Matematyczne Podstawy Grafiki Komputerowej. Interpolacja i Teksturowanie

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm`

Interpolacja

Zagadnienie interpolacji

- Dane są *węzły:* $x_0, \ldots, x_n$
- Dane są *wartości:* $y_0, \ldots, y_n$
- Wyznaczyć funkcję $f(x)$ taką, że $f(x_0) = y_0$, . . . , $f(x_n) = y_n$
- Interpolacja wielomianowa: $f(x)$ jest *wielomianem*

Interpolacja jednowymiarowa

- $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

Twierdzenie 1. *Istnieje jedyny taki wielomian $f(x)$ stopnia n, że $f(x_0) = y_0, \ldots, f(x_n) = y_n$.*

Wielomian Lagrange'a

$$f(x) = y_0 \frac{(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)} + \\ + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots + \\ + y_k \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} + \\ + \dots + y_n \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

Ilorazy różniczkowe

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f(x_0;x_1) & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0;x_1;x_2) & & \\
 & & f(x_1;x_2) & & f(x_0;x_1;x_2;x_3) & \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1;x_2;x_3) & & \ldots \\
 & & f(x_2;x_3) & & f(x_1;x_2;x_3;x_4) & \ldots \\
x_3 & f(x_3) & & f(x_2;x_3;x_4) & & \ldots
\end{array}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

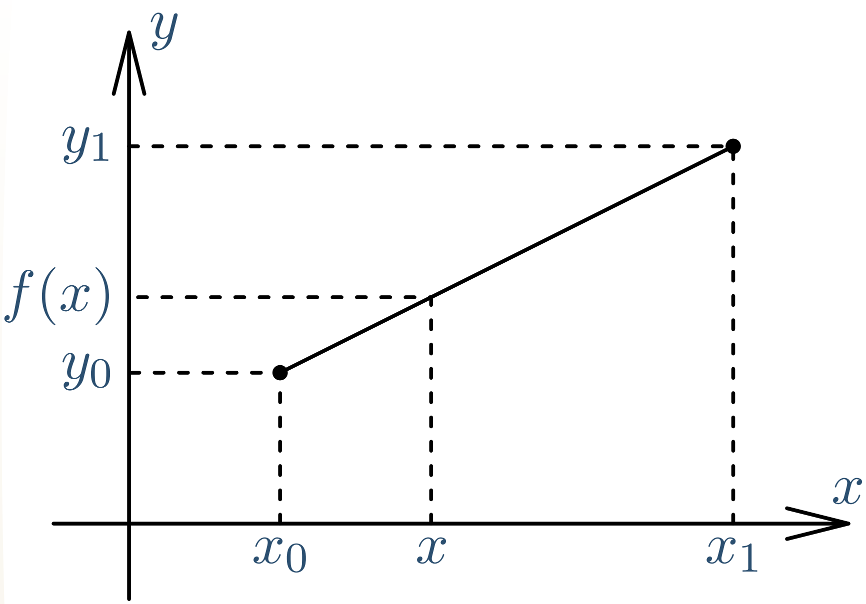
- $f(x_0;x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, $f(x_1;x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_2)}{x_2-x_2}, \ldots$
- $f(x_0;x_1;x_2) = \frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}, \ldots$
- $f(x_0;x_1;x_2;x_3) = \frac{f(x_1;x_2;x_3)-f(x_0;x_1;x_2)}{x_3-x_0}, \ldots$
- $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $f(x_0;\ldots;x_n) = \frac{f(x_1;\ldots;x_n)-f(x_0;\ldots;x_{n-1})}{x_n-x_0}, \ldots$

Wielomian Newtona

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0)+ \\
+ f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+ \\
+ \cdots + f(x_0;\ldots;x_n)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

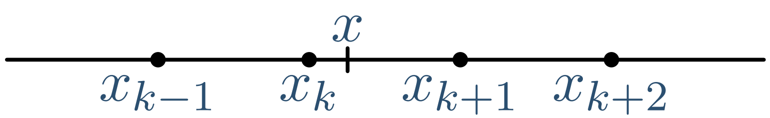
- To jest ten sam wielomian zapisany inaczej

Interpolacja liniowa



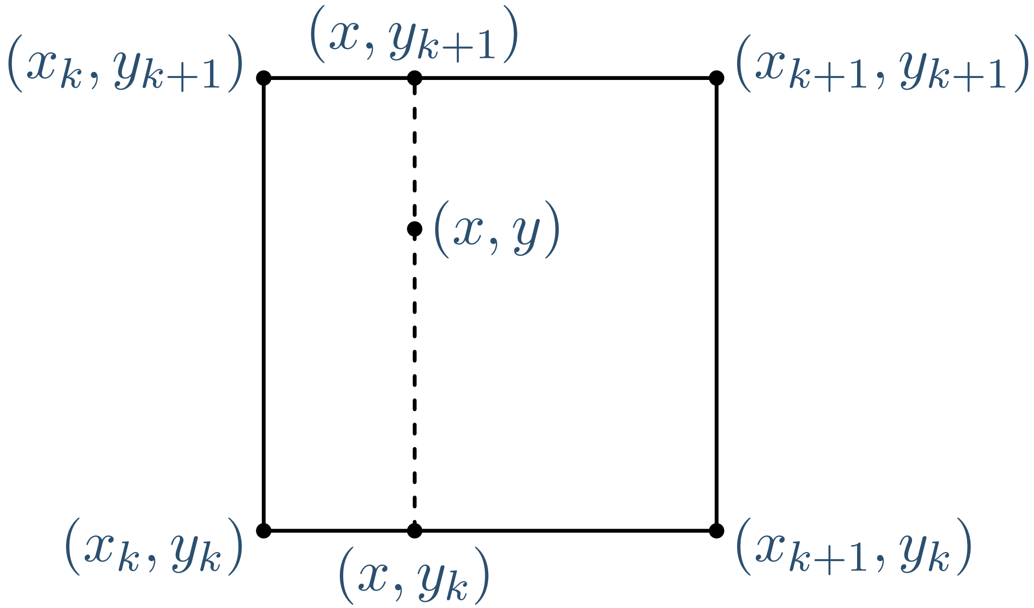
- $f(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
- $f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Interpolacja sześcienna



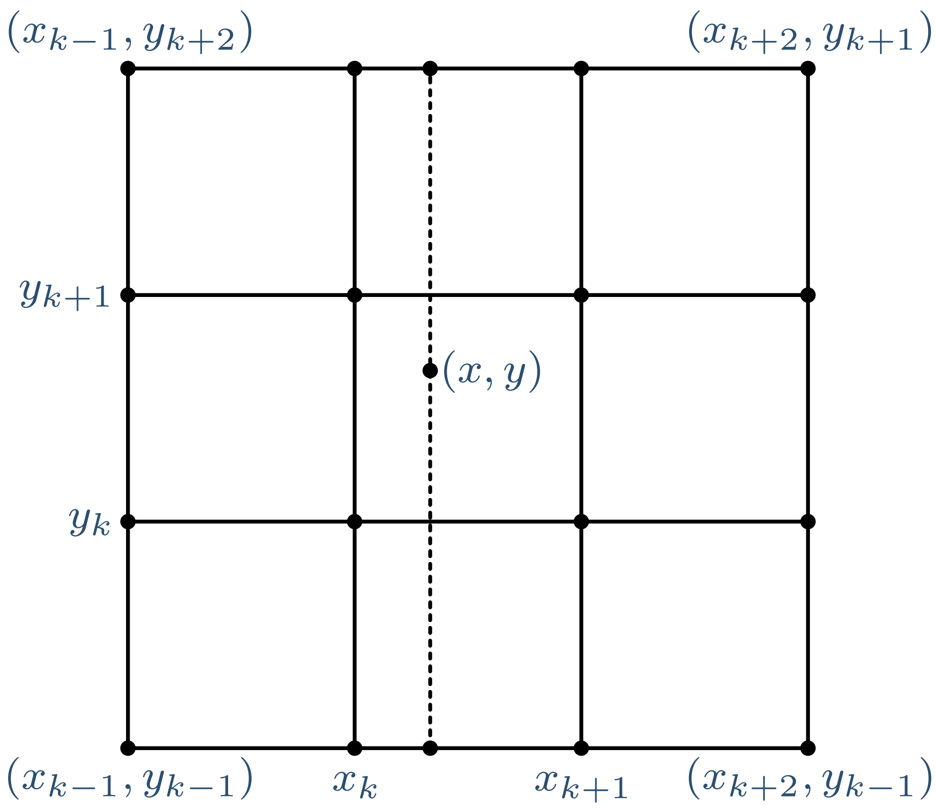
- $x_k = x_0 + kh,\ k = 0, 1, \ldots, n$
- $k = \left[\frac{x-x_0}{h}\right]$ (część całkowita, podłoga, floor)

Interpolacja dwuliniowa



- $f(x,y) = f(x,y_k)\frac{y-y_{k+1}}{y_k-y_{k+1}} + f(x,y_{k+1})\frac{y-y_k}{y_{k+1}-y_k}$
  - $f(x,y_k) = f(x_k,y_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + f(x_{k+1},y_k)\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$
  - $f(x,y_{k+1}) = f(x_k,y_{k+1})\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + f(x_{k+1},y_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$

Interpolacja dwusześcienna



Interpolacja a Teksturowanie

Interpolacja liniowa

$$x(\alpha) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

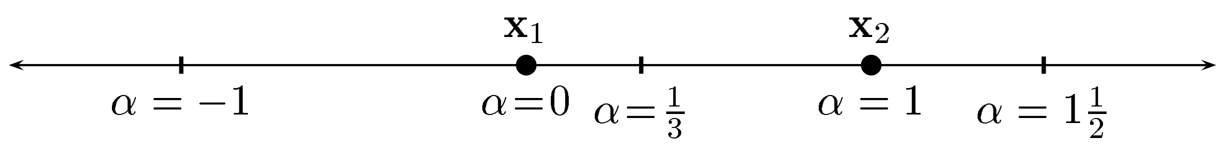


Figure IV.1: Interpolated and extrapolated points for various values of α. For $\alpha < 0$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is to the left of $\mathbf{x}_1$. For $\alpha > 1$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is to the right of $\mathbf{x}_2$. For $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{x}(\alpha)$ is between $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$.

$$u - x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$$

$$\alpha = \frac{(u - x_1)\cdot(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$f(x(\alpha)) = (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

Współrzędne barycentryczne

Twierdzenie 2. *Niech dane będą trzy niekolinearne punkty $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, formujące trójkąt T należący do płaszczyzny P. Wtedy*

1. $\forall u \in T\ \exists \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, *takie że* $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ *(kombinacja wypukła),*
2. $\forall u \in P\ \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *takie że* $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ *(kombinacja afiniczna).*

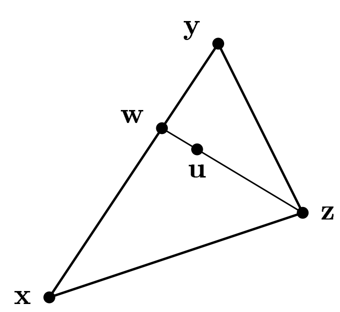


Figure IV.2: The point **u** in the interior of the triangle is on the line segment from **w** to **z**. The point **w** is a weighted average of **x** and **y**. The point **u** is a weighted average of **w** and **z**.

Współrzędne barycentryczne

Twierdzenie 3. *Współczynniki α, β, γ z twierdzenia 2 określone są jednoznacznie.*

Definicja 1. Współczynniki α, β, γ z twierdzenia 2 nazywają się *barycentrycznymi współrzędnymi* punktu u.

Przykład 1. $x = (0, 0)$, $y = (2, 3)$, $z = (3, 1)$,

- $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0,$
- $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = 0,$
- $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \gamma = -1.$

Interpolacja po trzech punktach

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$
$$f(u) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma f(z)$$

Współrzędne barycentryczne a pole

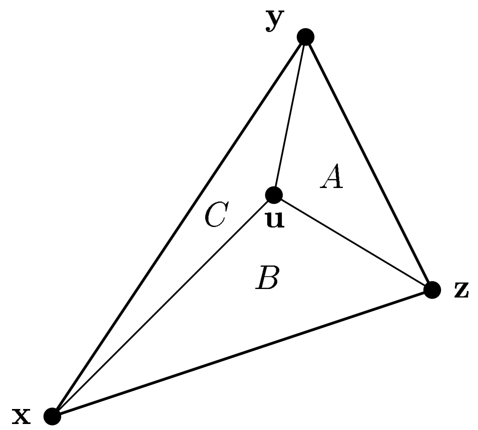


Figure IV.3: The barycentric coordinates α, β and γ for the point $\mathbf{u}$ are proportional to the areas A, B and C.

Twierdzenie 4. *Współrzędne barycentryczne oblicza się przez pola trójkątów według wzoru:*

$$\alpha = \frac{A}{A+B+C}, \quad \beta = \frac{B}{A+B+C}, \quad \gamma = \frac{C}{A+B+C}.$$

Dowód twierdzenia 4

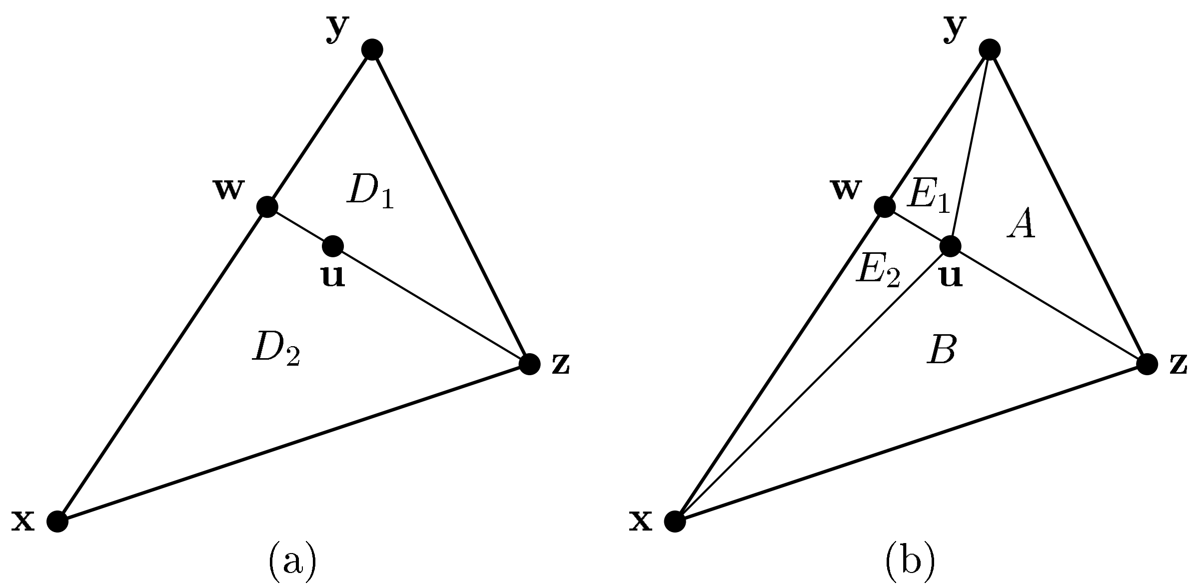


Figure IV.4: The areas used in the proof of Theorem IV.4.

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^2$

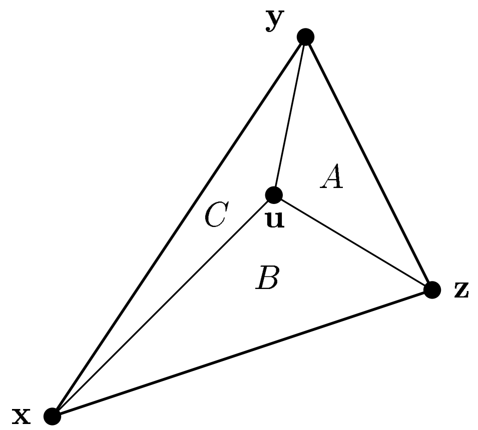


Figure IV.3: The barycentric coordinates α, β and γ for the point **u** are proportional to the areas A, B and C.

$$\beta = \frac{(z-x)\times(u-x)}{(z-x)\times(y-x)}, \quad \gamma = \frac{(u-x)\times(y-x)}{(z-x)\times(y-x)},$$

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma.$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^3$

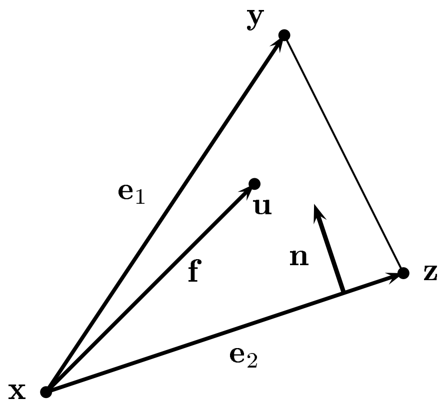


Figure IV.5: Calculating barycentric coordinates in $\mathbb{R}^3$.

$$m = e_1 - (e_1 \cdot e_2)e_2/e_2^2, \quad n = m/|m|$$

$$D = \frac{1}{2}(n \cdot e_1)|e_2| = \frac{(m \cdot e_1)|e_2|}{2|m|}$$

$$B = \frac{1}{2}(n \cdot f)|e_2| = \frac{(m \cdot f)|e_2|}{2|m|}$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych w $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \frac{B}{D} = \frac{m \cdot f}{m \cdot e_1} = \frac{(e_2^2 e_1 - (e_1 \cdot e_2) e_2) \cdot f}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2}$$

$$\gamma = \frac{(e_1^2 e_2 - (e_2 \cdot e_1) e_1) \cdot f}{e_2^2 e_1^2 - (e_2 \cdot e_1)^2}$$

$$u_\beta = \frac{e_2^2 e_1 - (e_1 \cdot e_2) e_2}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2} \quad u_\gamma = \frac{e_1^2 e_2 - (e_1 \cdot e_2) e_1}{e_1^2 e_2^2 - (e_1 \cdot e_2)^2}$$

$$\beta = u_\beta \cdot f, \quad \gamma = u_\gamma \cdot f, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

Obliczenie barycentrycznych współrzędnych

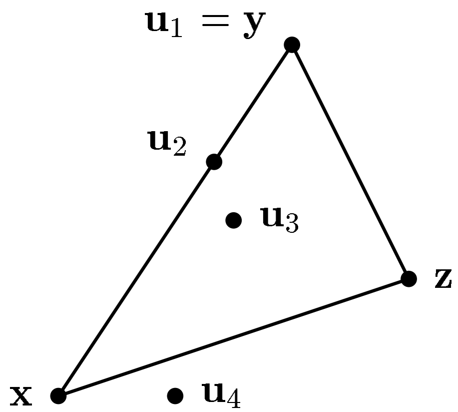


Figure IV.6: The points from exercise IV.5.

Przykład 2. $x = (0, 0)$, $y = (2, 3)$, $z = (3, 1)$.

- $u = (2, 3)$,
- $u = (1\frac{1}{3}, 2)$,
- $u = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,
- $u = (1, 0)$.

Interpolacja biliniowa (dwuliniowa)

$$
\begin{aligned}
u = (1-\beta)\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) + \beta\big((1-\alpha)w + \alpha z\big) &= \\
= (1-\alpha)\big((1-\beta)x + \beta w\big) + \alpha\big((1-\beta)y + \beta z\big) &= \\
= (1-\alpha)(1-\beta)x + \alpha(1-\beta)y + \alpha\beta z + (1-\alpha)\beta w &
\end{aligned}
$$

$$
f = (1-\alpha)(1-\beta)f(x) + \alpha(1-\beta)f(y) + \alpha\beta f(z) + (1-\alpha)\beta f(w)
$$

Interpolacja biliniowa

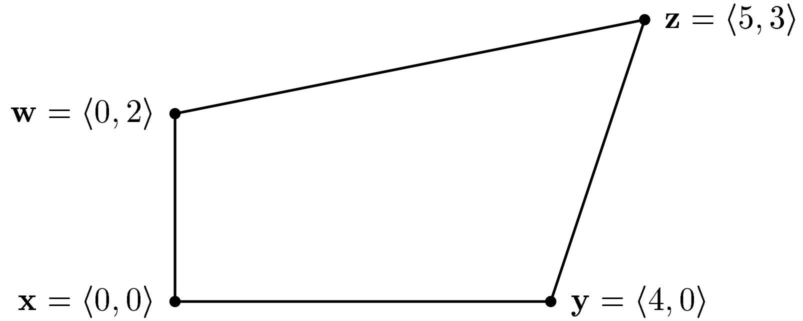


Figure IV.8: Figure for exercise IV.7.

Przykład 3. $x = (0, 0)$, $y = (4, 0)$, $z = (5, 3)$, $w = (0, 2)$

- $\alpha = 1$, $\beta = 0$
- $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 1$
- $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$
- $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$

Interpolacja biliniowa

Twierdzenie 5. *Niech x, y, z i w tworzą płaski, wypukły czworokąt. Wtedy odwzorowanie interpolacji biliniowej*

$$[0,1]^2 \to xyzw,$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto u(\alpha, \beta)$$

jest wzajemnie-jednoznacznym

Wniosek 1. *Niech punkty x, y, z i w będą niekomplanarne. Wtedy odwzorowanie*

$$(\alpha, \beta) \mapsto u(\alpha, \beta)$$

jest wzajemnie-jednoznacznym.

Interpolacja biliniowa

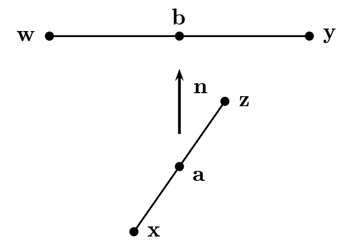


Figure IV.10: The line segments $\overline{\mathbf{xz}}$ and $\overline{\mathbf{yw}}$ have midpoints $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The vector $\mathbf{n}$ is the unit vector in the direction from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$.

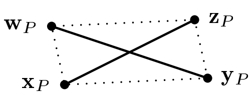


Figure IV.11: The projections of the two diagonals onto the plane P are non-collinear and intersect at their midpoints, at the common projection of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The four projected vertices form a convex quadrilateral.

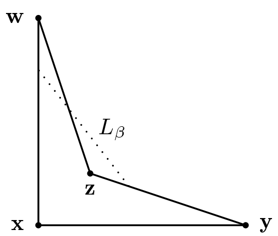


Figure IV.13: An example of the failure of Theorem IV.6 for non-convex, planar quadrilaterals.

Odwrócenie na płaszczyźnie

$A = (w - x) \times (z - y)$

$B = (z - y) \times (u - x) - (w - x) \times (u - y)$

$C = (u - x) \times (u - y)$

if $B > 0$ **then**

$\beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

else

$\beta = \frac{2C}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}$

end if

$s_{1,\beta} = (1 - \beta)x + \beta w$

$s_{2,\beta} = (1 - \beta)y + \beta z$

$\alpha = \frac{(u - s_{1,\beta}) \cdot (s_{2,\beta} - s_{1,\beta})}{(s_{2,\beta} - s_{1,\beta})^2}$

Odwrócenie na płaszczyźnie

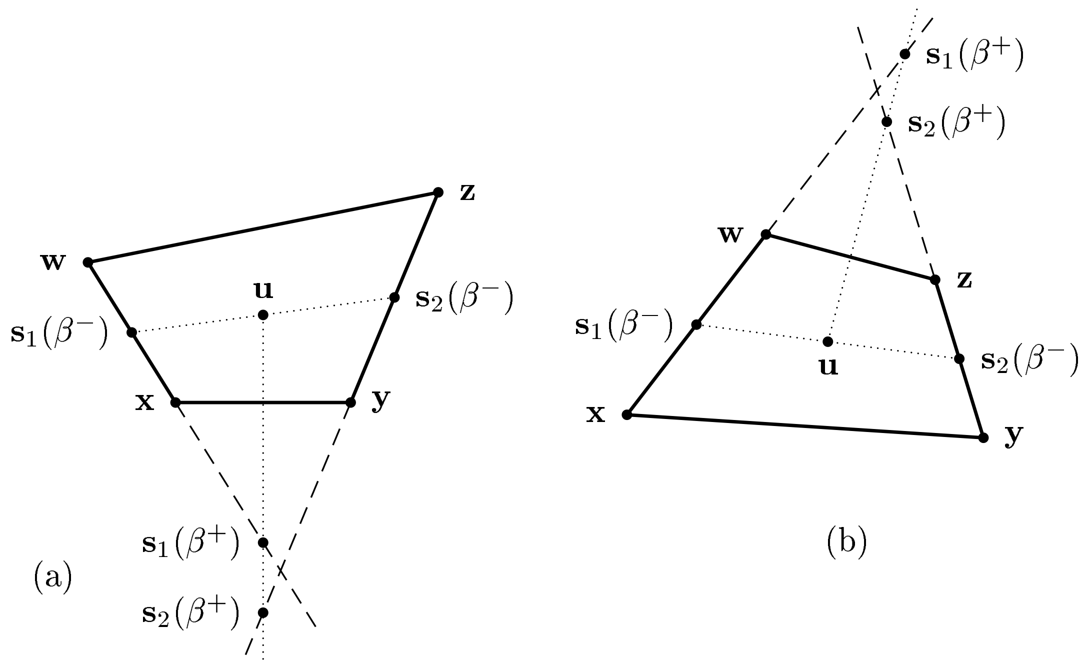


Figure IV.15: The two possibilities for the sign of $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$. In (a), $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 < 0$; in (b), $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 > 0$. In each case, there are two values for β where the points $\mathbf{s}_1(\beta)$, $\mathbf{s}_2(\beta)$, and $\mathbf{u}$ are collinear. The values β^+ and β^- are the solutions to equation (IV.22) obtained with the indicated choice of plus/minus sign. For both (a) and (b), $\beta = \beta^-$ is between 0 and 1 and is the desired root.

Interpolacja trójliniowa

Dane są osiem punktów $x_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3$, $i, j, k = 0, 1$.

$$u(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i,j,k} w_i(\alpha) w_j(\beta) w_k(\gamma) x_{i,j,k},$$

gdzie

$$w_n(\delta) = \begin{cases} 1 - \delta, & n = 0 \\ \delta & n = 1 \end{cases}$$

$$f(u(\alpha, \beta, \gamma)) = \sum_{i,j,k} w_i(\alpha) w_j(\beta) w_k(\gamma) f(x_{i,j,k})$$

Zbiory wypukłe

Definicja 2. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *wypukłym,* jeżeli dowolny odcinek, którego końce należą do tego zbioru, w całości się w nim zawiera.

- odcinek
- prosta linia, promień
- płaszczyzna, półpłaszczyzna
- podprzestrzeń liniowa, afiniczna
- koło, kula
- trójkąt, równoległobok
- etc.

Otoczka wypukła

Definicja 3. *Otoczka wypukła (powłoka wypukła, uwypuklenie)* zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ jest to najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór wypukły zawierający A. Otoczkę wypukłą A oznacza się zwykle jako: $\operatorname{conv} A$.

- Powłoką wypukłą zbioru wypukłego jest ten sam zbiór
- Powłoka wypukła zbioru punktów płaszczyzny $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, gdzie $n > 2$ jest wielokątem (wielobokiem) wypukłym o wierzchołkach należących do zbioru $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.
- Powłoką wypukłą zbioru trzech punktów niewspółliniowych jest trójkąt o wierzchołkach w tych punktach.
- Otoczką wypukłą zbioru $\{A, B\}$ jest odcinek AB.

Otoczka wypukła

Twierdzenie 6. *Otoczkę wypukłą zgadza się ze zbiorem wszystkich* kombinacji wypukłych *elementów zbioru A:*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ x \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, a_i \in A, \beta_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \right\}$$

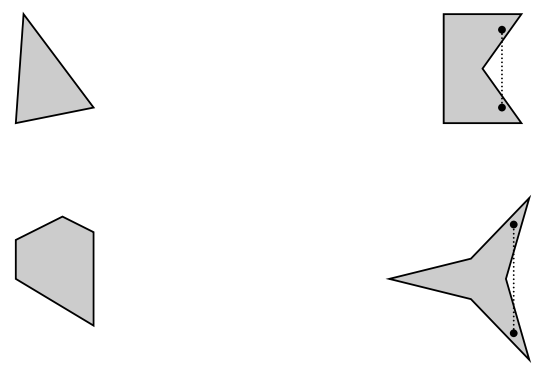


Figure IV.17: The shaded regions represent sets. The two sets on the left are convex, and the two sets on the right are not convex. The dotted lines show line segments with endpoints in the set which are not entirely contained in the set.

Wypukłe kombinacje współrzędnych jednorodnych

$x_0 = (0:0:0:1)$, $x_1 = (1:0:0:1)$, $x_1' = (2:0:0:2)$.

$$\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 = (\frac{1}{2} : 0 : 0 : 1) \quad \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1' = (1 : 0 : 0 : \frac{3}{2})$$

$w_i > 0$

$$\alpha_1(w_1x_1 : w_1) + \cdots + \alpha_k(w_kx_k : w_k) =$$
$$= \left(\frac{\alpha_1w_1x_1 + \cdots + \alpha_kw_kx_k}{\sum \alpha_iw_i} : 1\right)$$

Wypukłe kombinacje współrzędnych jednorodnych

Twierdzenie 7. *Niech dany będzie zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy kombinacje wypukłe jednorodnych współrzędnych punktów A $(w_i > 0)$ będą tworzyć jednorodne współrzędne $\operatorname{conv} A$.*

Teksturowanie

Techniki teksturowania

- Tekstura zawiera informacje o kolorach, które mają zastąpić obliczone kolory powierzchni.
- Tekstura zawiera informacje o kolorach, blasku, przezroczystości, które mają zmienić charakterystyki powierzchni po obliczniach oświetlenia i cieniowania.
- Tekstura zawiera parametry, mające wpływ na obliczenie oświetlenia (współczynnik odbicia, przemieszczenie wektoru normalnego, etc).

Tekstura

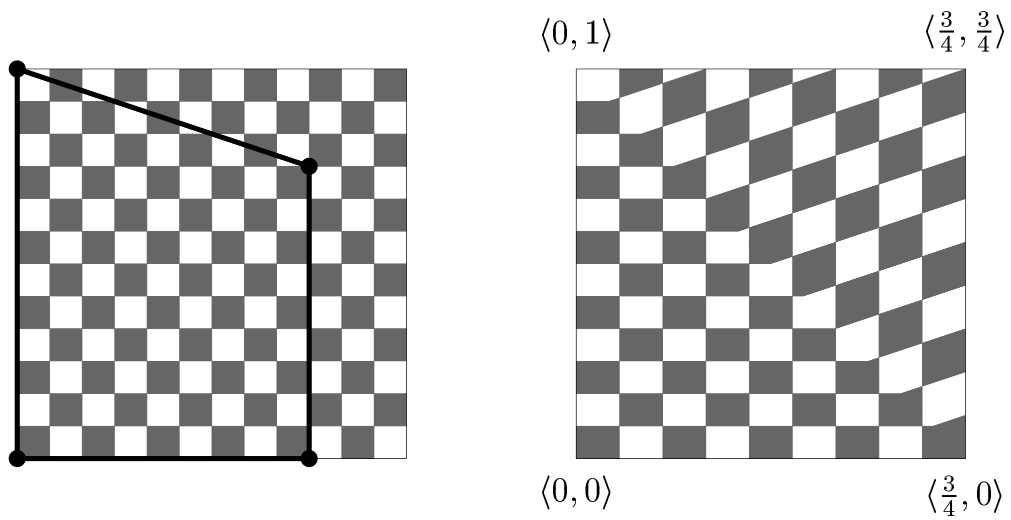
- Zdjęcie, obrazek skanowany, utworzony edytorem graficznym.
- Obrazek zaprogramowany (skompilowany, generowany na bieżąco).
- Obrazek generowany podaczas mapowania (odbicie).

Teksturowanie

$$[0,1] \times [0,1] \to \text{model}$$

Interpolacja tekstury

1. Określa się lokalne współrzędne tekstury w wierzchołkach wieloboku
2. Interpoluje się wewnątrz



Wybór lokalnych współrzędnych dla tekstury

- Płaszczyzna.
- Powierzchnia parametryzowana

$$P(u, v).$$

Współrzędne na teksturze zależą od u i v. (Może być również od $p(u, v)$, wektoru normalnego do powierzchi, etc.)

Walec. Mapowanie cylindryczne

- $p(\theta, y) = (r \sin\theta, y, r\cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta < 360, -h/2 \leqslant y \leqslant h/2$
- $s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{y+h/2}{h}$

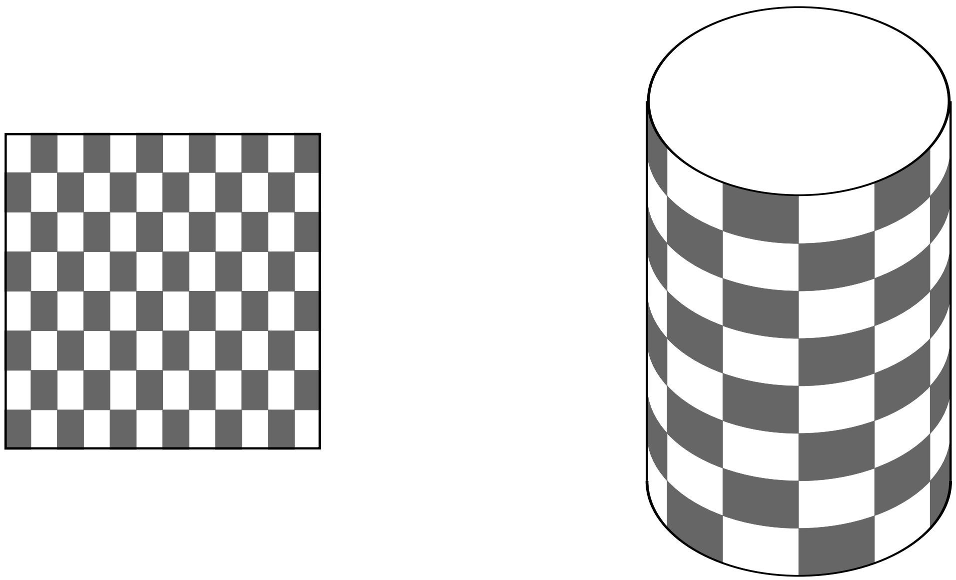


Figure V.3: A texture map and its application to a cylinder.

Walec

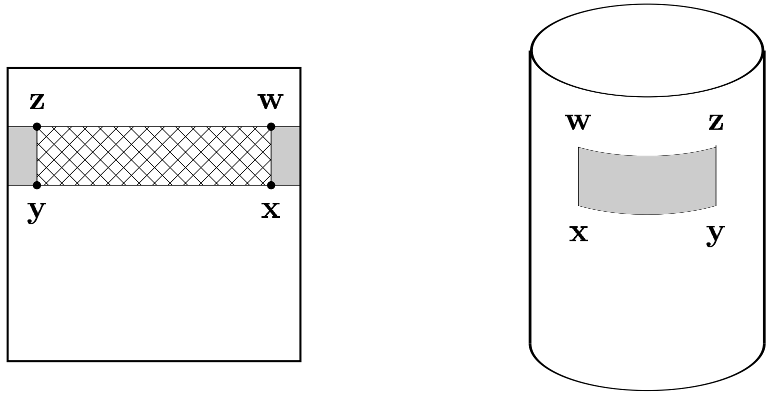


Figure V.4: The quadrilateral **x**, **y**, **z**, **w** selects a region of the texture map. The crosshatched region of the texture map is *not* the intended region of the texture map. The shaded area is the intended region.

Sfera. Mapowanie sferyczne

$$P(\theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\varphi, r \cos\theta \cos\varphi)$$

- $s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\varphi}{180} + \frac{1}{2}$
- $s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\sin\varphi}{2} + \frac{1}{2}$

Mapowanie sferyczne

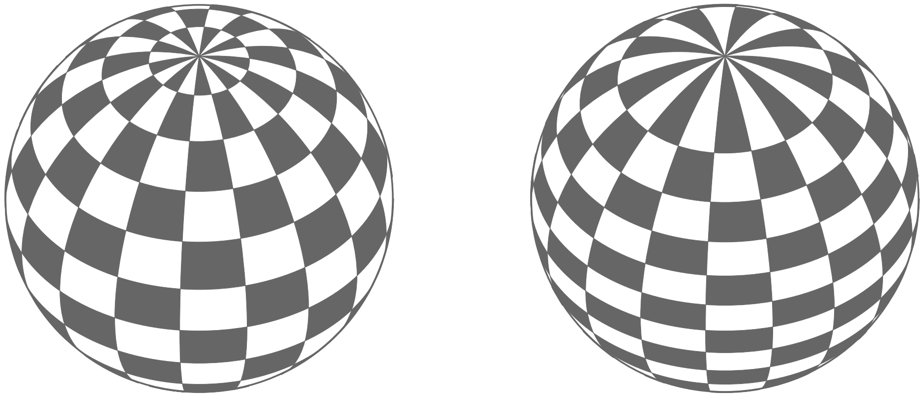
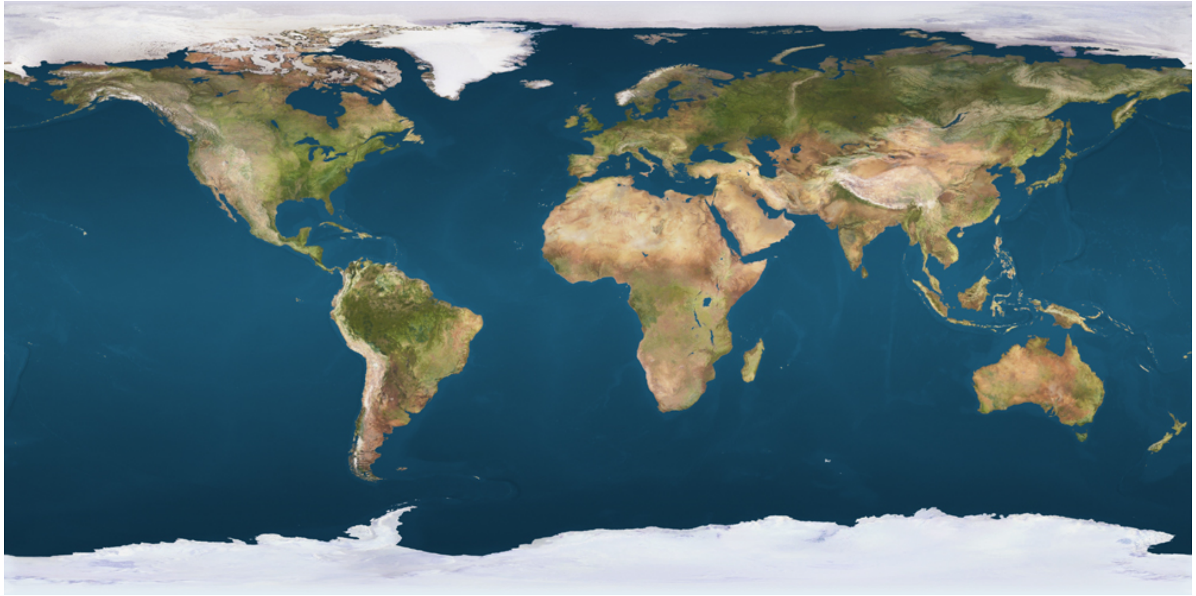


Figure V.5: Two applications of a texture map to a sphere. The sphere on the left has a checkerboard texture applied with texture coordinates given by the spherical map of equation (V.2). The sphere on the right uses texture coordinates given by the cylindrical projection of equation (V.3). The spheres are drawn with a tilt and a small rotation.

Przykładowa tekstura sferyczna



Torus

$$P(\theta, \varphi) = \big((R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi, (R + r\cos\varphi)\cos\theta\big)$$

$$s = \frac{\theta}{360}, \quad t = \frac{\varphi}{360}$$

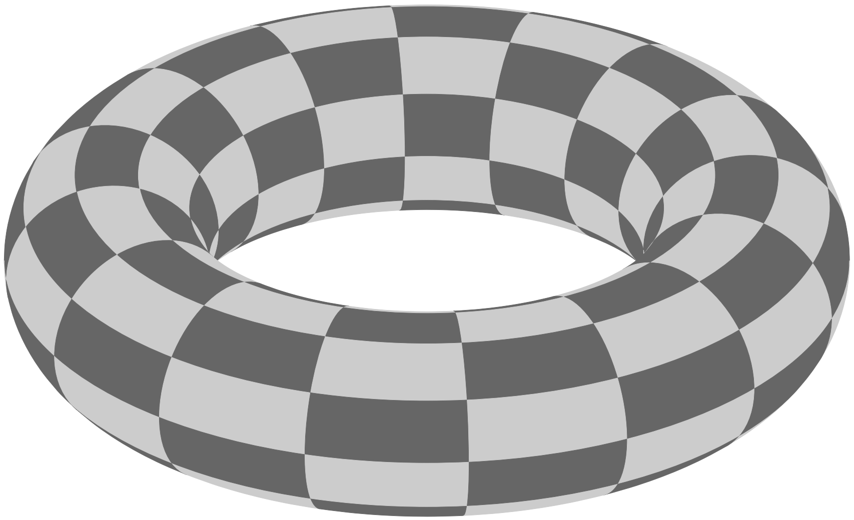


Figure V.6: A checkerboard texture map applied to a torus.

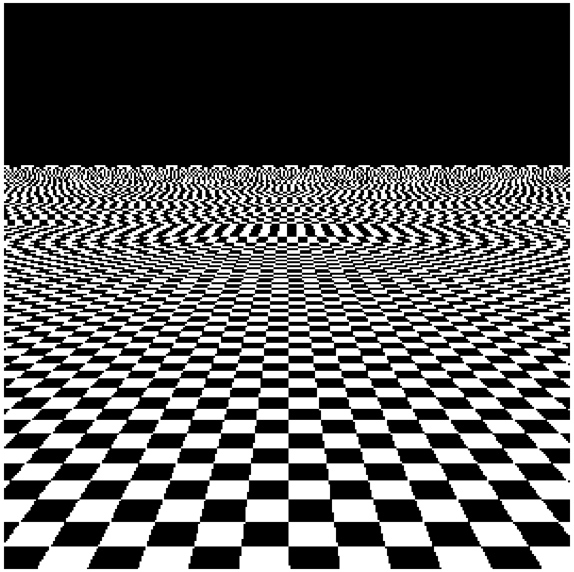
Aliasing

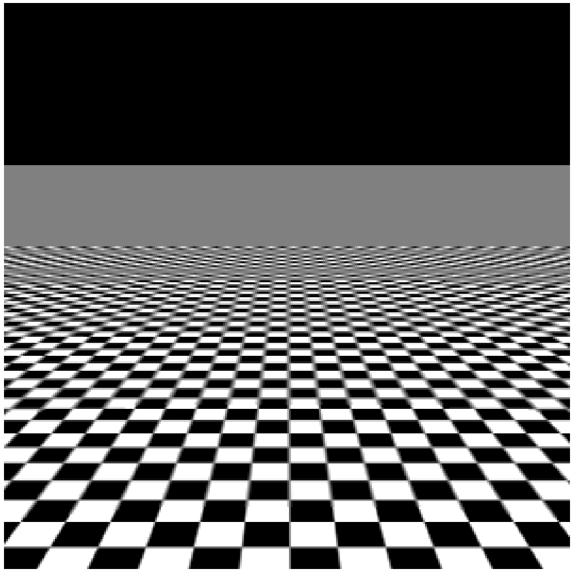
- Rozdzielczość tekstury jest mniejsza od rozdzielczości ekranu
- Rozdzielczość tekstury jest większa od rozdzielczości ekranu
  - Miganie, interferencja, plamy
  - Obiekty ruszające się

Antialiasing

- Interpolacja
- Mipmapping
  - Zastosowanie skalowanych tekstur
  - Interpolacja najbliższych tekstur
  - Zwiększenie prędkości
  - Zwiększenie pamięci o 33%
    - $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$
  - Jest implemientowany sprzętowo

Mipmapping





Supersampling (nadpróbkowanie)

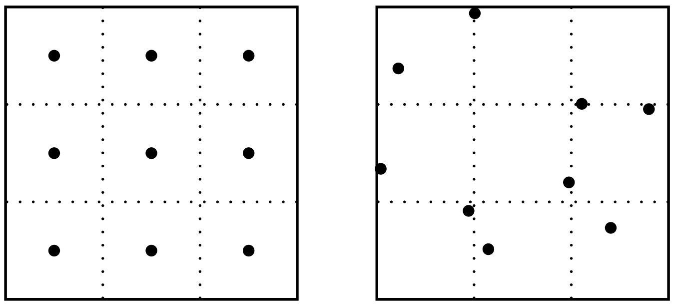
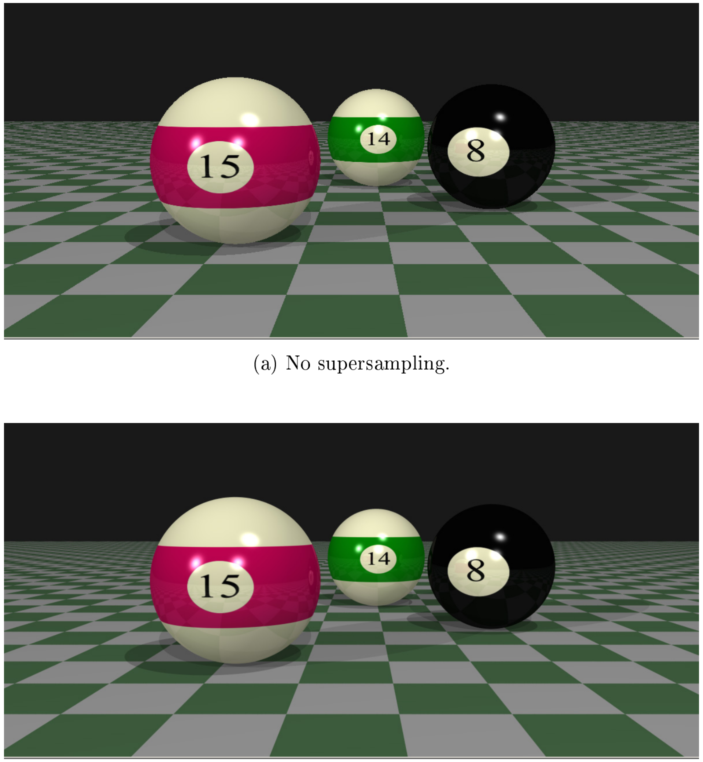


Figure V.7: In the first figure, the nine supersample points are placed at the centers of the nine subpixels. In the second figure, the supersample points are jittered, but are constrained to stay inside their subpixel.

- Zwykły
- Stochastyczny
- Jittering (fluktacje)

Supersampling



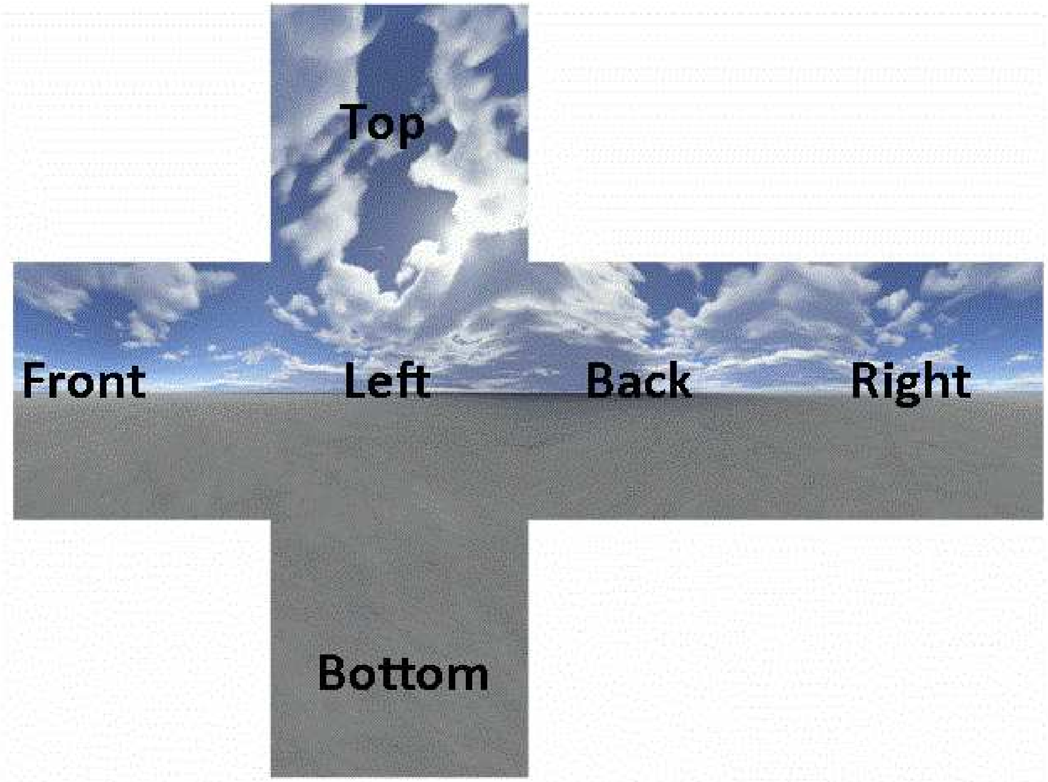
(a) No supersampling.

(b) Supersampling with jittered subpixel centers.

Figure IX.9: An example of anti-aliasing using jittered subpixel centers. (a) shows the scene rendered without supersampling; note the "jaggies" on the silhouettes of the balls, for instance. (b) is the scene with pixels selectively supersampled up to a maximum of 40 times. See color plate C.9.

Skybox

- Mapowanie sześcienne
  - sześć obrazków, trzy współrzędne teksturowe
    - na ścianach ± 1

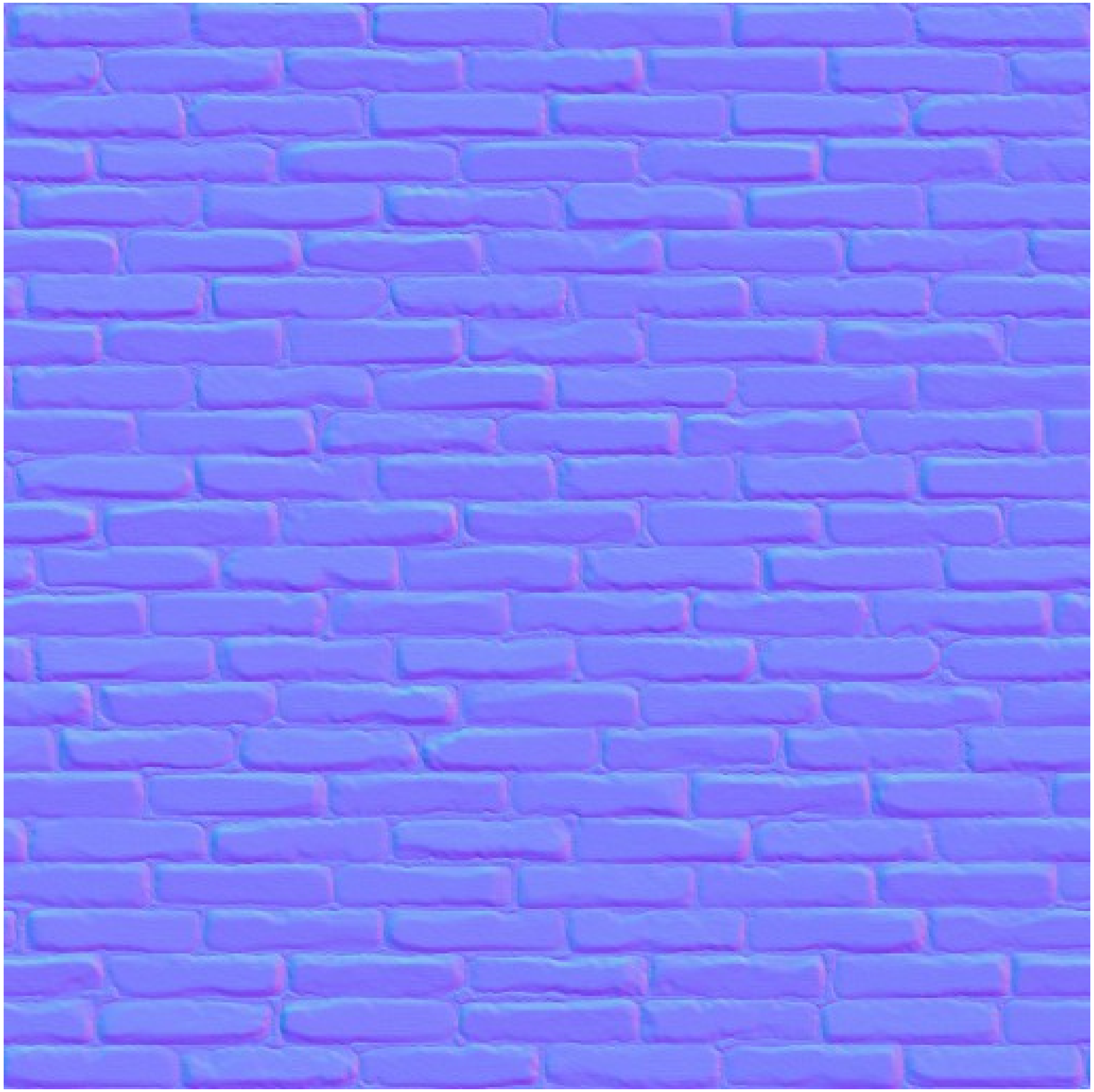


Mapowanie wypukłości

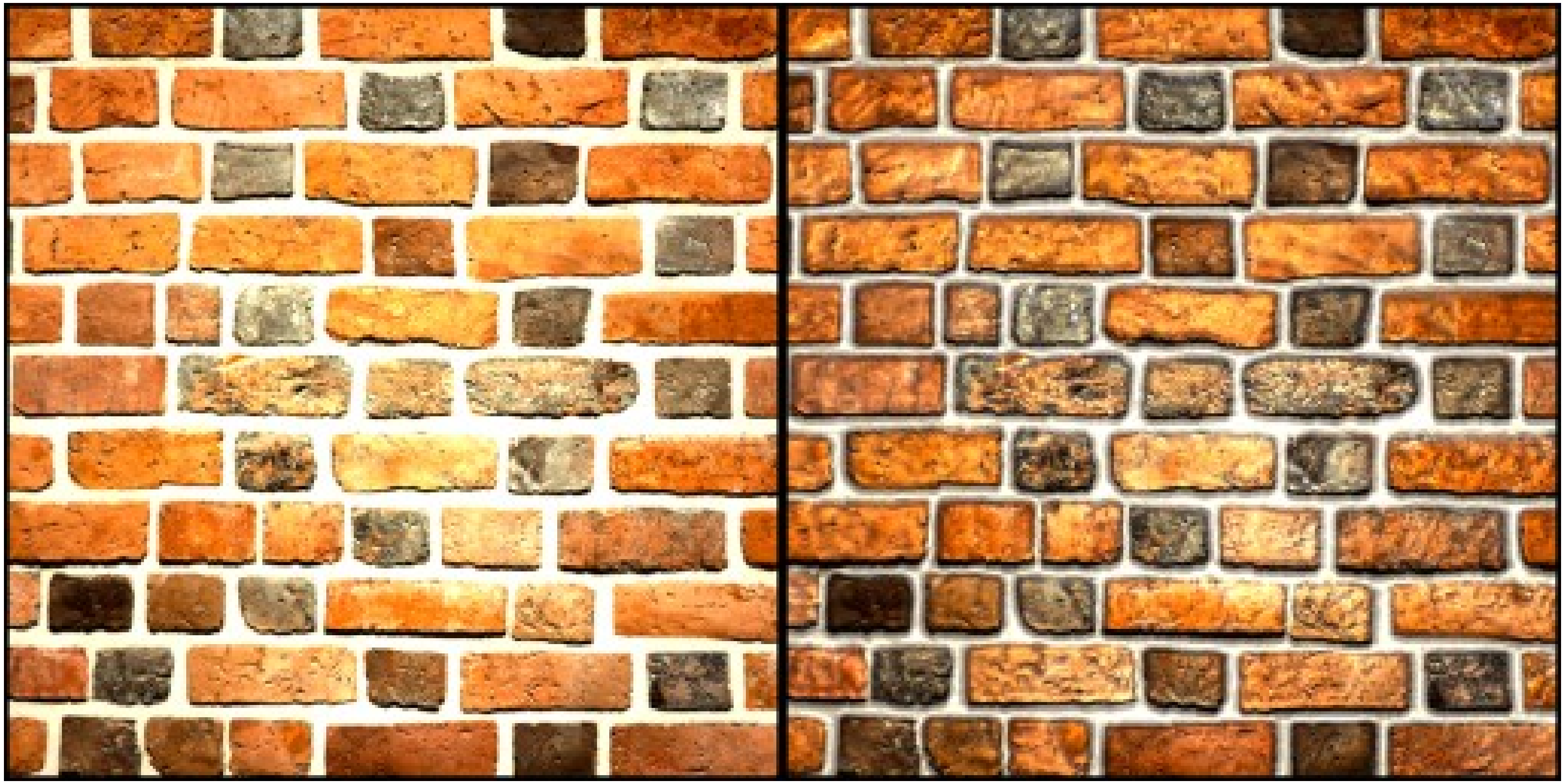
Figure V.8: A bump mapped torus. Note the lack of bumps on the silhouette. There are four white lights shining on the scene, plus a low level of ambient illumination. This picture was generated with the ray tracing software described in appendix B. See color plate C.6.

- Zmiana wektora normalnego
- Przed oblicznie‌m oświetlenia

Przykładowa mapa normalnych



Zwykły render vs Bumpmapping



Mapowanie środowiska

- Dany jest mały zwierciadlany obiekt (kula, sześcian).
- Oblicza się (robi się zdjęcie) mapa tekstury jako obraz otoczenia widoczny od środka obiektu