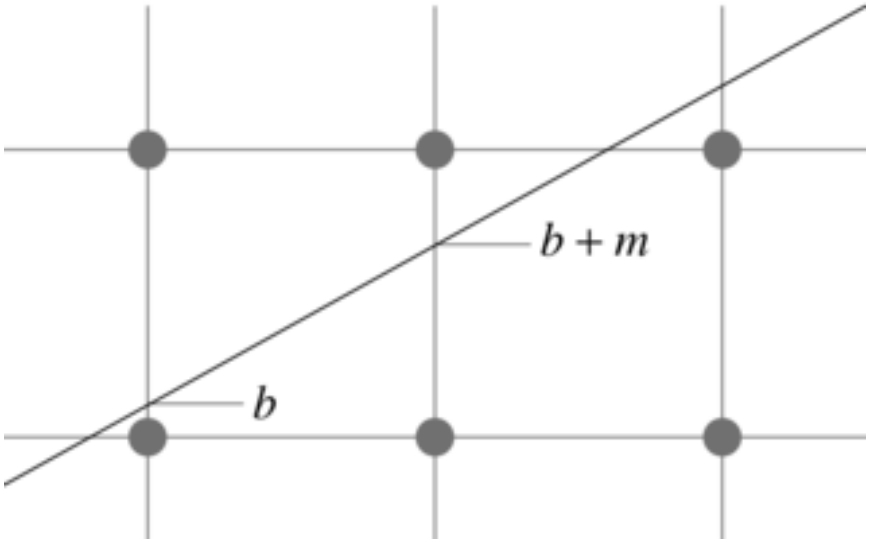
Wejście: (i_1, j_1) — początek odcinka, (i_2, j_2) — koniec odcinka, $i_2 > i_1, j_2 \geqslant j_1$, $j_2 - j_1 \leqslant i_2 - i_1$

Wynik: Odcinek został wyświetlony

$m \leftarrow \frac{j_2-j_1}{i_2-i_1}$
writePixel(i_1, j_1)
$y \leftarrow j_1$
for $i = i_1 + 1$ **to** i_2 **do**
  $y \leftarrow y + m$
  $j \leftarrow \mathrm{round}(y)$
  writePixel(i, j)
end for

Kumulacja przyrostu y

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru



- na każdym kroku do przyrostu y dodaje się m
- przechodzimy o jeden piksel w górę, jeżeli przyrost przekroczy $1/2$

Algorytm 2

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

Wejście: (i_1, j_1) — początek odcinka, (i_2, j_2) — koniec odcinka, $i_2 > i_1, j_2 \geqslant j_1$, $j_2 - j_1 \leqslant i_2 - i_1$

Wynik: Odcinek został wyświetlony

$m \leftarrow \frac{j_2 - j_1}{i_2 - i_1}$
$b \leftarrow 0$
writePixel(i_1, j_1)
$j \leftarrow j_1$
for $i = i_1 + 1$ **to** i_2 **do**
  $b \leftarrow b + m$
  if $b > \frac{1}{2}$ **then**
    $j \leftarrow j + 1$
    $b \leftarrow b - 1$
  end if
  writePixel(i, j)
end for

Eliminacja liczb rzeczywistych

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- przyrost jest wielokrotnością $m = \frac{j_2 - j_1}{i_2 - i_1}$:
  - $b = k\frac{j_2 - j_1}{i_2 - i_1}$
- $b < \frac{1}{2} \iff 2k(j_2 - j_1) < i_2 - i_1$
  - zamieniamy przyrost na przyrost całkowity
  - przyrost całkowity na każdym kroku zwiększa się o $2\Delta j = 2(j_2 - j_1)$
  - przechodzimy na wyższy poziom w j, jeżeli przyrost całkowity przekroczy $(i_2 - i_1)$

Algorytm Bresenhama

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

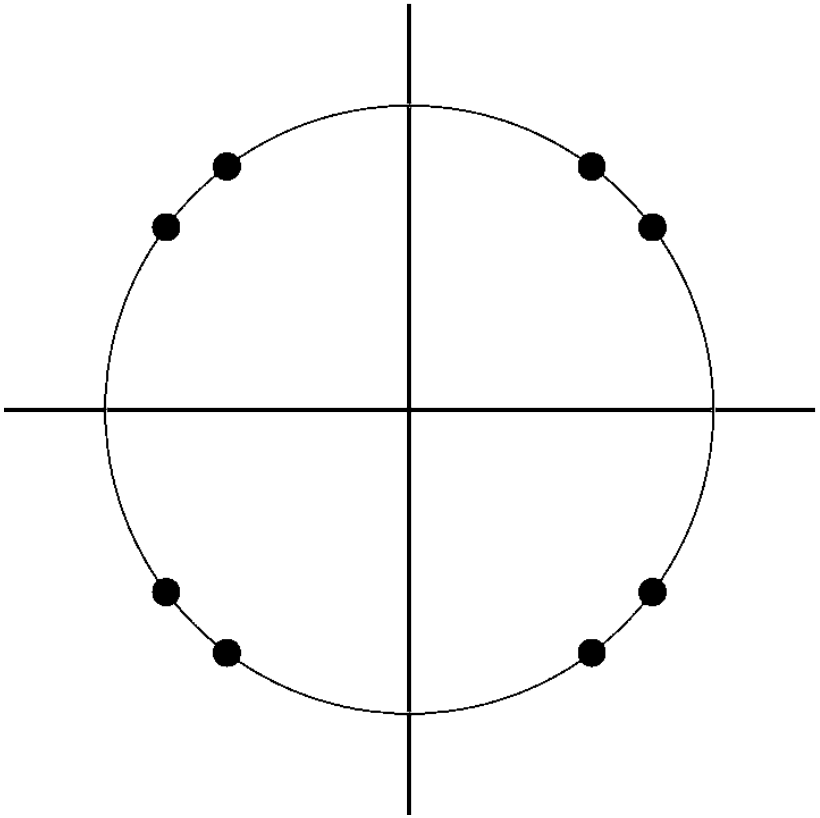
Wejście: (i_1, j_1) — początek odcinka, (i_2, j_2) — koniec odcinka, $i_2 > i_1, j_2 \geqslant j_1$, $j_2 - j_1 \leqslant i_2 - i_1$

Wynik: Odcinek został wyświetlony

$m \leftarrow 2(j_2 - j_1)$
$b \leftarrow 0$
writePixel(i_1, j_1)
$j \leftarrow j_1$
$P \leftarrow i_2 - i_1$
for $i = i_1 + 1$ **to** i_2 **do**
  $b \leftarrow b + m$
  if $b > P$ **then**
    $j \leftarrow j + 1$
    $b \leftarrow b - 2P$
  end if
  writePixel(i, j)
end for

Osiem symetrii okręgu

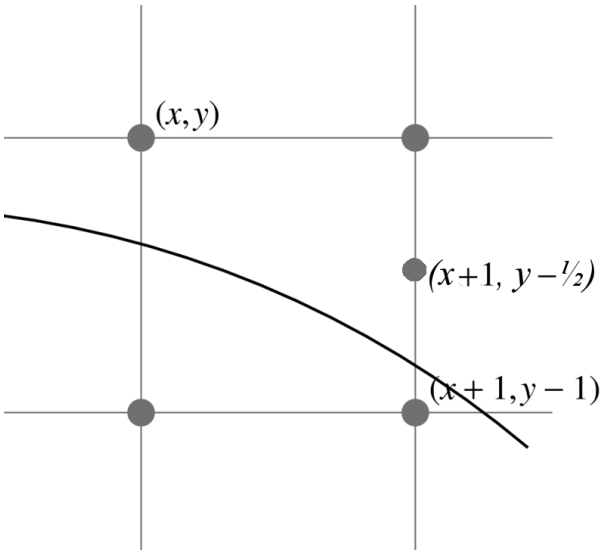
- Rasteryzacja odcinka
- Rasteryzacja okręgu
- Rasteryzacja elipsy
- Rasteryzacja krywej
- Wypełnienie obszaru



- $x^2 + y^2 = R^2$
- jeżeli (x, y) leży na okręgu, to
  - (y, x), $(x, -y)$, $(y, -x)$, $(-x, y)$, $(-y, x)$, $(-x, -y)$, $(-y, -x)$ też leżą na okręgu

Wybór następnego piksela

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru



- Zaczynamy od wierzchołka $(0, R)$
- Analizujemy $f(x,y) = 4\big((x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - R^2\big)$
  - jeżeli $f(x,y) > 0$ to przechodzimy w prawo i w dół
  - jeżeli $f(x,y) < 0$ to przechodzimy tylko w prawo
- $f(x+1,y) = f(x,y) + 8x + 12$
- $f(x+1,y-1) = f(x,y) + 8x - 8y + 20$
- $f(0,R) = 5 - 4R$

Algorytm

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

Wejście: Środek okręgu jest w $(0, 0)$, promień $R \in \mathbb{N}$
Wynik: Okrąg został wyświetlony

$i \leftarrow 0$, $j \leftarrow R$, $f \leftarrow 5 - 4R$
writePixel(i, j)
while $i < j$ **do**
  if $f > 0$ **then**
    $f \leftarrow f + 8i - 8j + 20$
    $j \leftarrow j - 1$
  else
    $f \leftarrow f + 8i + 12$
  end if
  $i \leftarrow i + 1$
  writePixel(i, j)
end while

Rasteryzacja elipsy

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Zaczynamy od wierzchołka $(0, b)$
- Analizujemy $f(x, y) = 4a^2b^2 \left(\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{b^2} - 1 \right)$
  - jeżeli $f(x, y) > 0$ to przechodzimy w prawo i w dół
  - jeżeli $f(x, y) < 0$ to przechodzimy tylko w prawo
- $f(x + 1, y) = f(x, y) + 8b^2x + 12b^2$
- $f(x + 1, y - 1) = f(x, y) + 8b^2x - 8a^2y + 12b^2 + 8a^2$
- $f(0, b) = 4b^2 - 4a^2b + a^2$

Zmiana kierunku

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- Jeżeli $b^2x > a^2y$, to zmienia się kierunek ratserizacji
- Analizujemy $g(x,y) = 4a^2b^2\left(\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} - 1\right)$
  - jeżeli $g(x,y) > 0$ to przechodzimy w prawo i w dół
  - jeżeli $g(x,y) < 0$ to przechodzimy tylko w dół
- $g(x,y) = f(x,y) - 4b^2x - 3b^2 - 4a^2y + 3a^2$
- $g(x,y-1) = g(x,y) - 8a^2y + 12a^2$
- $g(x+1,y-1) = g(x,y) + 8b^2x - 8a^2y + 8b^2 + 12a^2$

Algorytm

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

Wejście: Środek elipsy jest w $(0, 0)$, promienie $a, b \in \mathbb{N}$
Wynik: Elipsa została wyświetlona

$i \leftarrow 0$, $j \leftarrow b$, $f \leftarrow 4b^2 - 4a^2b + a^2$
writePixel(i, j)
while $b^2i < a^2j$ **do**
  if $f > 0$ **then**
    $f \leftarrow f + 8b^2i - 8a^2j + 12b^2 + 8a^2$
    $j \leftarrow j - 1$
  else
    $f \leftarrow f + 8b^2i + 12b^2$
  end if
  $i \leftarrow i + 1$
  writePixel(i, j)
end while

Algorytm. Zmiana kierunku

- Rasteryzacja odcinka
- Rasteryzacja okręgu
- Rasteryzacja elipsy
- Rasteryzacja krywej
- Wypełnienie obszaru

$g \leftarrow f - 4b^2 i - 3b^2 - 4a^2 j + 3a^2$
while $j > 0$ **do**
  if $g \leqslant 0$ **then**
    $g \leftarrow g + 8b^2 i - 8a^2 j + 8b^2 + 12a^2$
    $i \leftarrow i + 1$
  else
    $g \leftarrow g - 8a^2 j + 12a^2$
  end if
  $j \leftarrow j - 1$
  writePixel(i, j)
end while

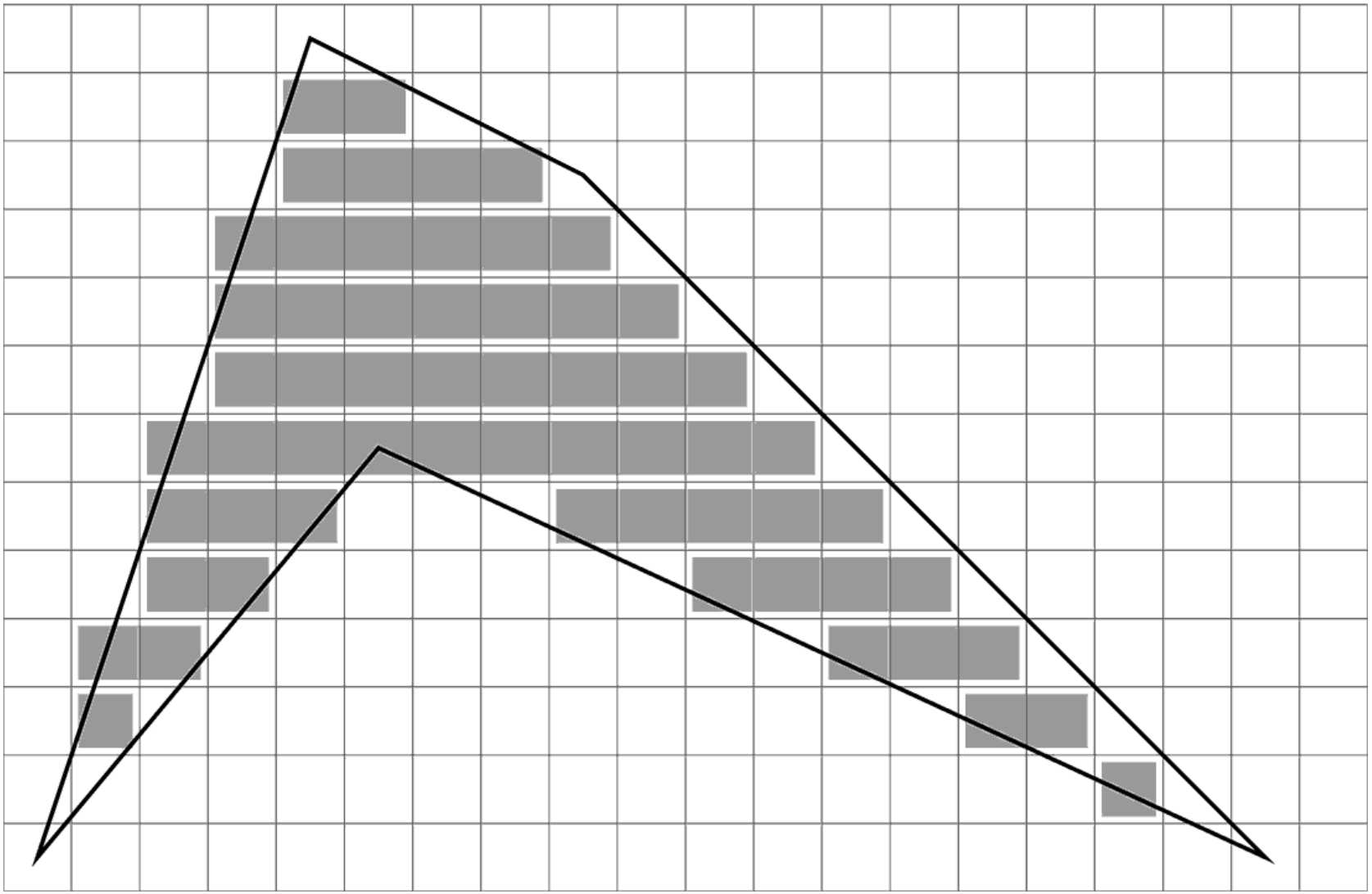
Rasteryzacja krywej

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- Przybliżenie przez łamaną
- Metoda Eulera dla równania $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \end{cases}$

Wypełnienie wieloboku

- Rasteryzacja odcinka
- Rasteryzacja okręgu
- Rasteryzacja elipsy
- Rasteryzacja krywej
- Wypełnienie obszaru



Przeglądanie liniami poziomymi (Scanline interpolation)

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

Wejście: lista krawędzi wieloboku $\{ \left[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})\right] \}$, $i = 0, \ldots, n$, $x_n = x_0$, $y_n = y_0$

Wynik: wypełniono wnętrze wieloboku

uporządkuj wierzchołki w krawędziach aby $y_i < y_{i+1}$, usuń krawędzie poziome

uporządkuj krawędzie w kolejności rosnących y_i

$TAK \leftarrow \emptyset$ (Tabela Aktywnych Krawęzi)

$y \leftarrow y_i$ pierwszej krawędzi

repeat

$TAK \leftarrow TAK \cup \{$ krawędzie, których pierwszy koniec jest na linii $y\}$

Opracowanie poziomu y

y ++;

$TAK \leftarrow TAK \setminus \{$ krawędzie, których drugi koniec jest na linii $y\}$

until $TAK = \emptyset$

Opracowanie poziomu y

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

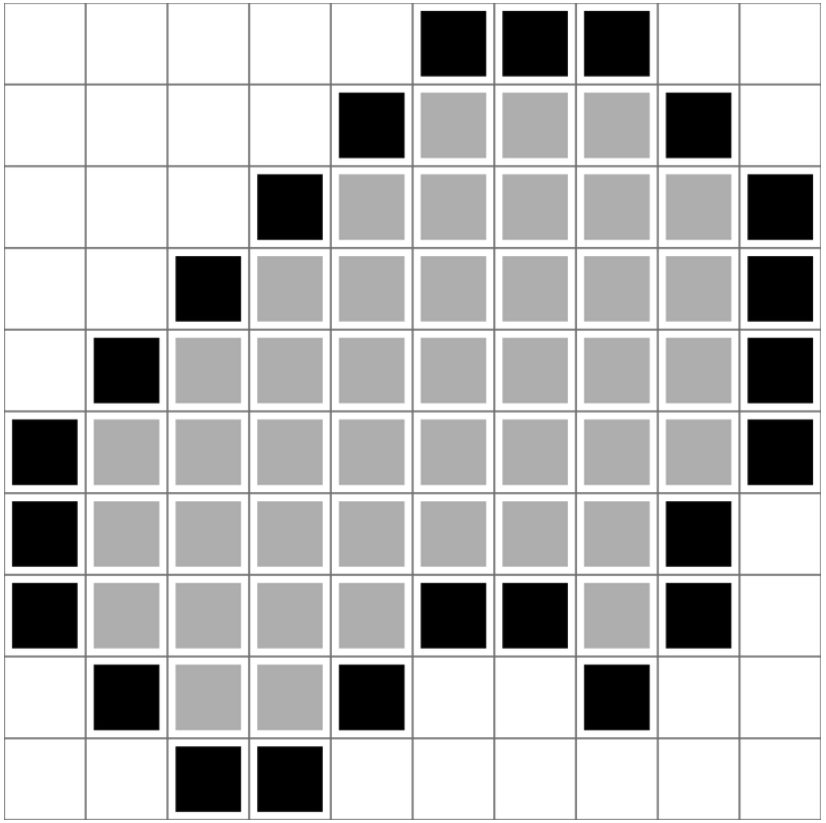
Wejście: $TAK \neq \emptyset$ (zawiera parzystą ilość elementów)
Wynik: wypełniony poziom y

for all krawędzi z TKA **do**
  Oblicz współrzędną x punktu przecięcia z linią poziomą y
end for
Posortuj TKA w kolejności rosnących współrzędnych x punktów przecięcia
for all kolejnych par krawędzi z TKA **do**
  rysuj odcinek poziomy na linii y, między ich punktami przecięcia z linią y;
end for

Wypełnianie przez zalewanie

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

- obszar jest czterospójny
- brzeg obszaru jest ośmiospójny



Procedura rekurencyjna

❖ Rasteryzacja odcinka
❖ Rasteryzacja okręgu
❖ Rasteryzacja elipsy
❖ Rasteryzacja krywej
❖ Wypełnienie obszaru

Wejście: punkt (i, j) zawiera się w obszarze
Wynik: zamalowany cały obszar
  if niezamalowany wewnętrzny piksel (i, j) **then**
    Zamaluj (i, j)
    Wypełnij poczynając z $(i - 1, j)$
    Wypełnij poczynając z $(i, j - 1)$
    Wypełnij poczynając z $(i + 1, j)$
    Wypełnij poczynając z $(i, j + 1)$
  end if

Stos zawieszonych zadań

- Rasteryzacja odcinka
- Rasteryzacja okręgu
- Rasteryzacja elipsy
- Rasteryzacja krywej
- Wypełnienie obszaru

Wejście: punkt (i, j) zawiera się w obszarze
Wynik: zamalowany cały obszar

Stos $S \leftarrow \emptyset$
zamaluj (i, j); $S \leftarrow S \cup (i, j)$
while $S \neq \emptyset$ **do**
  $S \leftarrow S \setminus (i, j)$
  if niezamalowany wewnętrzny piksel $(i-1, j)$ **then**
    zamaluj $(i-1, j)$; $S \leftarrow S \cup (i-1, j)$
  end if
  if niezamalowany wewnętrzny piksel $(i, j-1)$ **then**
    zamaluj $(i, j-1)$; $S \leftarrow S \cup (i, j-1)$
  end if
  if niezamalowany wewnętrzny piksel $(i+1, j)$ **then**
    zamaluj $(i-1, j)$; Stos $S \leftarrow S \cup (i+1, j)$
  end if
  if niezamalowany wewnętrzny piksel $(i, j+1)$ **then**
    zamaluj $(i-1, j)$; $S \leftarrow S \cup (i, j+1)$
  end if
end while