

Matematyczne Podstawy Grafiki Komputerowej. Krzywe B-sklejane

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Krzywe B-sklejane

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Krzywe B-sklejane (B-spline)

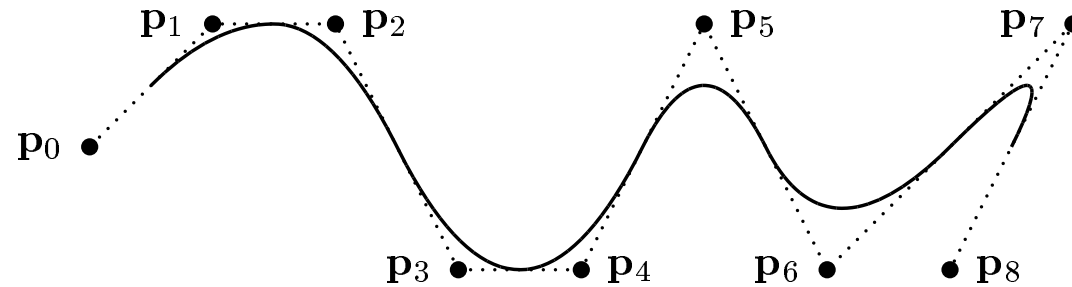
❖ Krzywe B-sklejane

❖ Krzywe trzeciego stopnia

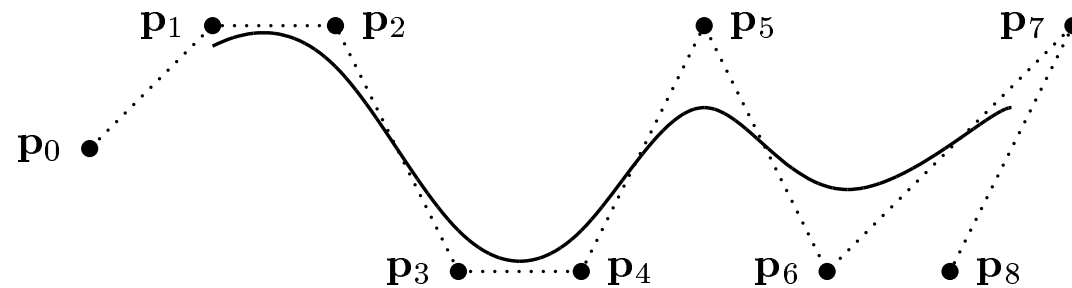
❖ Krzywe niejednorodne

❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS



(a) Degree two B-spline curve.



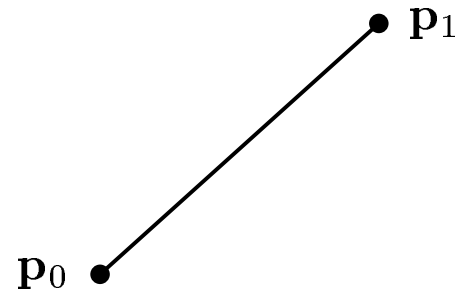
(b) Degree three B-spline curve.

Figure VIII.1: Degree two and degree three B-spline curves with uniformly spaced knots and nine control points. The degree three curve is smoother than the degree two curve, whereas, the degree two curve approaches the control points a little more closely. Compare with the degree eight Bézier curve of figure VII.9(c) on page 167.

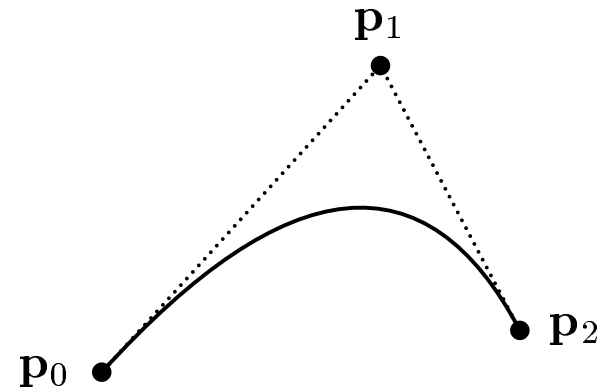
Krzywe Béziery

❖ Krzywe B-sklejane

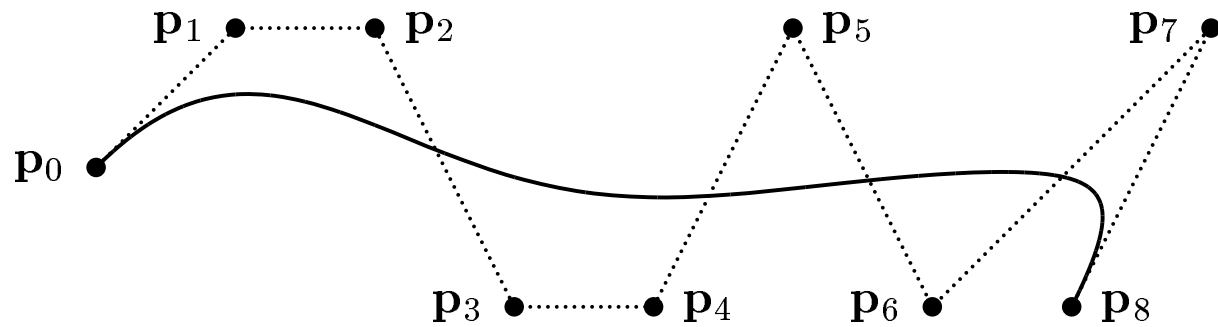
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS



(a) Degree one



(b) Degree two



(c) Degree eight

Krzywa B-sklejana trzeciego stopnia

❖ Krzywe B-sklejane

❖ Krzywe trzeciego stopnia

❖ Krzywe niejednorodne

❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS

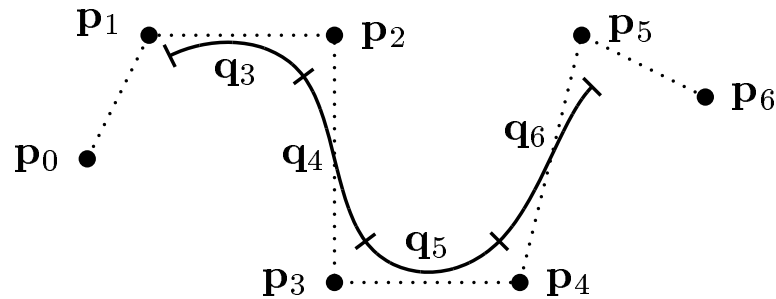


Figure VIII.2: A degree three uniform B-spline curve with seven control points.

$$q(u) = \sum_{i=0}^n N_i(u)p_i, \quad 3 \leq u \leq n+1$$

$$N_i(u) = 0 \text{ dla } u \leq i \text{ lub } u \geq i+4$$

Funkcje wagowe

❖ Krzywe B-sklejane

❖ Krzywe trzeciego stopnia

❖ Krzywe niejednorodne

❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS

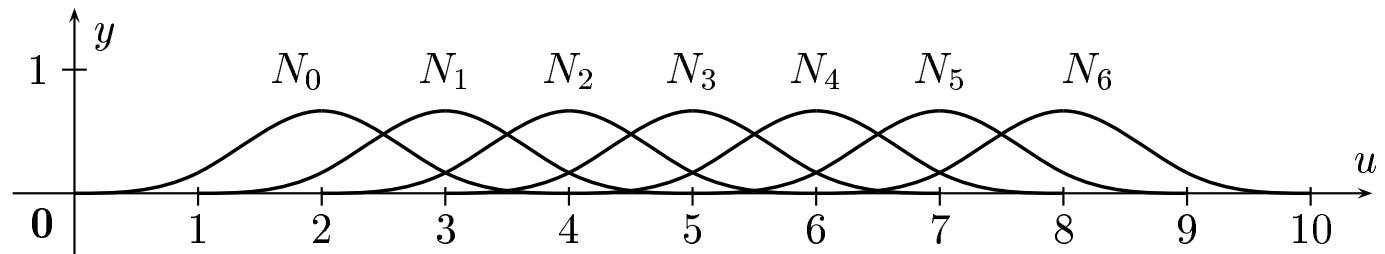


Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function N_i has support $(i, i + 4)$.

- $N_i(u) = N_0(u - i)$
- Obcięte wielomiany stopnia 3
- $N_i \in C^2$
- $\sum_i N_i(u) = 1$ dla $u \in [3, n + 1]$
- $N_i(u) \geq 0$
- $N_i(u) = 0$ dla $u \leq i$ lub $u \geq i + 4$

Funkcje wagowe

❖ Krzywe B-sklejane

❖ Krzywe trzeciego stopnia

❖ Krzywe niejednorodne

❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS

$$R_0(u) = N_0(u), \quad R_1(u) = N_0(u + 1), \quad R_2(u) = N_0(u + 2),$$

$$R_3(u) = N_0(u + 3) \quad u \in [0, 1]$$

⇓

$$R_0(u) = \frac{1}{6}u^3 \quad R_1(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$$

$$R_2(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4) \quad R_3(u) = \frac{1}{6}(1 - u)^3$$

Sklejanie funkcji wagowych

❖ Krzywe B-sklejane

❖ Krzywe trzeciego stopnia

❖ Krzywe niejednorodne

❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS

$$\begin{aligned}R_0(0) &= 0, & R'_0(0) &= 0, \\R_0(1) &= \frac{1}{6} = R_1(0), & R'_0(1) &= \frac{1}{2} = R'_1(0), \\R_1(1) &= \frac{2}{3} = R_2(0), & R'_1(1) &= 0 = R'_2(0), \\R_2(1) &= \frac{1}{6} = R_3(0), & R'_2(1) &= -\frac{1}{2} = R'_3(0), \\R_3(1) &= 0, & R'_3(1) &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R''_0(0) &= 0, \\R''_0(1) &= 1 = R''_1(0), \\R''_1(1) &= -2 = R''_2(0), \\R''_2(1) &= 1 = R''_3(0), \\R''_3(0) &= 0.\end{aligned}$$

Krzywa B-sklejana niejednorodna

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

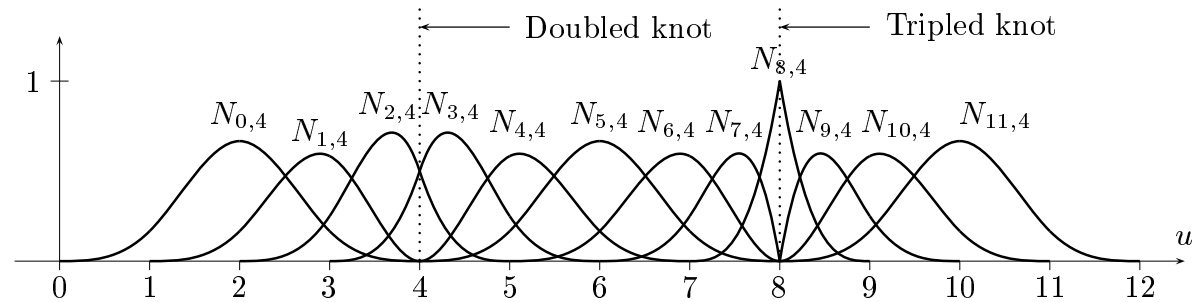


Figure VIII.4: Example of order four (degree three) blending functions with repeated knots. The knot vector is $[0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12]$ so that the knot 4 has multiplicity two and the knot 8 has multiplicity three.

- węzły $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{l-1} \leq u_l$
- węzły wielokrotne $u_{i-1} \leq u_i = u_{i+1} \leq u_{i+2}$

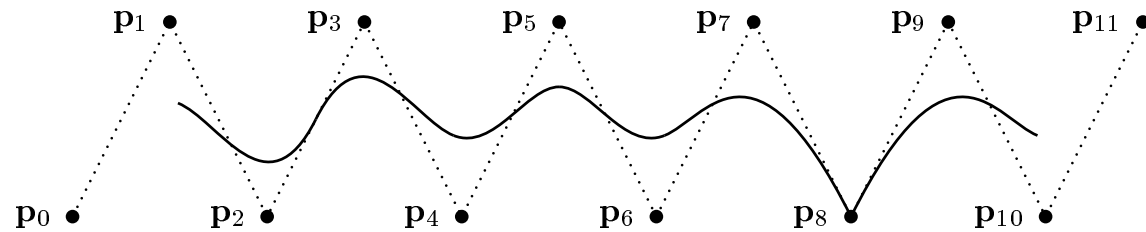


Figure VIII.5: Example of an order four B-spline created with repeated knots. This curve is created with the knot vector and blending functions shown in figure VIII.4. It has domain $[3, 9]$.

Krzywa B-sklejana stopnia $m - 1$ (Cox de Boor)

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

- Dane są węzły $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{l-1} \leq u_l$.
- Dla $i = 0, 1, \dots, l - 1$ wagi $N_{i,1} = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \end{cases}$
- $N_{i,k+1}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i} N_{i,k}(u) + \frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}} N_{i+1,k}(u)$
- $0/0 = 0, (a/0) \cdot 0 = 0$
- $N_{i,m}$ jest obcięтым (w węzłach) wielomianem stopnia $m - 1$
- $\text{supp } N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$ jest obcięтым (w węzłach) wielomianem stopnia $m - 1$
- $N_{i,m}$ zależy tylko od u_i, \dots, u_{i+m}

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 2$

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

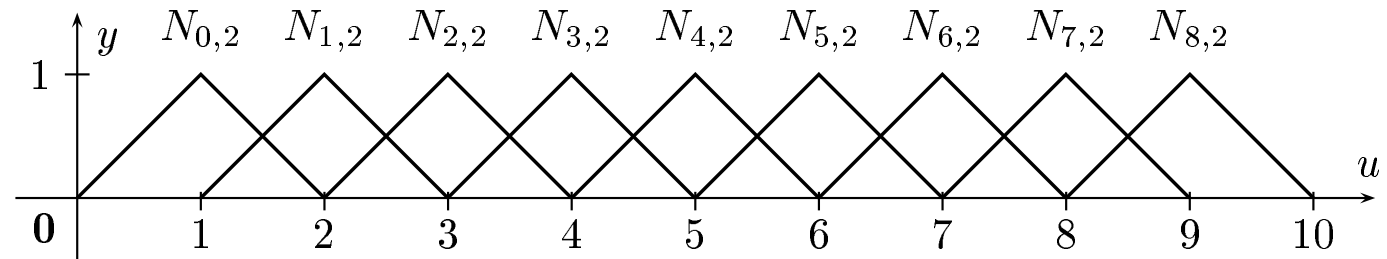


Figure VIII.6: The order two (piecewise degree one) blending functions with uniformly spaced knots, $u_i = i$. Here $\ell = 10$, and there are $\ell + 1$ knots and $\ell - 1$ blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.2) is defined for $1 \leq u \leq \ell - 1$.

$$N_{0,2} = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u & 1 \leq u \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 3$

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

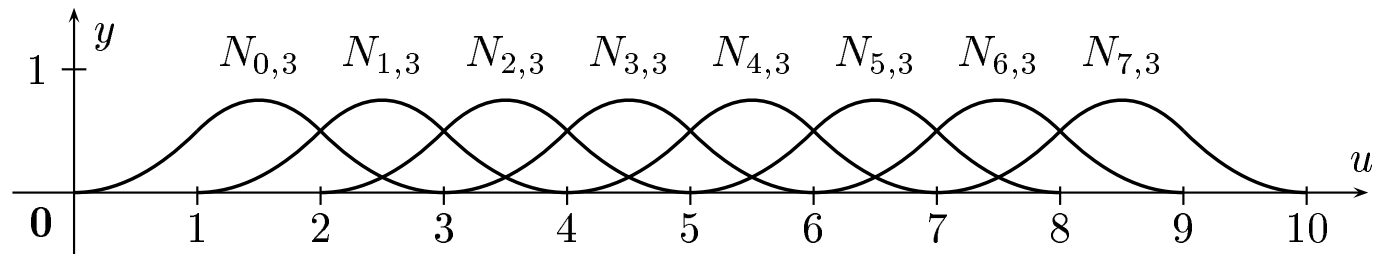


Figure VIII.7: The order three (piecewise degree two) blending functions with uniform knot positions $u_i = i$. We still have $\ell = 10$; there are $\ell + 1$ knots and $\ell - 2$ blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.3) is defined for $2 \leq u \leq \ell - 2$.

$$\bullet \quad N_{0,3} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \leq u < 1, \\ \frac{1}{2}u(2-u) + \frac{1}{2}(3-u)(u-1) & 1 \leq u < 2, \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \leq u < 3, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 4$

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

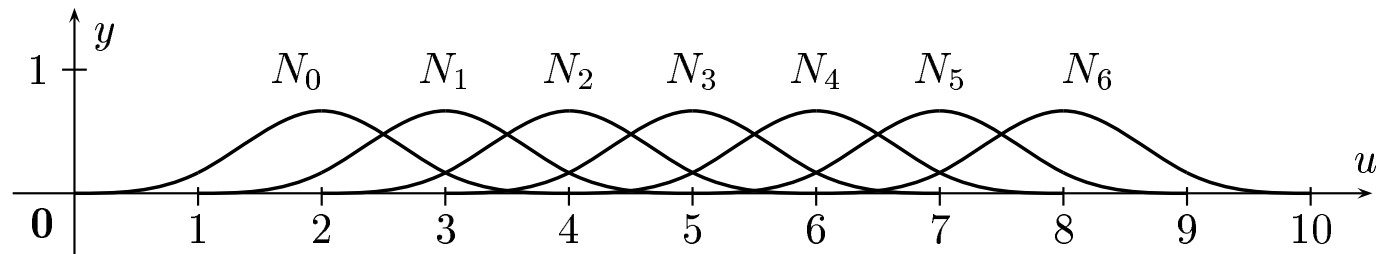


Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function N_i has support $(i, i + 4)$.

Przykład. Krzywe Béziery

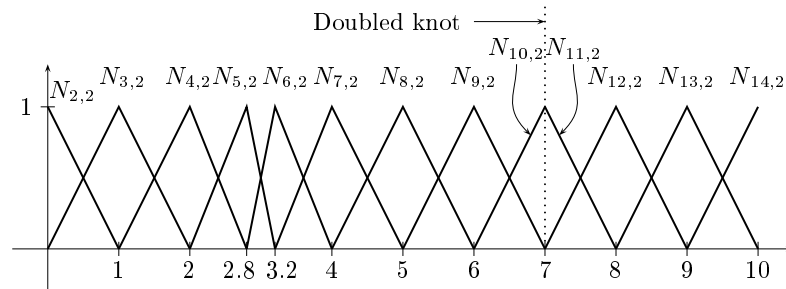
- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

- węzły: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1
- $N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \end{cases}$
- $N_{i,1} = 0$ dla $i \neq 3$
- $N_{2,2}(u) = 1 - u, N_{3,2}(u) = u$
- $N_{1,3}(u) = (1 - u)^2, N_{2,3}(u) = 2u(1 - u), N_{3,3}(u) = u^2$
- $N_{0,4}(u) = (1 - u)^3, N_{1,4}(u) = 3u(1 - u)^2,$
 $N_{2,4}(u) = 3u^2(1 - u), N_{3,4}(u) = u^3$

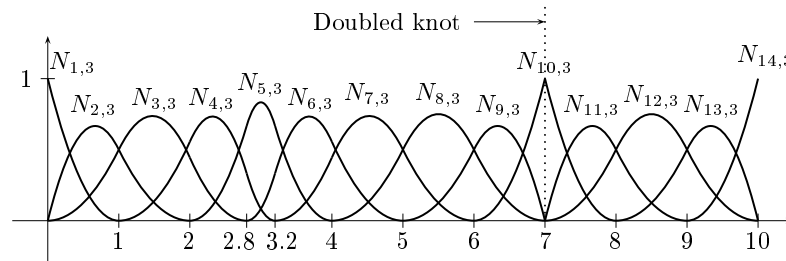
Niejednorodne wielokrotne węzły

- węzły: $0, 0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10$

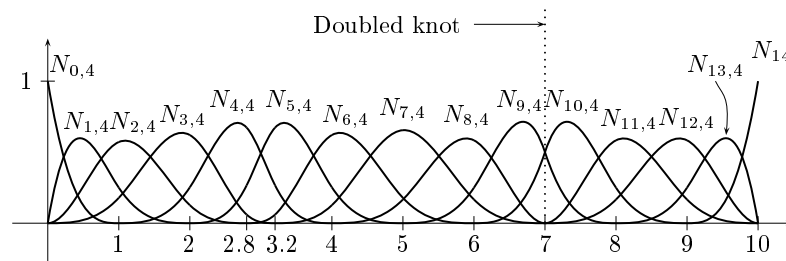
- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS



(a) Degree one blending functions.



(b) Degree two blending functions.



(c) Degree three blending functions.

Figure VIII.8: Degree one, two, and three blending functions for a non-uniform knot sequence. The knot 7 has multiplicity two, and the knots 0 and 10 have multiplicity 4.

Właściwości

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

Twierdzenie 1. Niech dane będą węzły $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_l$. Wtedy funkcje wagowe $N_{i,m}(u)$ dla $0 \leq i \leq l - m$ mają następujące właściwości:

- $\text{supp } N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$ dla $m \geq 1$
- $N_{i,m} \geq 0$
- $\sum_{i=0}^{l-m} N_{i,m}(u) = 1$ dla $u_{m-1} \leq u \leq u_{l-m+1}$

$$q(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(u)p_i, \quad u_{m-1} \leq u \leq u_{l-m+1} = u_{n+1}$$

$$q(u) = \sum_{i=j-m+1}^j N_{i,m}(u)p_i, \quad u_j \leq u \leq u_{j+1}$$

Właściwości

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora
- ❖ NURBS

Twierdzenie 2. *Niech $q(u)$ będzie krzywą B-sklejaną stopnia $m - 1$ i węzeł u_i ma krotność μ . Wtedy $q(u)$ ma ciągłe pochodne do stopnia $m - \mu - 1$ w punkcie u_i .*

Wymierne B-sklejane krzywe

- ❖ Krzywe B-sklejane
- ❖ Krzywe trzeciego stopnia
- ❖ Krzywe niejednorodne
- ❖ Algorytm Coksa de Boora

❖ NURBS

$$p_i = (x : y : z : w),$$

$$q(u) = \sum_i N_{i,m}(u)p_i$$

- współrzędna w pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności