Badanie przebiegu zmienności funkcji

Aleksander Denisiuk

6 listopada 2025

1 Zagadnienie

Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^3+2}{2x}$.

2 Rozwiązanie

2.1 Dziedzina i przecięcia z osiami

Mianownik funkcji jest równy zeru wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$, zatem

$$Df = (-\infty, 0) \cup (0 + \infty).$$

Funkcja nie przecina osi Oy, ponieważ $x = 0$ nie należy do jej dziedziny.

$f(x) = 0 \iff x^3 + 2 = 0 \iff x = -\sqrt[3]{2}$. Funkcja przecina oś Ox w punkcie $(-\sqrt[3]{2}, 0)$.

2.2 Asymptoty

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}.$$

Funkcja rośnie kwadratowo w nieskończoności, więc nie posiada asymptot poziomych ani ukośnych.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Funkcja posiada asymptotę pionową $x = 0$.

2.3 Różniczkowalność i pochodna

Funkcja jest różniczkowalna na całej dziedzinie oraz

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

2.4 Przedziały monotoniczności, ekstrema

$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = 0 \iff x = 1,$$

a zatem:

- w przedziale $(-\infty, 0)$ mamy $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- w przedziale $(0, 1)$ mamy $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- przy $x = 1$ pochodna zmienia znak, funkcja osiąga minimum lokalne
- w przedziale $(1, +\infty)$ mamy $f'(x) > 0$, funkcja rośnie

2.5 Druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$$f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 + 2}{x^3}.$$

$$\frac{x^3 + 2}{x^3} = 0 \iff x = -\sqrt[3]{2},$$

a zatem:

- w przedziale $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ mamy $f''(x) > 0$, a więc f wypukła
- przy $x = -\sqrt[3]{2}$ druga pochodna zmienia znak, funkcja ma punkt przegięcia
- w przedziale $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ mamy $f''(x) < 0$, a więc f wklęsła
- w przedziale $(0, +\infty)$ mamy $f''(x) > 0$, a więc f wypukła

2.6 Tabela przebiegu zmienności funkcji

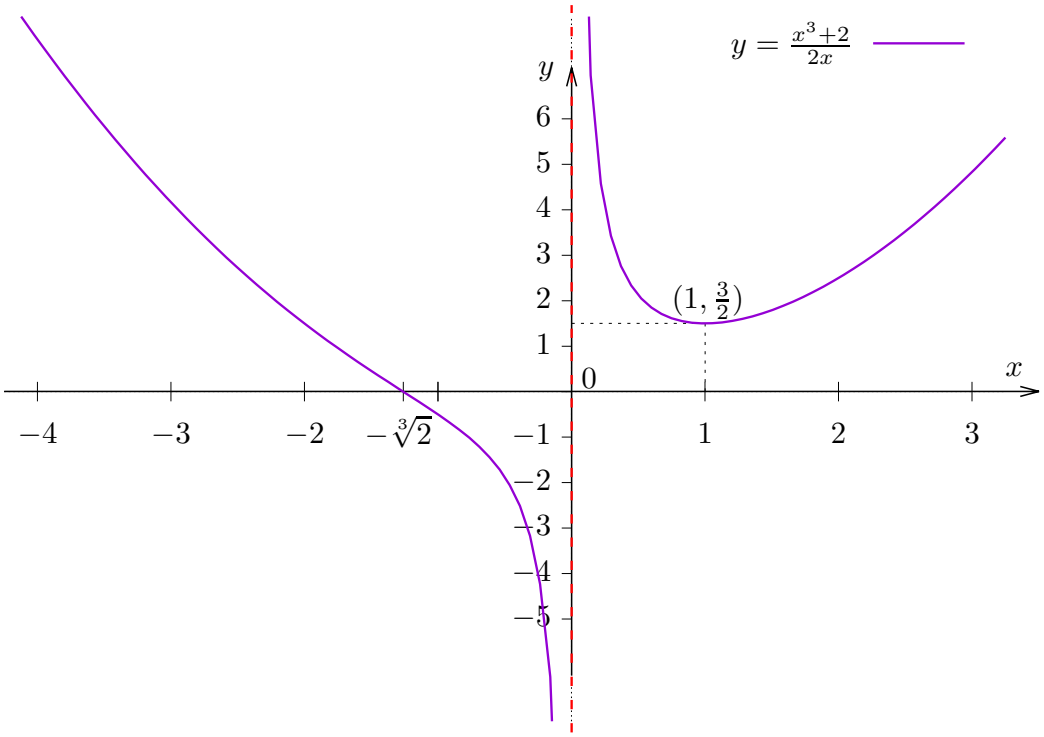
x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$ ‖ $+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$\smile$	$\frown$	$\frown$	‖	$\smile$		$\smile$	

2.7 Parzystość, nieparzystość, okresowość

$$f(-x) = \frac{-x^3+2}{-2x} = \frac{x^3-2}{2x} \neq \pm f(x),$$

zatem funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta. Oczywiście funkcja nie jest okresowa.

2.8 Szkic wykresu



2.9 Przeciwdziedzina

$$R_f = \mathbb{R}$$