Matematyczne Podstawy Grafiki Komputerowej. Krzywe i Płaty Béziera

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Krzywe i Płaty Béziera

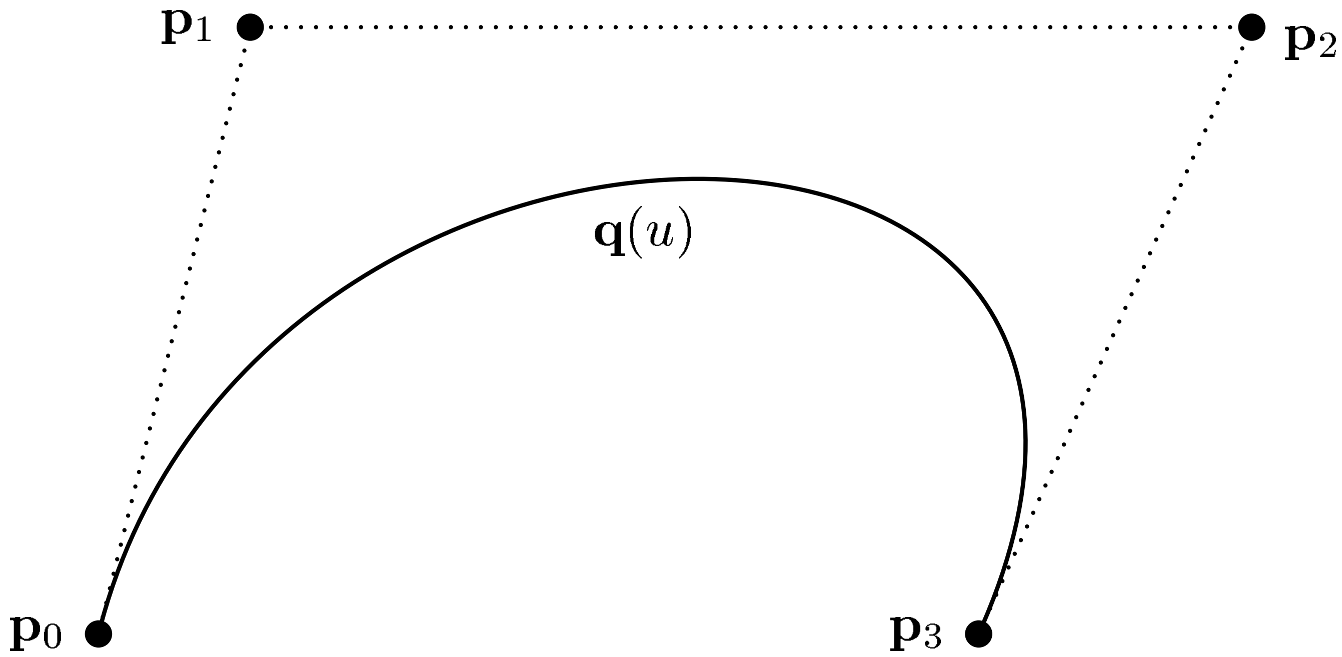
Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm`

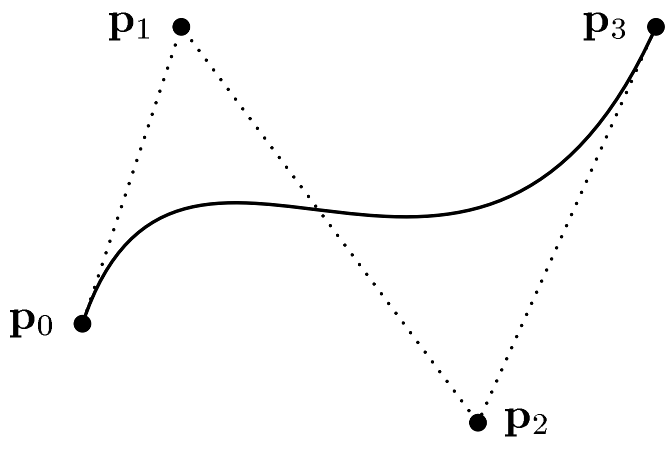
Splajny

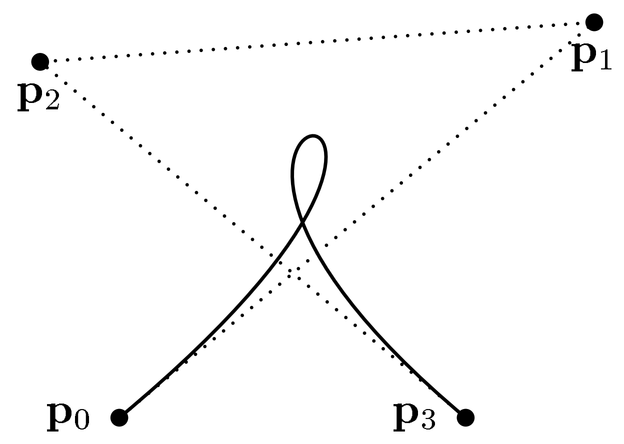
- Krzywe Béziera
  - Pierre Bézier — Renault: 1968, 1974
  - Paul de Casteljau — Citroën: 1959, 1963
- B-splajny (Isaac Jacob Schoenberg 1946)

Krzywe Béziera trzeciego stopnia



Krzywe Béziera trzeciego stopnia

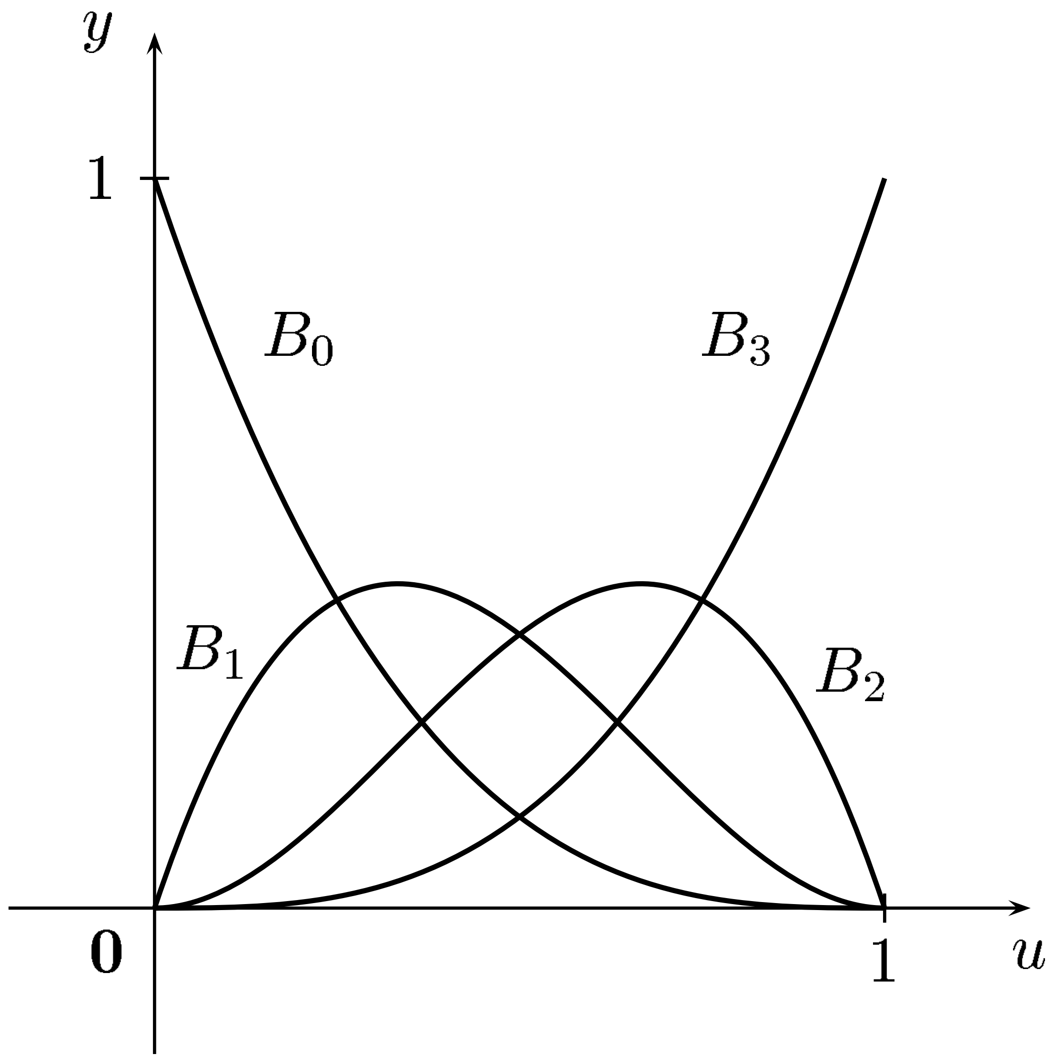




Krzywe Béziera trzeciego stopnia

- $q(u) = B_0(u)p_0 + B_1(u)p_1 + B_2(u)p_2 + B_3(u)p_3$, gdzie
  - $B_i(u) = \binom{3}{i}u^i(1-u)^{3-i}$ — wielomiany Bernsteina,
  - $\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — symbol Newtona
  - $B_0(u) = (1-u)^3, \quad B_1(u) = 3u(1-u)^2$
  - $B_2(u) = 3u^2(1-u), \quad B_3(u) = u^3$
  - $\sum_{i=0}^{3} B_i(u) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i}u^i(a-u)^{3-i} = \big(u + (1-u)\big)^3 = 1$

Wielomiany Bernsteina (stopnia 3)

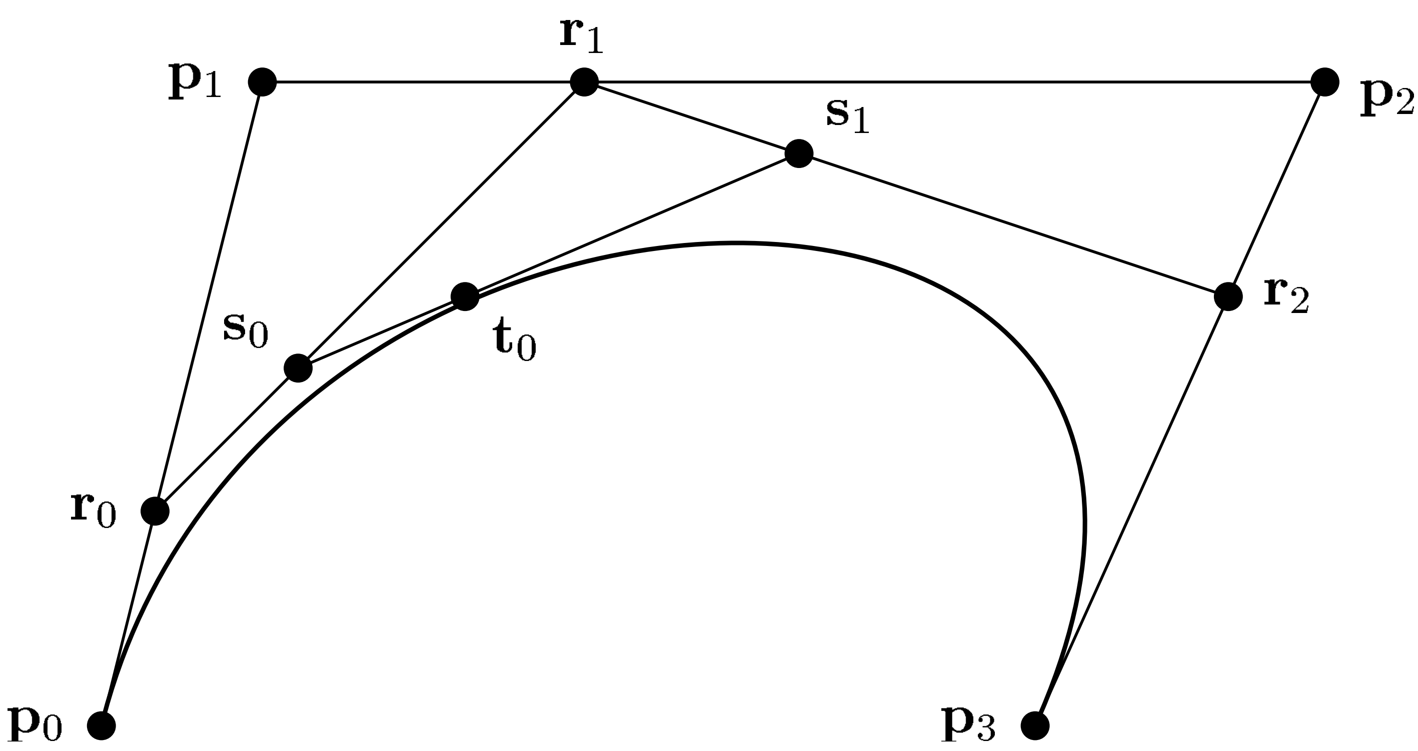


Wielomiany Bernsteina (stopnia 3)

$$\begin{array}{llll} B_0'(0) = -3, & B_1'(0) = 3, & B_2'(0) = 0, & B_3'(0) = 0 \\ B_0'(1) = 0, & B_1'(1) = 0, & B_2'(1) = -3, & B_3'(1) = 3 \end{array}$$

$$q'(0) = 3(p_1 - p_0),$$
$$q'(1) = 3(p_3 - p_2)$$

Algorytm de Casteljau

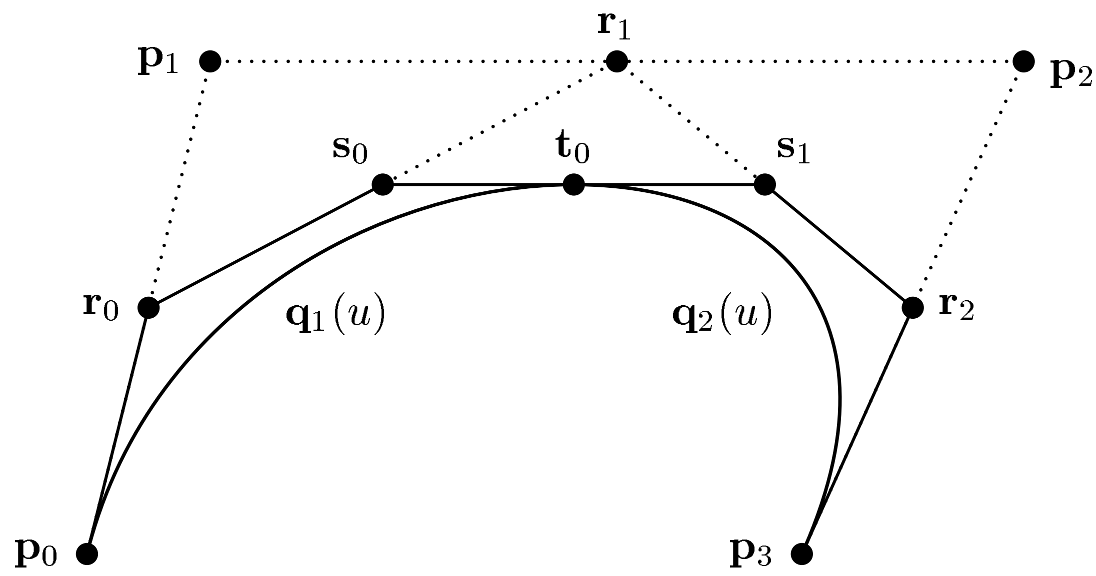


$$r_i = (1-u)\cdot p_i + u \cdot p_{i+1},$$

$$s_i = (1-u)\cdot r_i + u \cdot p_{i+1},$$

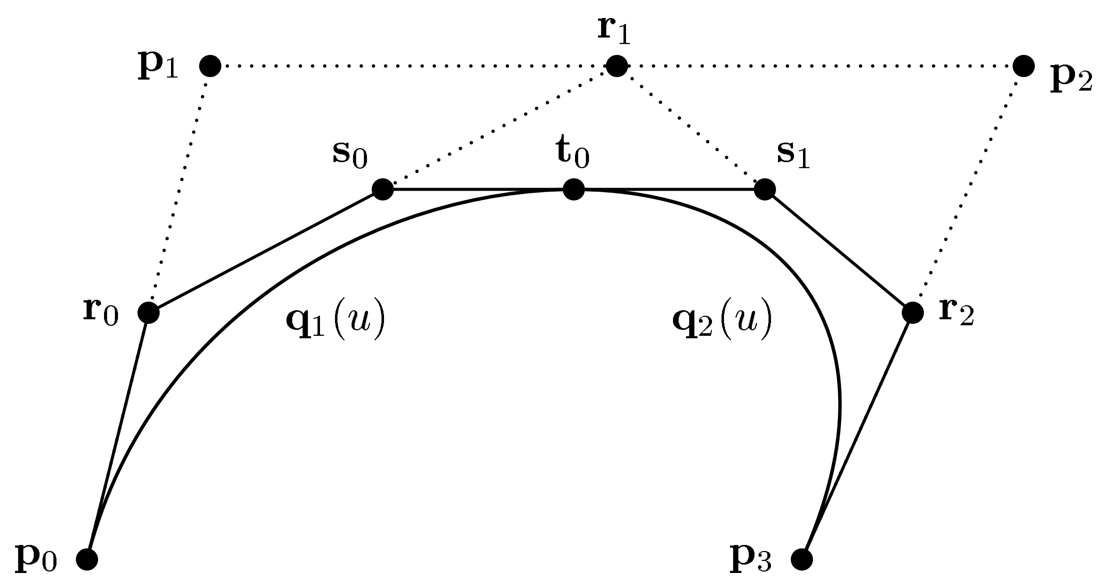
$$t_0 = (1-u)\cdot s_0 + u s_1$$

Algorytm de Casteljau ($u = \frac{1}{2}$)



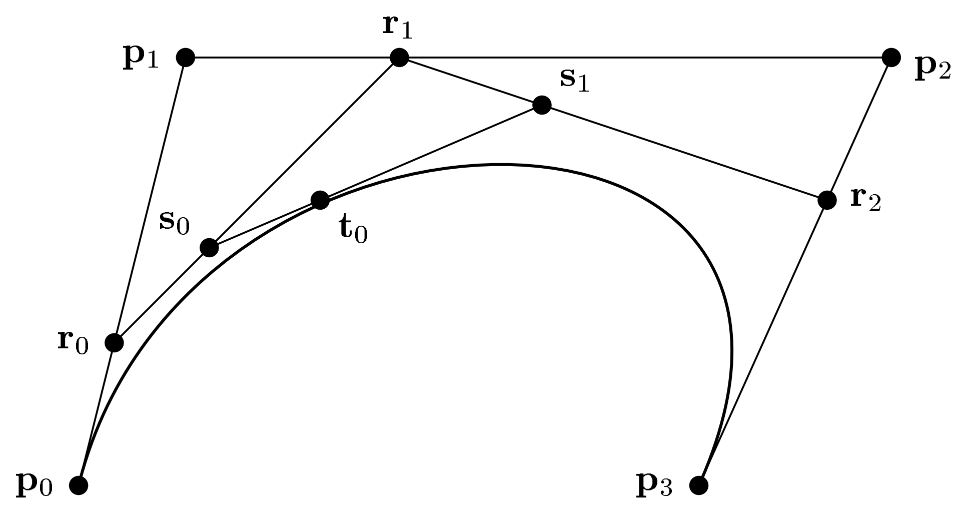
$$r_i = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}, \quad s_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \quad t_0 = \frac{s_0 + s_1}{2},$$
$$q(1/2) = t_0 = \frac{1}{8}p_0 + \frac{3}{8}p_1 + \frac{3}{8}p_2 + \frac{1}{8}p_3$$

Podział krzywej



Twierdzenie 1. *Niech* $q(u)$ *będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych* p_0, p_1, p_2, p_3. *Wtedy* $q_1(u) = q(u/2)$ *będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych* p_0, r_0, s_0, t_0, $q_2(u) = q((u+1)/2)$ *będzie krzywą Béziera o punktach* t_0, s_1, r_2, p_3.

Zagęszczanie (recursive subdivision)



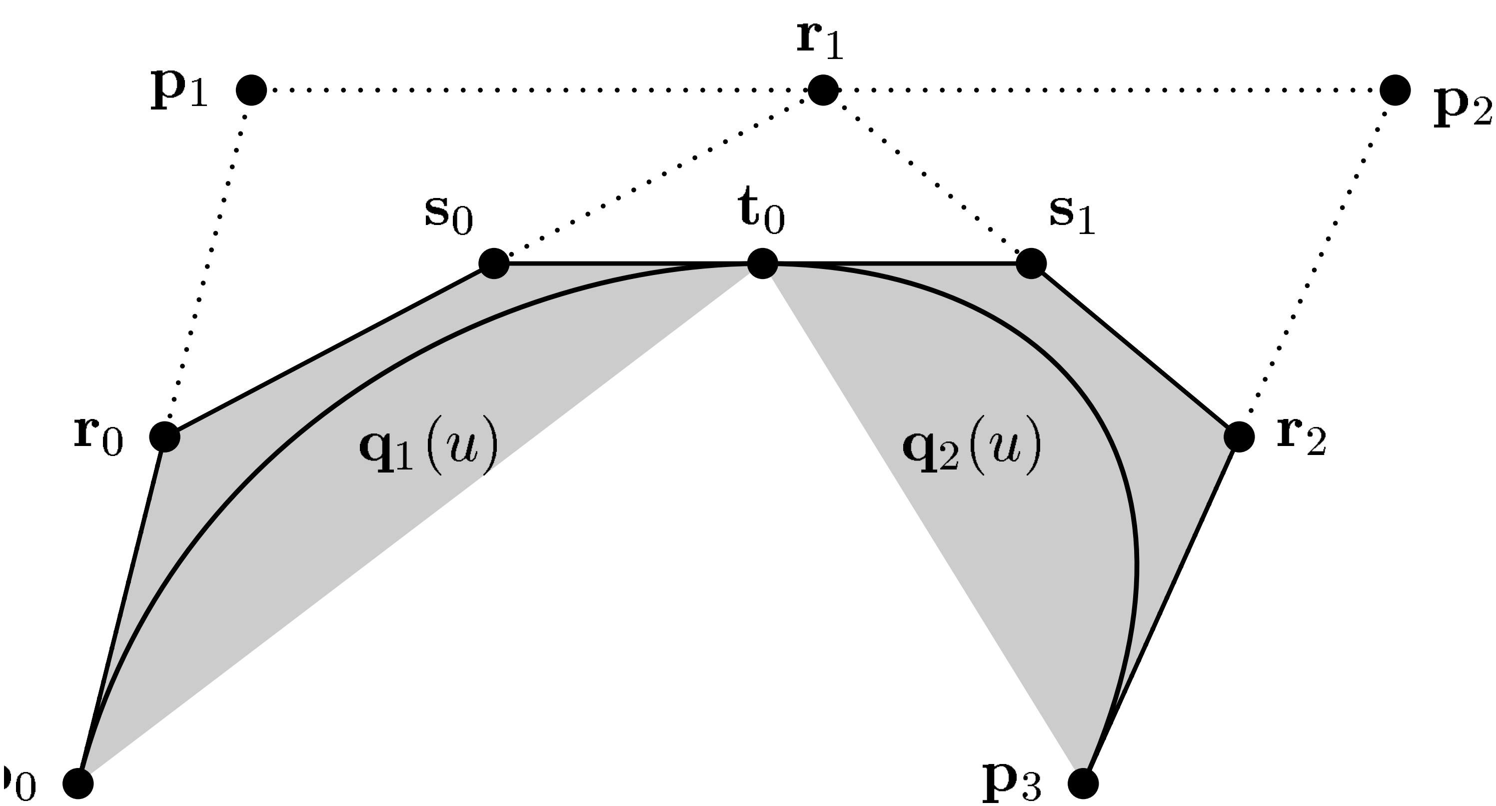
Twierdzenie 2. *Niech $q(u)$ będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, p_1, p_2, p_3. Wtedy $q_1(u) = q(u_0 u)$ będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, r_0, s_0, t_0, $q_2(u) = q(u_0 + (1 - u_0)u)$ będzie krzywą Béziera o punktach t_0, s_1, r_2, p_3.*

Renderowanie krzywych Béziera w postaci ciągu odcinków prostych

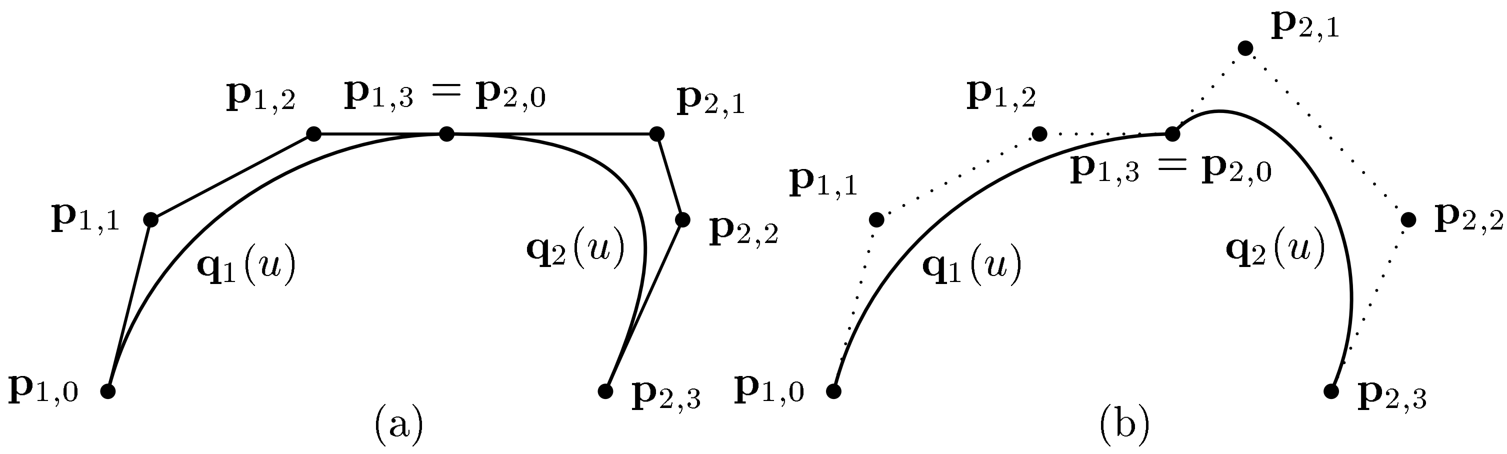
- $\|q(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(p_0 + p_3)\| < \varepsilon$,
- $\|p_0 - p_1 - p_2 + p_3\|^2 < (8\varepsilon/3)^2$,
- $p_1, p_2 \approx\in \overline{p_0 p_3}$

Właściwość otoczki wypukłej

- Krzywa Béziera zawiera się w otoczce wypukłej swoich punktów kontrolnych



Krzywe Béziera sklejane



$$q_1'(1) = q_2'(0) \Rightarrow p_{1,3} - p_{1,2} = p_{2,1} - p_{2,0}$$

Zagadnienie interpolacji

- Dane są punkty $p_0, \ldots, p_m$ i węzły $u_0, \ldots, u_m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(u_i) = p_i$ dla $i = 0, \ldots, m$.
- Krzywa odcinkowo-wielomianowa (trzeciego stopnia).
- Sklejanie krzywych Béziera.

Splajny Catmulla-Roma

- Dane są punkty $P_0, \ldots, P_m$ i węzły $u_i = i$ dla $i = 0, \ldots, m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(i) = P_i$ dla $i = 1, \ldots, m-1$.
- Krzywa Catmull-Rom składa się z $m-2$ krzywych Béziera.
- Punkty kontrolne wybiera się tak, żeby krzywa była klasy C^1.

Splajny Catmulla-Roma

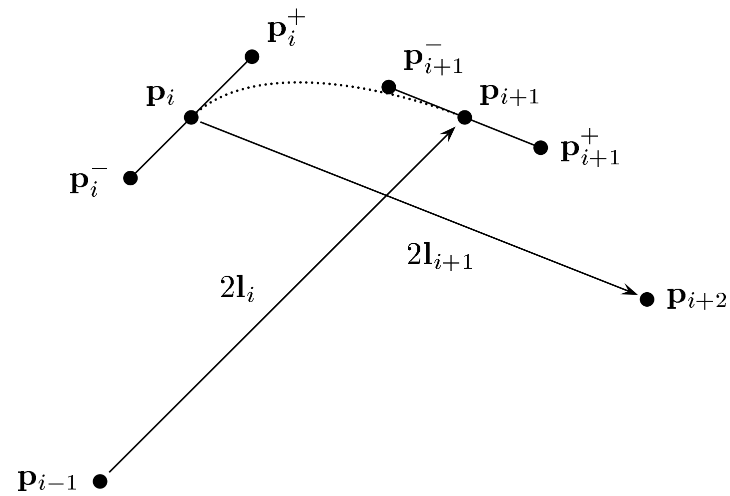


Figure VII.22: Defining the Catmull-Rom spline segment from the point $\mathbf{p}_i$ to the point $\mathbf{p}_{i+1}$. The points $\mathbf{p}_i^-$, $\mathbf{p}_i$, and $\mathbf{p}_i^+$ are collinear and parallel to $\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}$. The points $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_i^+$, $\mathbf{p}_{i+1}^-$, and $\mathbf{p}_{i+1}$ form the control points of a degree three Bézier curve, which is shown as a dotted curve.

$$l_i = \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_{i-1}), \quad p_i^{\pm} = p_i \pm \frac{1}{3} l_i$$

Syngularność splajnu Catmulla-Roma

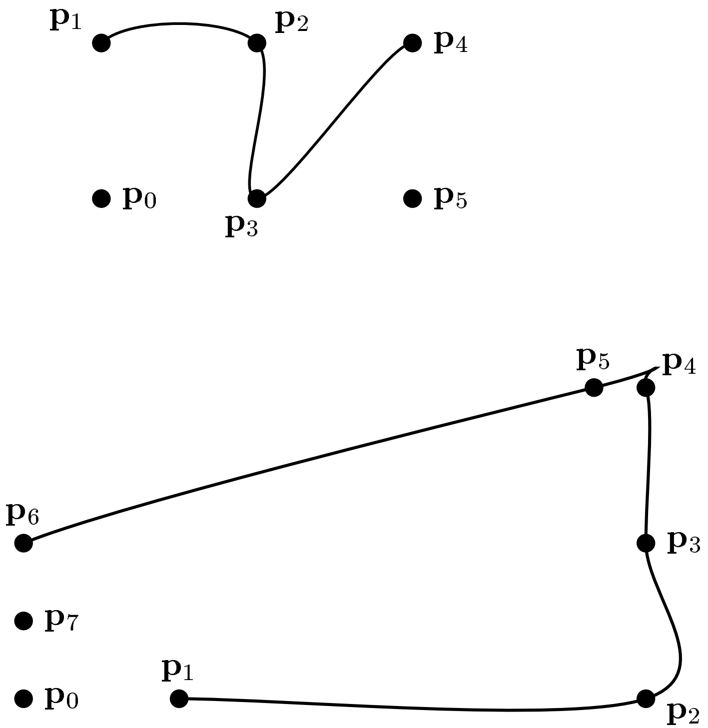


Figure VII.23: Two examples of Catmull-Rom splines with uniformly spaced knots.

Splajn TBC

- Tension-Bias-Continuity, (Napięcie-Skos-Gładkość).
- Wpływ na punkty kontrolne $p_i^{\pm}$.
- Pochodne w końcach przedziału:
  $Dq_i^- = \lim_{u \to u_i-} \frac{q(u_i)-q(u)}{u_i-u} = 3(p_i - p_i^-)$,
  $Dq_i^+ = \lim_{u \to u_i+} \frac{q(u)-q(u_i)}{u-u_i} = 3(p_i^+ - p_i)$.
- $p_i^+ = p_i + \frac{1}{3}Dq_i^+$, $p_i^- = p_i - \frac{1}{3}Dq_i^-$.
- Catmull-Rom: $Dq_i^- = Dq_i^+ = \frac{1}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}v_{i+\frac{1}{2}}$, gdzie $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$.

Napięcie t

- $t < 1$, (Catmull-Rom $t = 0$).
- $Dq_i^- = Dq_i^+ = (1-t)\left(\frac{1}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}v_{i+\frac{1}{2}}\right)$, gdzie $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$.

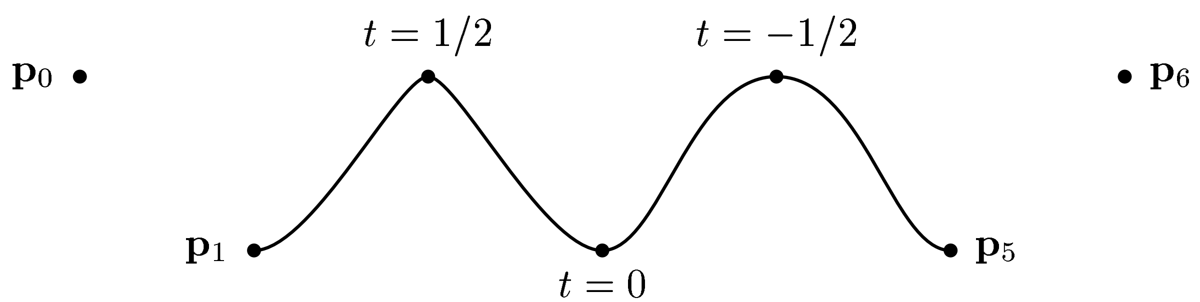


Figure VII.26: The effects of the tension parameter.

Gładkość c

- Dla krzywej klasy C^1 parametr $c = 0$.
- Dla $-1 \leqslant c < 0$ pochodnia w u_i nie jest ciągła.
- $Dq_i^- = \frac{1-c}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1+c}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$, $Dq_i^+ = \frac{1+c}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1-c}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$, gdzie $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$.

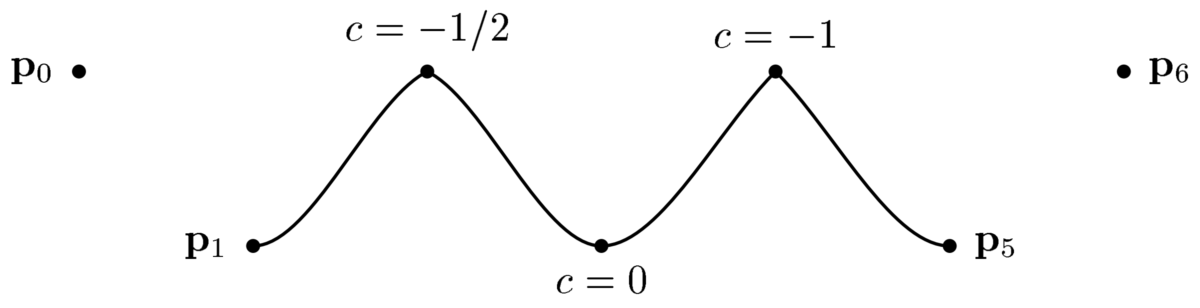


Figure VII.27: The effects of the continuity parameter.

Skos b

- $Dq_i^- = Dq_i^+ = \frac{1+b}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1-b}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$,
- gdzie $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$.

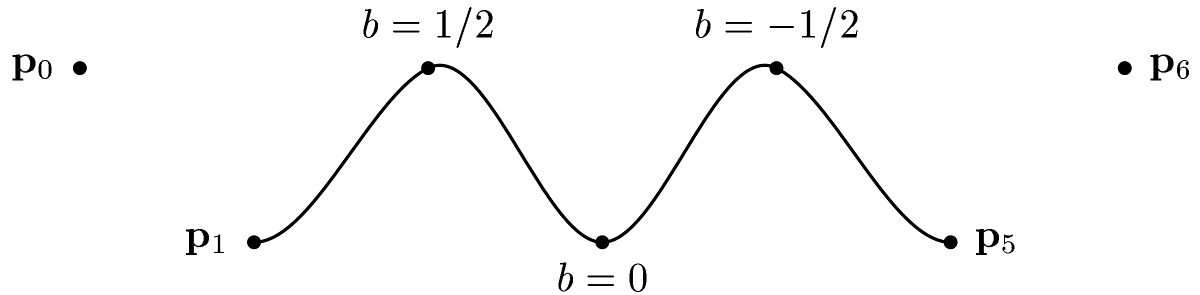


Figure VII.28: The effects of the bias parameter.

TCB

- $Dq_i^- = \frac{(1-t)(1-c)(1+b)}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{(1-t)(1+c)(1-b)}{2} v_{i+\frac{1}{2}},$
- $Dq_i^+ = \frac{(1-t)(1+c)(1+b)}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{(1-t)(1-c)(1-b)}{2} v_{i+\frac{1}{2}},$
- gdzie $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$.

Krzywe Béziera dowolnego stopnia

$$q(u) = \sum_{i=0}^{k} B_i^k(u) p_i$$

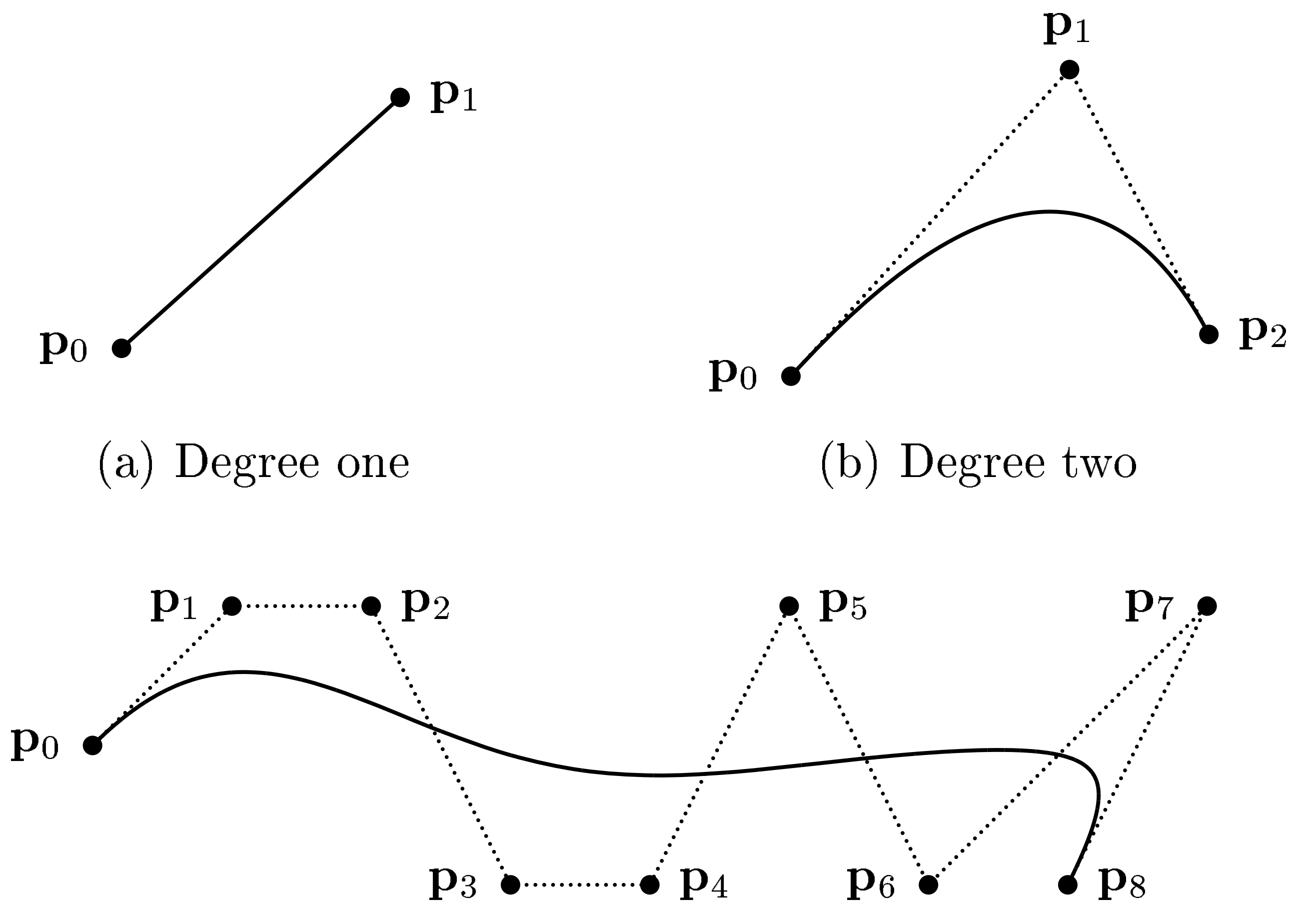
$$B_i^k(u) = \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i},$$

$$\sum_{i=0}^{k} B_i^k(u) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i} = \big(u + (1-u)\big)^k = 1,$$

$$q'(0) = k(p_1 - p_0),$$

$$q'(1) = k(p_k - p_{k-1}).$$

Krzywe Béziera dowolnego stopnia



(a) Degree one

(b) Degree two

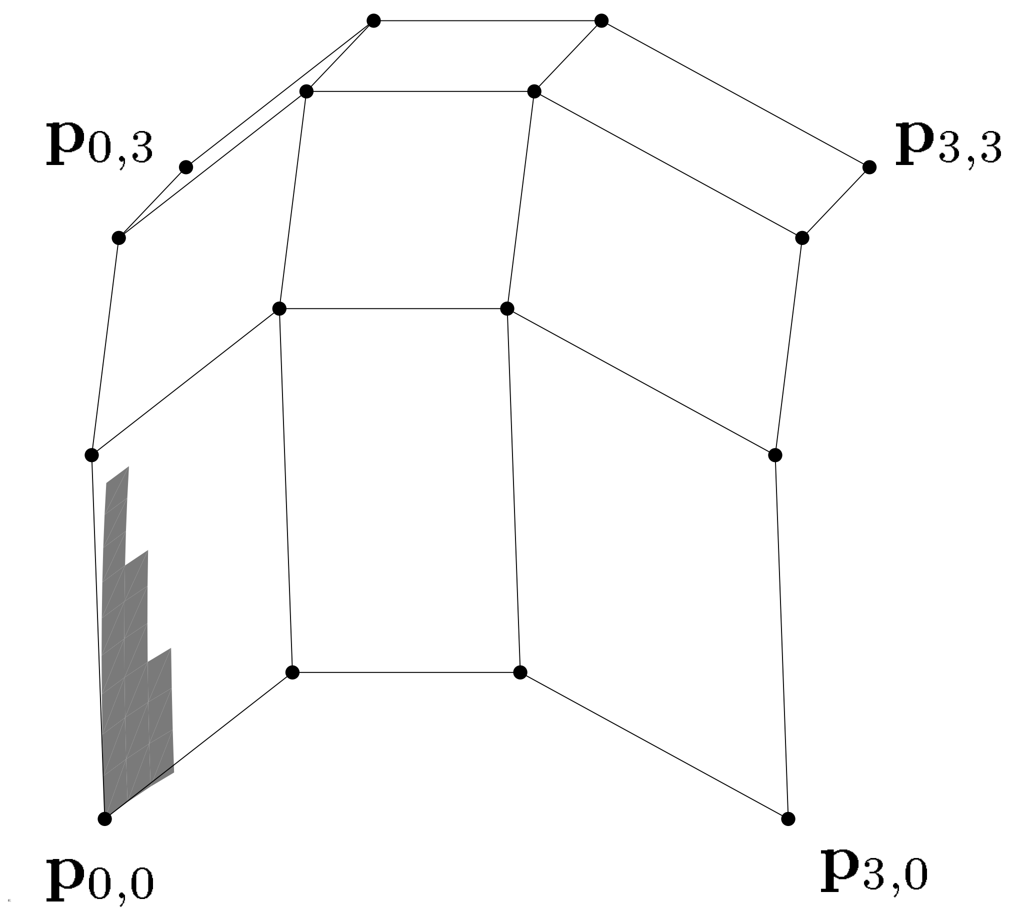
(c) Degree eight

Podwyższenie stopnia

$$\hat{P}_0 = P_0 \quad \hat{P}_{k+1} = P_k$$

$$\hat{P}_i = \frac{i}{k+1} P_{i-1} + \frac{k-i+1}{k+1} P_i$$

Powierzchnie Béziera

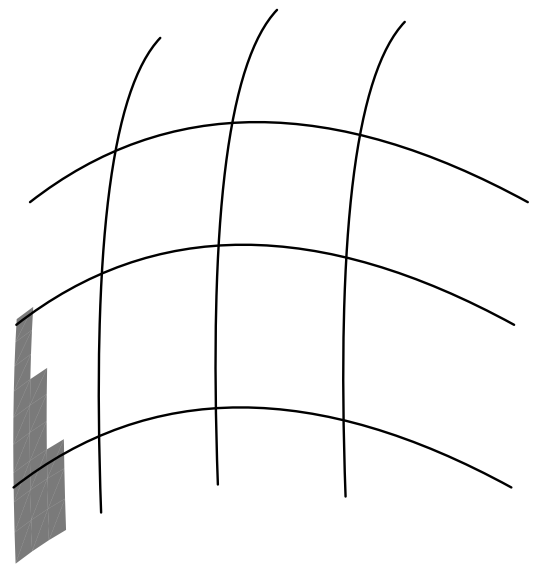


Powierzchnie Béziera trzeciego stopnia

$$
\begin{aligned}
q(u,v) &= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i(u)B_j(v)p_{i,j} = \\
&= \sum_{i=0}^{3}\left(B_i(u)\sum_{j=0}^{3} B_j(v)p_{i,j}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{3} B_j(v)\left(\sum_{i=0}^{3} B_i(u)p_{i,j}\right),
\end{aligned}
$$

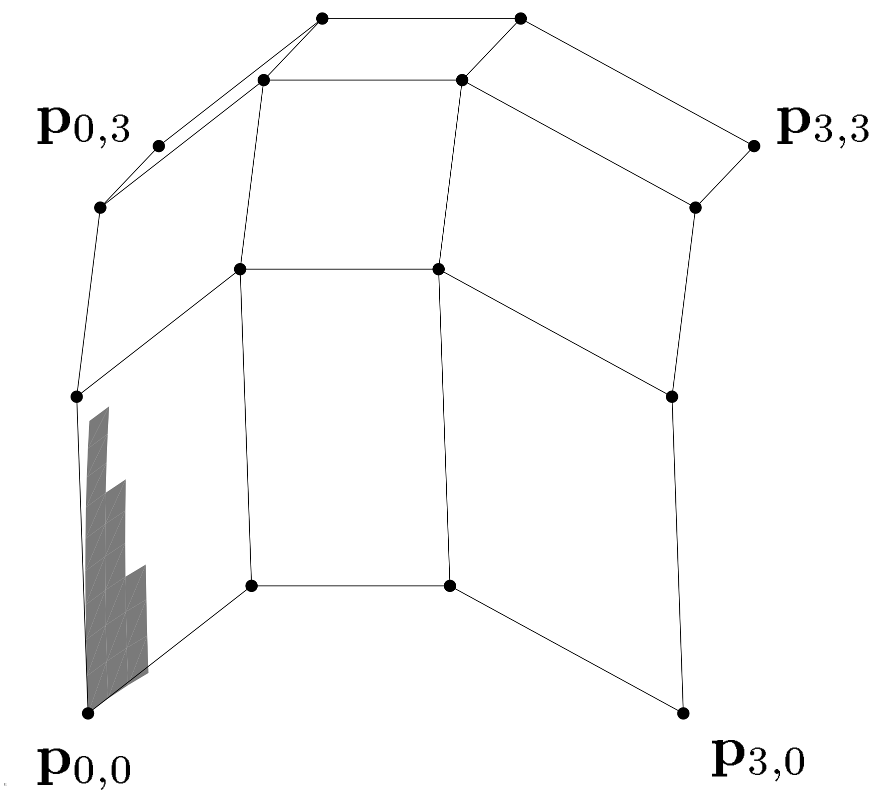
$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Przekrój powierzchni Béziera



- $$q(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\left(B_i(u)\sum_{j=0}^{3} B_j(v)p_{i,j}\right)$$
- $$r_i = \sum_{j=0}^{3} B_j(v)p_{i,j}, \quad s_j = \sum_{i=0}^{3} B_i(u)p_{i,j}$$

Graniczne linie powierzchni Béziera



- $v = 0, \quad u \in [0, 1]$: granica „przednia”, $p_{i,0}$
- $u = 0, \quad v \in [0, 1]$: granica „lewa”, $p_{0,j}$

Pochodne cząstkowe powierzchni Béziera

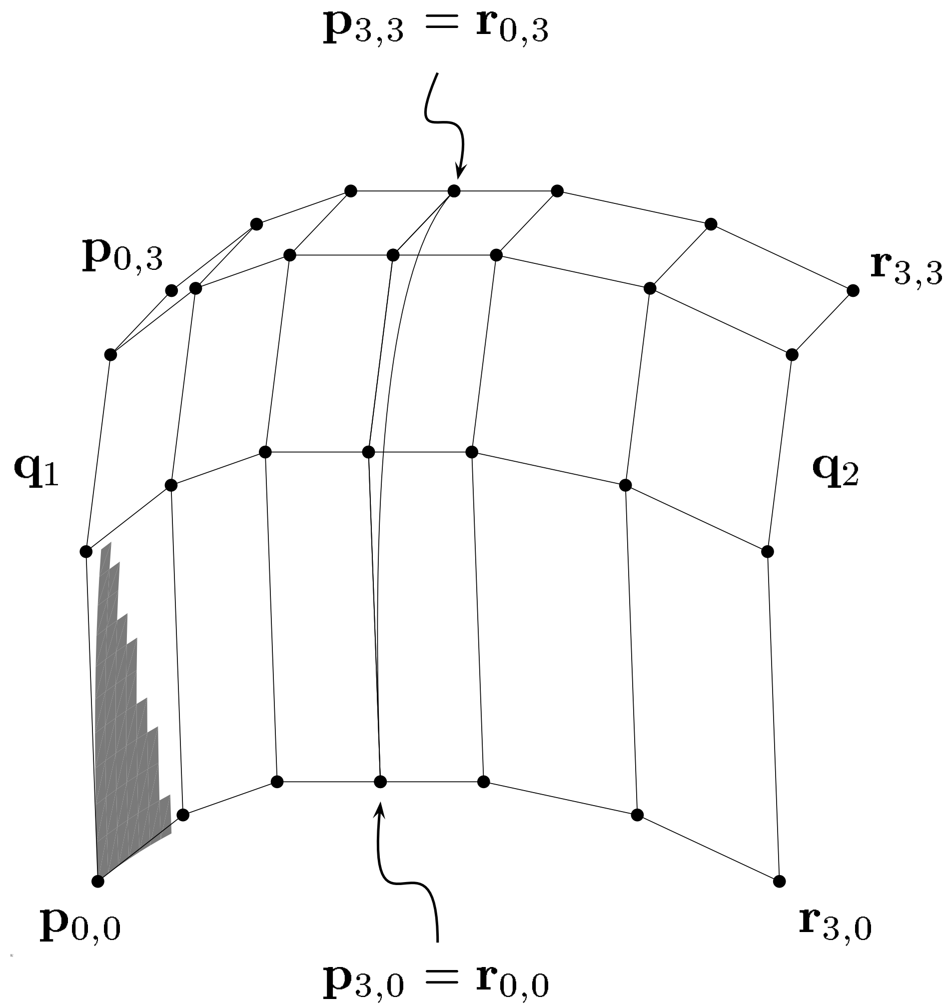
$$\frac{\partial q}{\partial v}(u,0) = \sum_{i=0}^{3} 3B_i(u)(p_{i,1} - p_{i,0})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}(u,1) = \sum_{i=0}^{3} 3B_i(u)(p_{i,3} - p_{i,2})$$

$$\frac{\partial q}{\partial u}(0,v) = \sum_{i=0}^{3} 3B_j(v)(p_{1,j} - p_{0,j})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}(1,v) = \sum_{i=0}^{3} 3B_j(v)(p_{3,j} - p_{3,j})$$

Sklejane powierzchnie Béziera



Wymierne krzywe Béziera

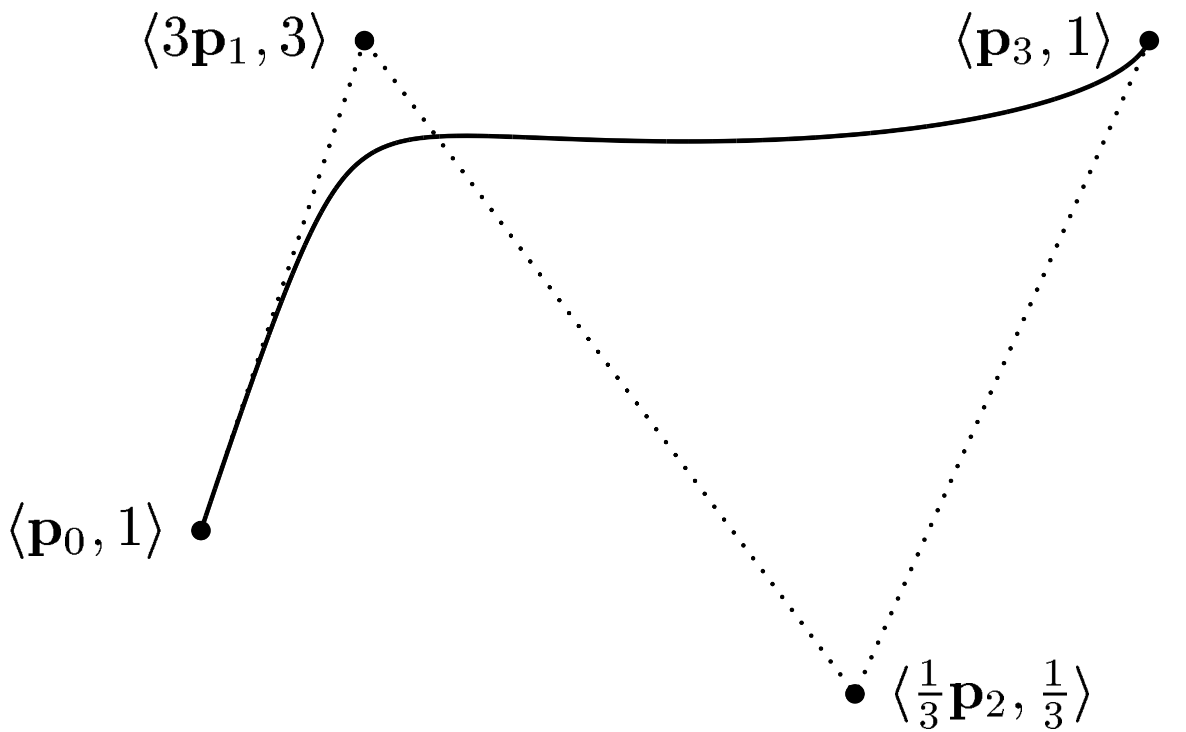
$p_i = (x : y : z : w)$,

$$q(u) = \sum_i B_i^k(u) p_i$$

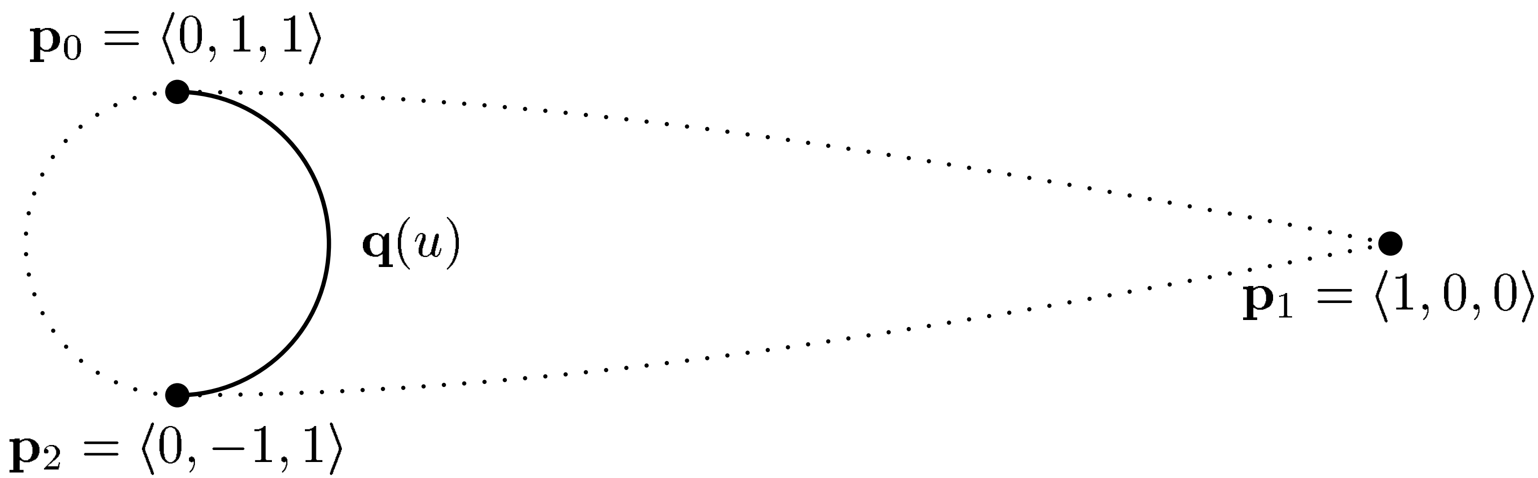
- współrzędna w pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności

Powiększenie wagi punktu kontrolnego

$$q(u) = \sum_i B_i^k(u)(w_i p_i : w_i) \sim \sum_i \frac{w_i B_i^k(u)}{\sum_j w_j B_i^k(u)} p_i$$



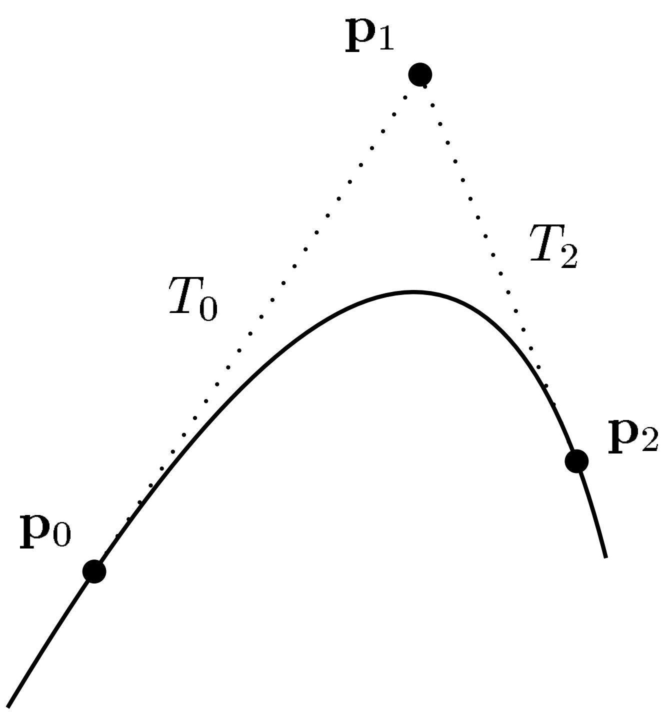
Okrąg



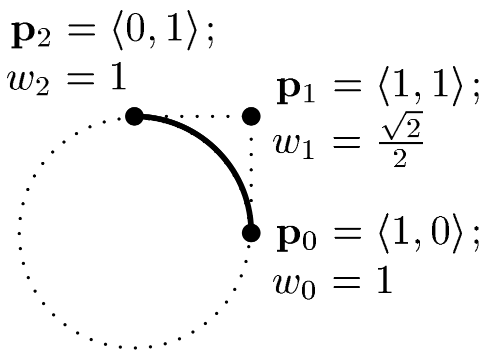
$$
\begin{aligned}
q(u) &= (1-u)^2 p_0 + 2u(1-u)p_1 + u^2 p_2 = \\
&= \left(2u(1-u) : (1-u)^2 - u^2 : (1-u)^2 + u^2\right) \sim \\
&\sim \left(\frac{2u(1-u)}{(1-u)^2+u^2}, \frac{(1-u)^2-u^2}{(1-u)^2+u^2}\right)
\end{aligned}
$$

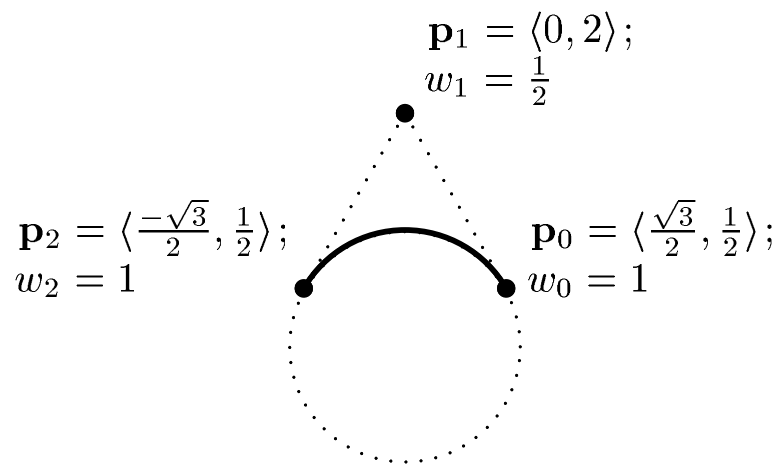
Krzywe stożkowe

Twierdzenie 3. *Niech T_0 i T_2 będą stycznymi do krzywej stożkowej C w punktach p_0 i p_2, p_1 bęzie punktem przecięcia T_0 i T_2. Wtedy istnieje waga $w \geqslant 0$ taka, że wymierna krzywa Béziera o punktach kontrolnych $(p_0 : 1)$, $(p_1 : w)$, $(p_2 : 1)$ generuje odcinek krzywej C pomiędzy p_0 a p_2.*

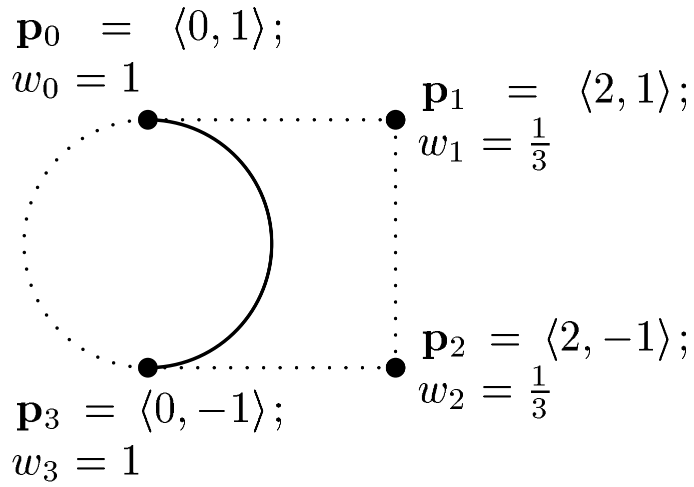


Krzywe stożkowe



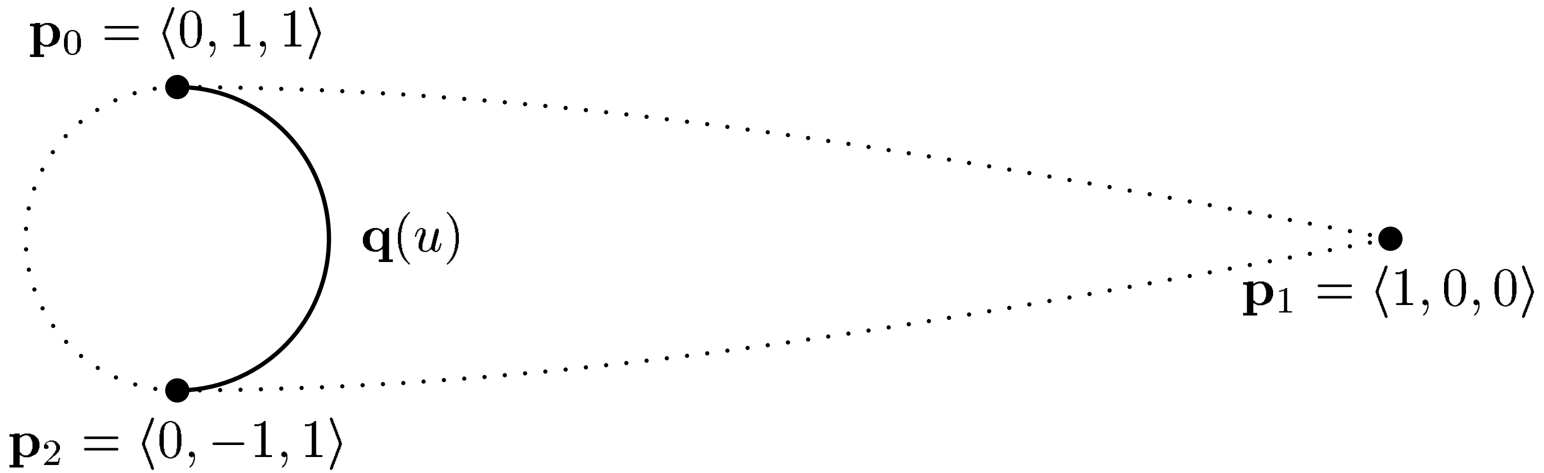


Półokrąg jako krzywa trzeciego stopnia

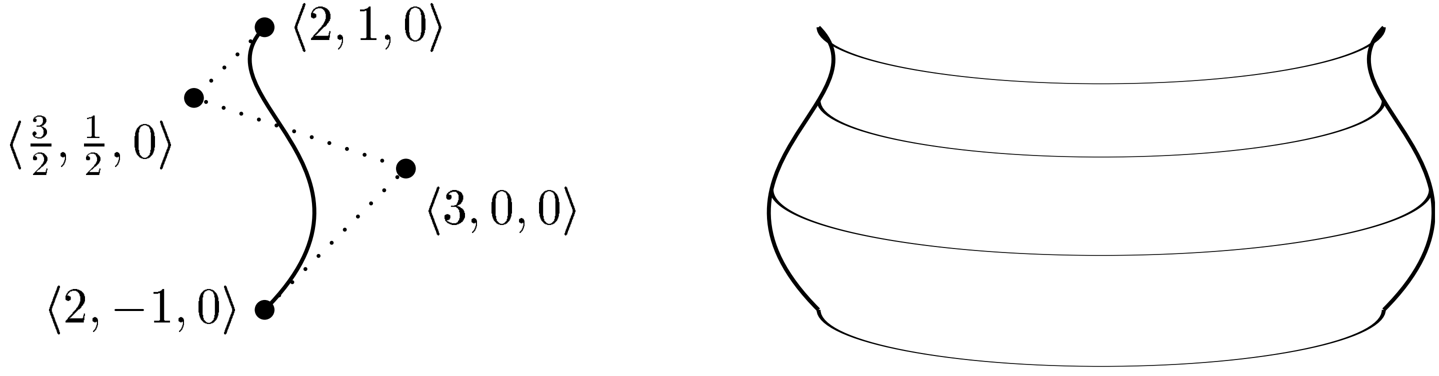


Okrąg o promieniu 2

$$(p_0, p_1, p_2) \mapsto (p_0^* = Mp_0, p_1^* = Mp_1, p_2^* = Mp_2)$$



Bryła obrotowa



(a) (b)

$$
\begin{array}{ccc}
(-2:1:0:1) & (0:0:2:0) & (2:1:0:1) \\
(-\frac{3}{2}:\frac{1}{2}:0:1) & (0:0:\frac{3}{2}:0) & (\frac{3}{2}:\frac{1}{2}:0:1) \\
(-3:0:0:1) & (0:0:3:0) & (3:0:0:1) \\
(-2:-1:0:1) & (0:0:2:0) & (2:-1:0:1)
\end{array}
$$