

Matematyczne Podstawy Grafiki Komputerowej. Rzutowanie

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Rzutowanie

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

Rzutowanie

Dwa typy rzutowania

Rzutowanie

❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study: modelowanie cienia

Case study: przekształcenie rzutowe obrazów

- Równoległe
- Perspektywiczne

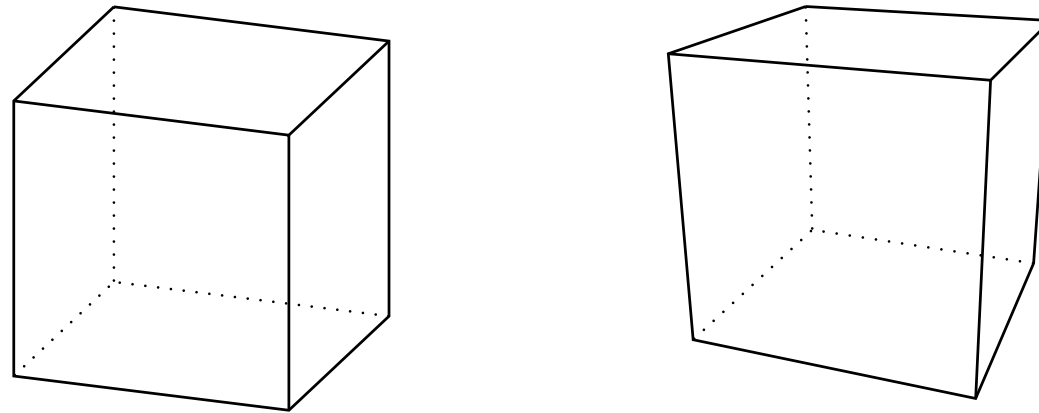


Figure II.18: The cube on the left is rendered with an orthographic projection. The one on the right with a perspective transformation. With the orthographic projection, the rendered size of a face of the cube is independent of its distance from the viewer; compare, for example, the front and back faces. Under a perspective transformation, the closer a face is, the larger it is rendered.

Ukryte powierzchnie

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania

- ❖ Ukryte powierzchnie

- ❖ Rzutowanie równoległe

- ❖ Rzutowanie perspektywiczne

- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

- Algorytm malarza
- Algorytm buforu głębokości

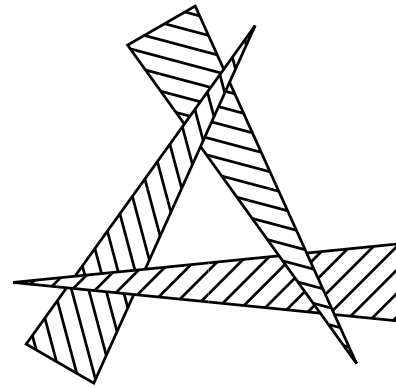


Figure I.12: Three triangles. The triangles are turned obliquely to the viewer so that the top portions of each triangle is in front of the base portion of another.

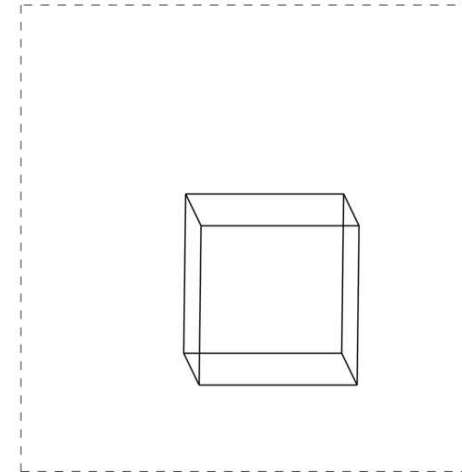
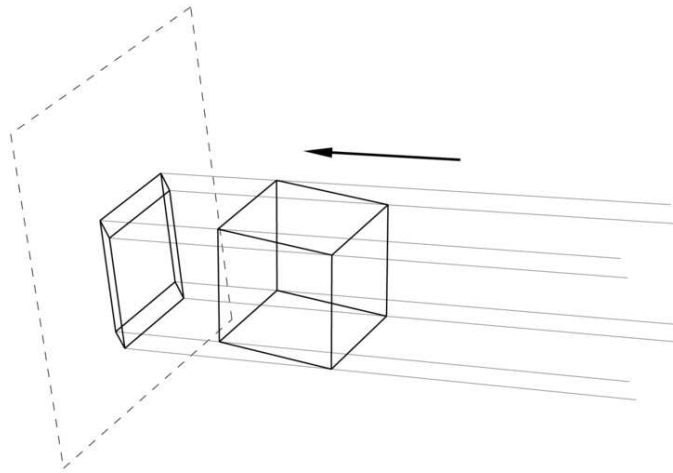
Rzutowanie równoległe

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów



Macierz rzutowania równoległego

Rzutowanie

❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

$$l \leq x \leq r, \quad \text{left, right}$$

$$b \leq y \leq t, \quad \text{bottom, top}$$

$$n \leq -z \leq f, \quad \text{near, far}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

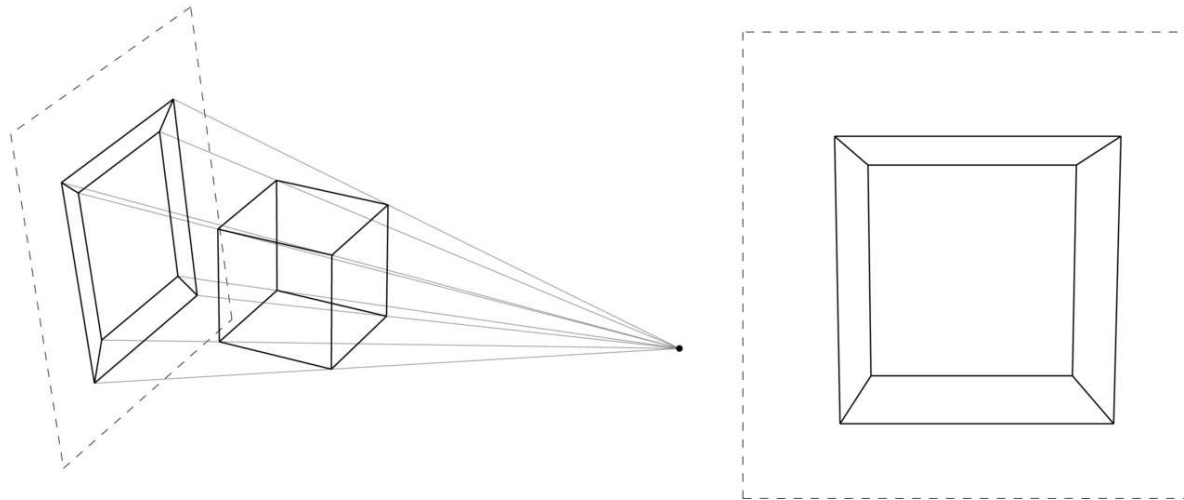
Rzutowanie perspektywiczne

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów



Rzutowanie perspektywiczne

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

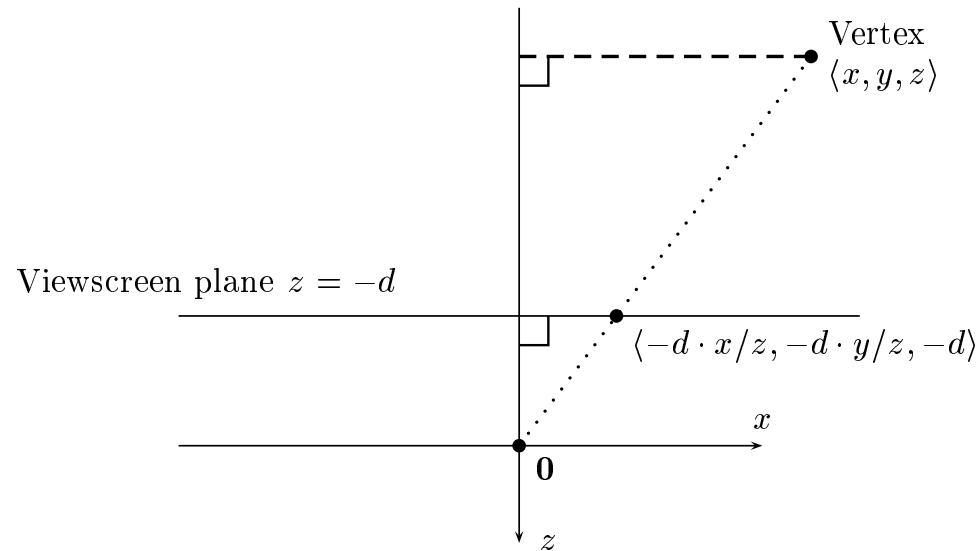


Figure II.19: Perspective projection onto a viewscreen at distance d . The viewer is at the origin, looking in the direction of the negative z axis. The point $\langle x, y, z \rangle$ is perspectively projected onto the plane $z = -d$, which is at distance d in front of the viewer at the origin.

Funkcja głębokości

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

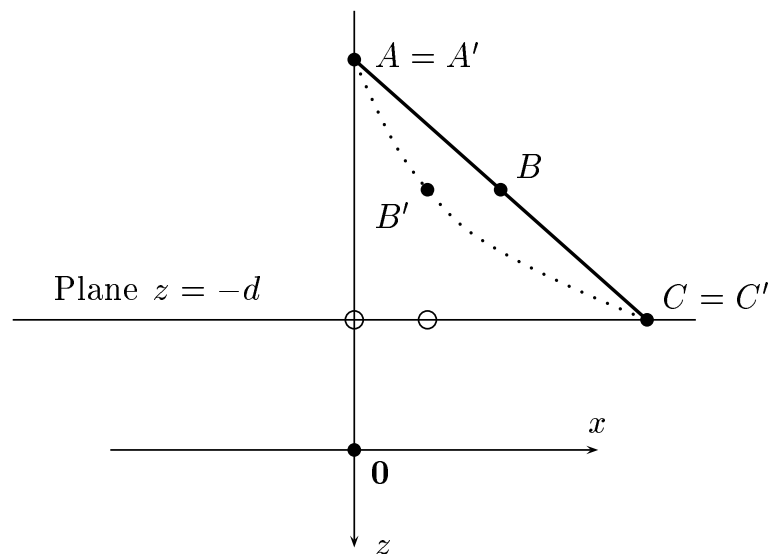


Figure II.20: The undesirable transformation of a line to a curve. The mapping used is $\langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -d \cdot x/z, -d \cdot y/z, z \rangle$. The points A and C are fixed by the transformation and B is mapped to B' . The dotted curve is the image of the line segment AC . (The small unlabeled circles show the images of A and B under the mapping of figure II.19.)

● $\text{głębokość}(z) = A + \frac{B}{z}$

Macierz rzutowania

Rzutowanie

❖ Dwa typy rzutowania

❖ Ukryte powierzchnie

❖ Rzutowanie równoległe

❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

- $(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{dx}{z}, -\frac{dy}{z}, A + \frac{B}{z}\right)$
- we współrzędnych jednorodnych
 $(x : y : z : 1) \mapsto (dx : dy : -Az - B : -z)$
- macierz:

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

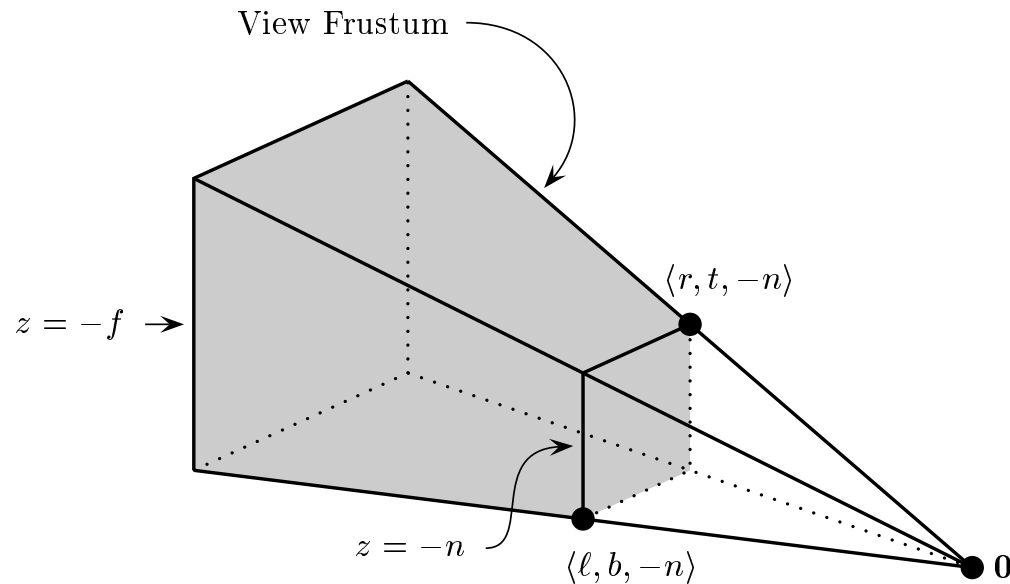
Bryła widzenia

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów



- głębokość(z) = $A + \frac{B}{z}$, gdzie $A = \frac{f+n}{f-n}$, $B = \frac{2fn}{f-n}$.
- macierz:
$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

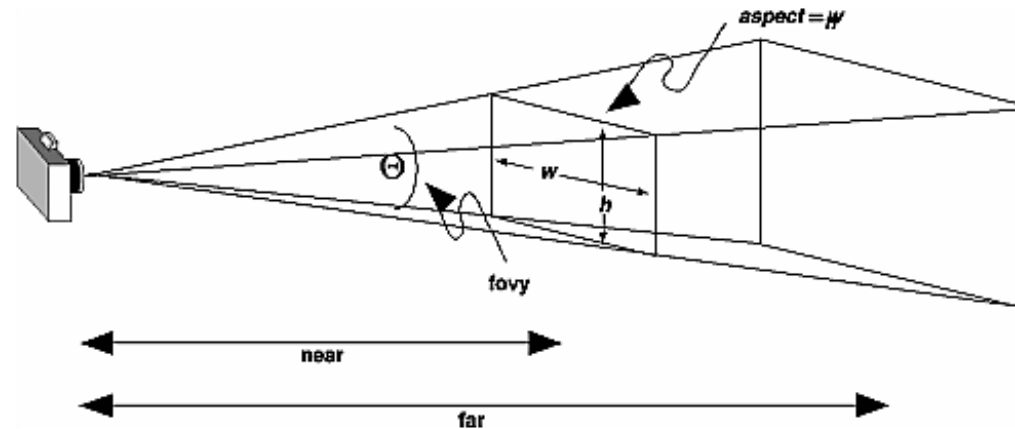
Macierz rzutowania

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ **Rzutowanie perspektywiczne**
- ❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów



- θ — kąt widzenia
- $a = \frac{w}{h}$ — *aspect ratio*, format obrazu
- macierz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze w modelowaniu

Rzutowanie

- ❖ Dwa typy rzutowania
- ❖ Ukryte powierzchnie
- ❖ Rzutowanie równoległe
- ❖ Rzutowanie perspektywiczne

❖ Macierze w modelowaniu

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

- `Macierz ModelMatrix`
- `Macierz ViewMatrix`
- `Macierz ProjectionMatrix`

Case study: modelowanie cienia

Zastosowanie rzutowania: cień

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 - y/y_0}, 0, \frac{z}{1 - y/y_0} \right)$$

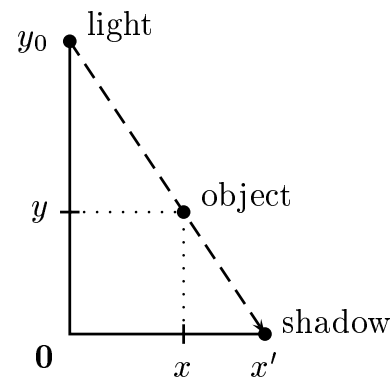


Figure II.22: A light is positioned at $\langle 0, y_0, 0 \rangle$. An object is positioned at $\langle x, y, z \rangle$. The shadow of the point is projected to the point $\langle x', 0, z' \rangle$, where $x' = x/(1 - y/y_0)$ and $z' = z/(1 - y/y_0)$.

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z-fighting

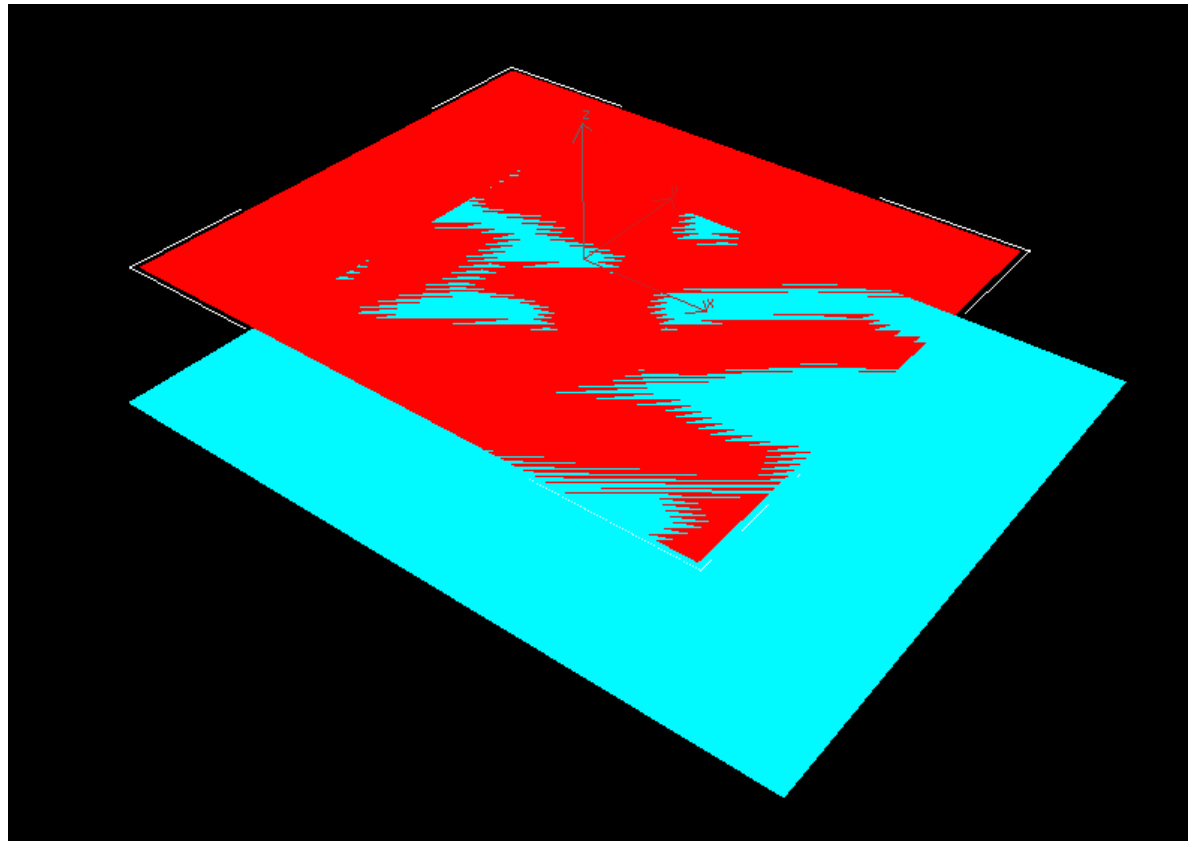
Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów



Z-fighting. Przykład w blenderze

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

❖ Cień

❖ Z-fighting

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

Przykład w blenderze

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

- ❖ Transformacja
perspektywiczna
- ❖ Cztery punkty

Case study: przekształcenie rzutowe obrazów

Transformacja perspektywiczna

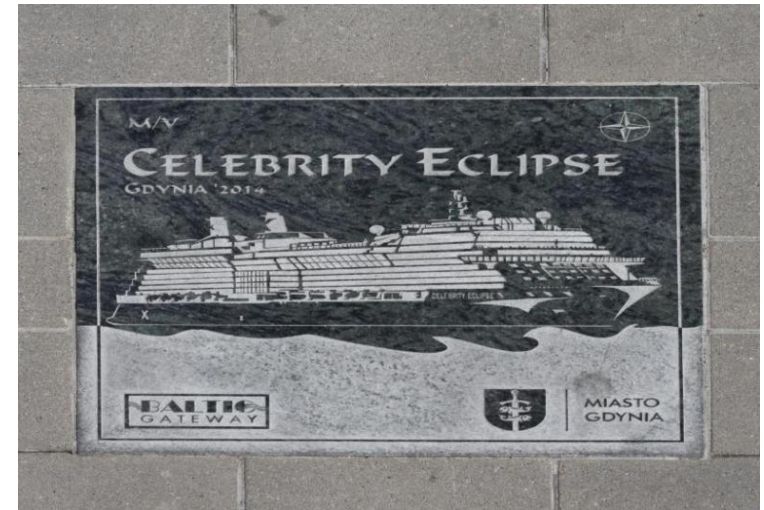
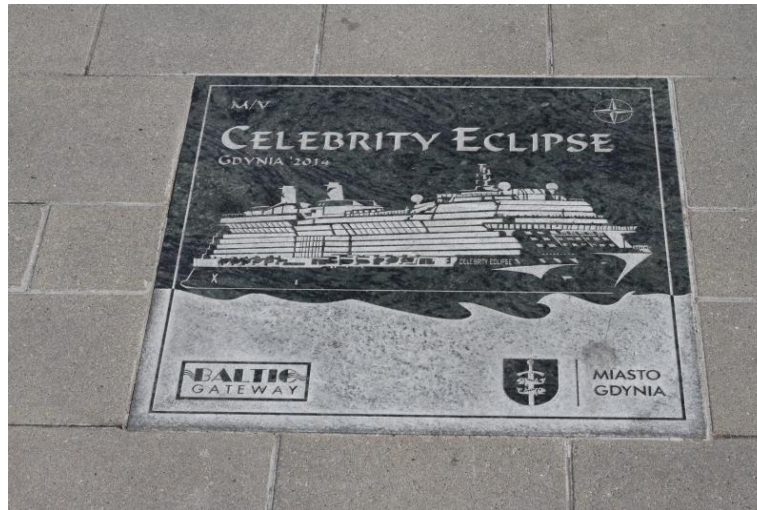
Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty



- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- ◆ zazwyczaj wymaga się $\det A \neq 0$.

- czemu?

Transformacja po czterech punktach

Rzutowanie

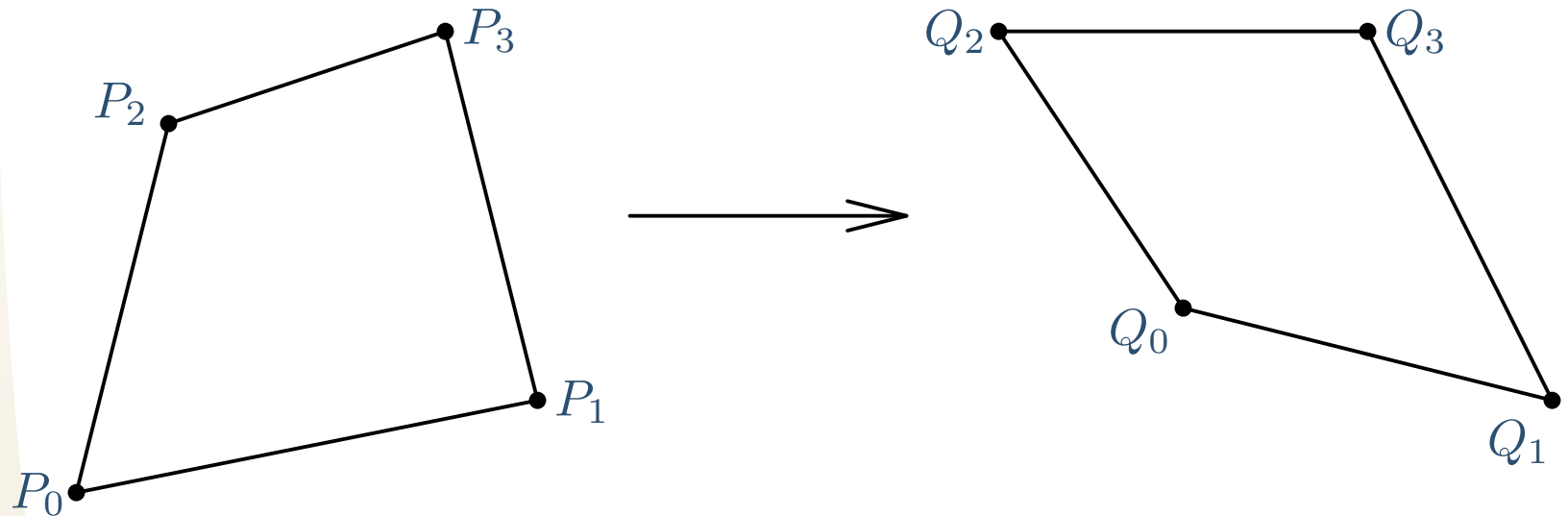
Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Dane są dwie czwórki punktów na płaszczyźnie:
 $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ oraz $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
 - ◆ $P_j = (x_j, y_j)$, $Q_j = (s_j, t_j)$, $j = 0, \dots, 3$.
- Znaleźć taką transformację perspektywiczną
 $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, że $A(P_j) = Q_j$, $j = 0, \dots, 3$.



Metoda algebraiczna

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych
 - ◆ 8 równań
 - ◆ 9 zmiennych

Metoda geometryczna

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

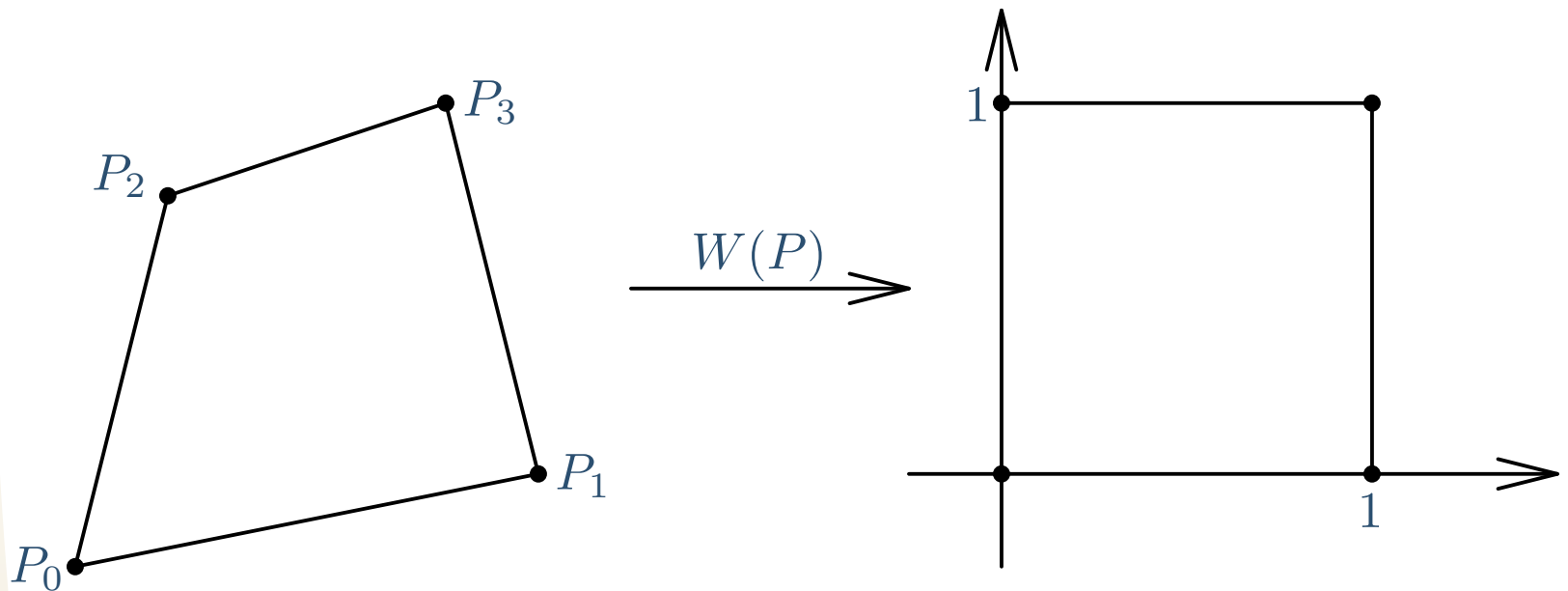
Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywna

❖ Cztery punkty

- Przekształcenie pomocnicze $W(P) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\blacklozenge A = (W(Q))^{-1}W(P)$$



Przekształcenie W

Rzutowanie

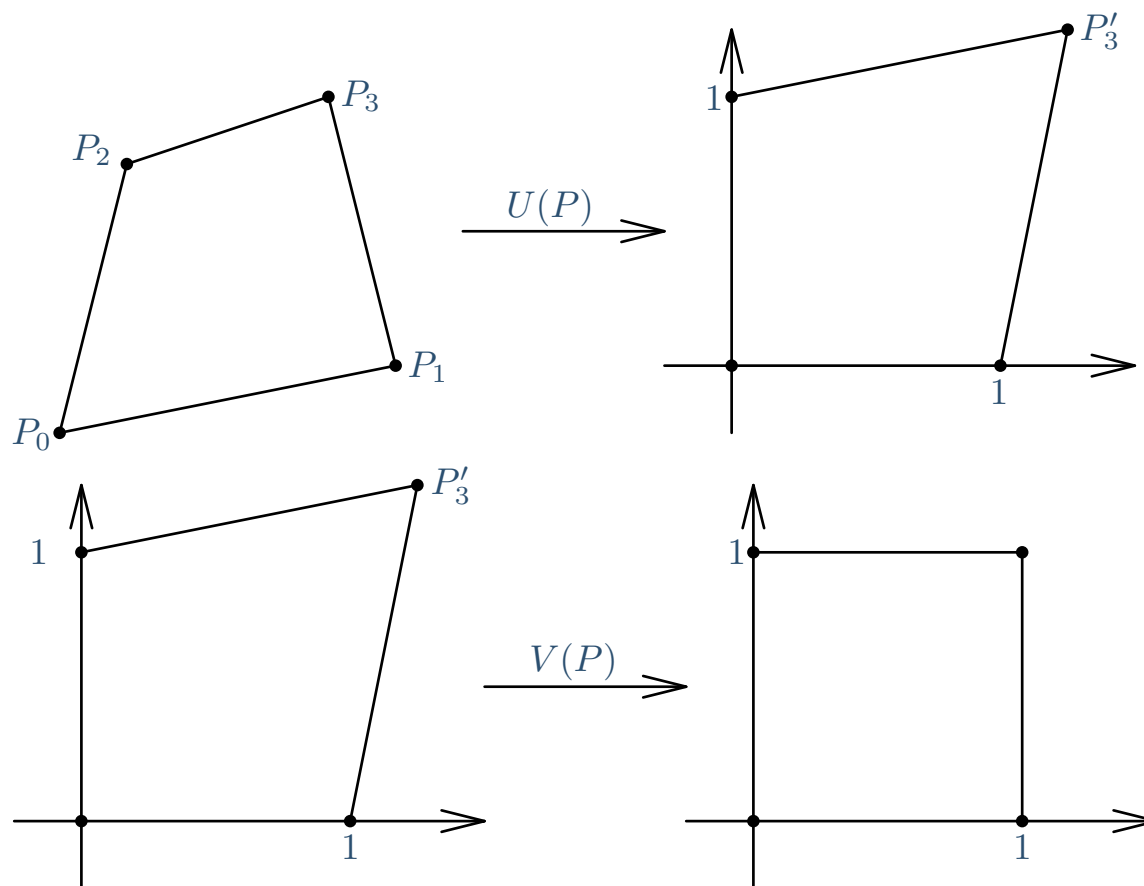
Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywna

❖ Cztery punkty

- Rozkładamy W w iloczyn $W(P) = V(P)U(P)$, gdzie
 - ❖ $U(P)$ będzie przekształceniem afinicznym,
 - ❖ $V(P)$ — rzutowym.



Przekształcenie U

Rzutowanie

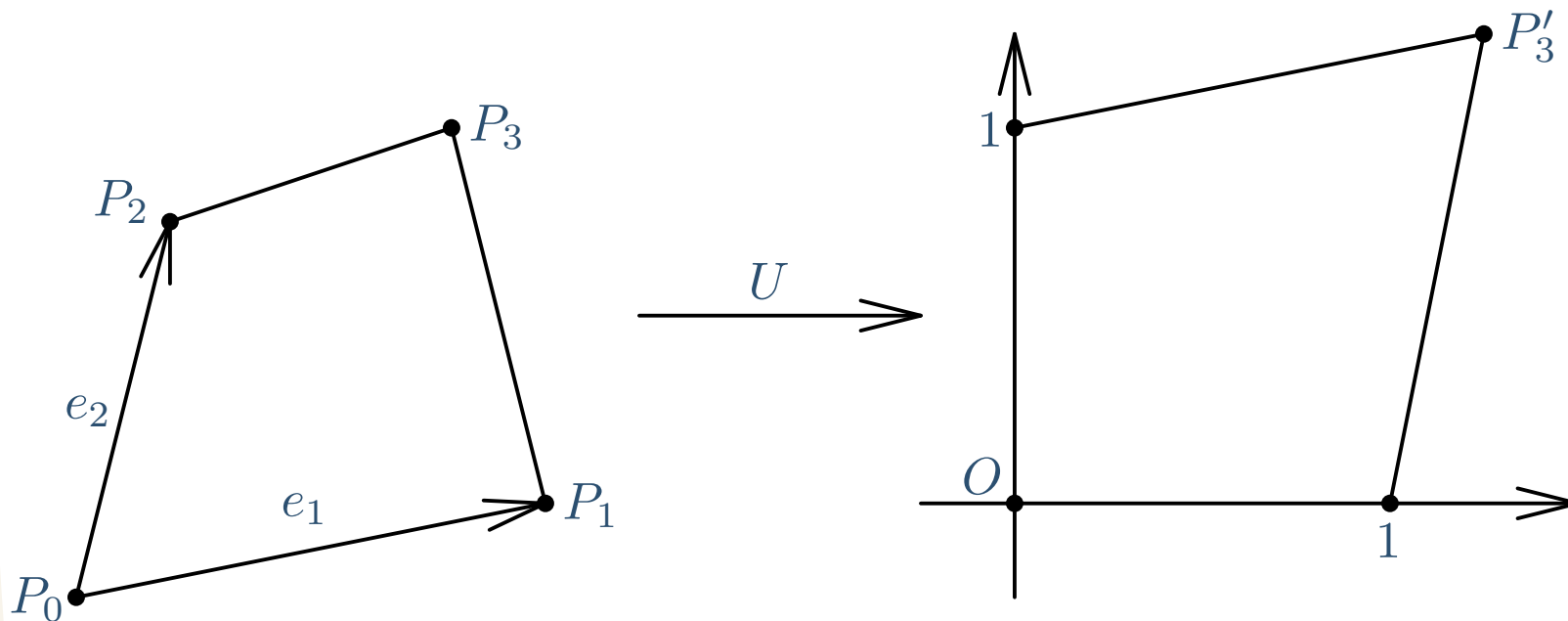
Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Przekształcenie U to zamiana standardowego układu współrzędnych (O, i, j) na (P_0, e_1, e_2) .



Przekształcenie U

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $(e_1 \ e_2) = (i \ j) M = (i \ j) \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{pmatrix}$, gdzie
 - ◆ $dx_k = x_k - x_0, dy_k = y_k - y_0, k = 1, 2, 3.$
- $(i \ j) = (e_1 \ e_2) M^{-1} = (e_1 \ e_2) \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 \end{pmatrix}$,
gdzie
 - ◆ $\Delta = \det M = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2.$
- W szczególności,
 $OP_0 = (e_1 \ e_2) M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$, gdzie
 - ◆ $x'_0 = (x_0 dy_2 - y_0 dx_2) / \Delta,$
 - ◆ $y'_0 = (-x_0 dy_1 + y_0 dx_1) / \Delta.$
- Więc $U : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$

Macierz przekształcenia U

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $$U = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{\Delta} & -\frac{dx_2}{\Delta} & \frac{-x_0 dy_2 + y_0 dx_2}{\Delta} \\ -\frac{dy_1}{\Delta} & \frac{dx_1}{\Delta} & \frac{x_0 dy_1 - y_0 dx_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ◆ W szczególności,

$$P_3 \mapsto \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2 \\ -dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1 \end{pmatrix}$$

- Przekształcenie odwrotne $U^{-1} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & +x_0 \\ dy_1 & dy_2 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Stosowanie współrzędnych jednorodnych pozwala zamienić U na prostszą macierz:

$$\begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie V

Rzutowanie

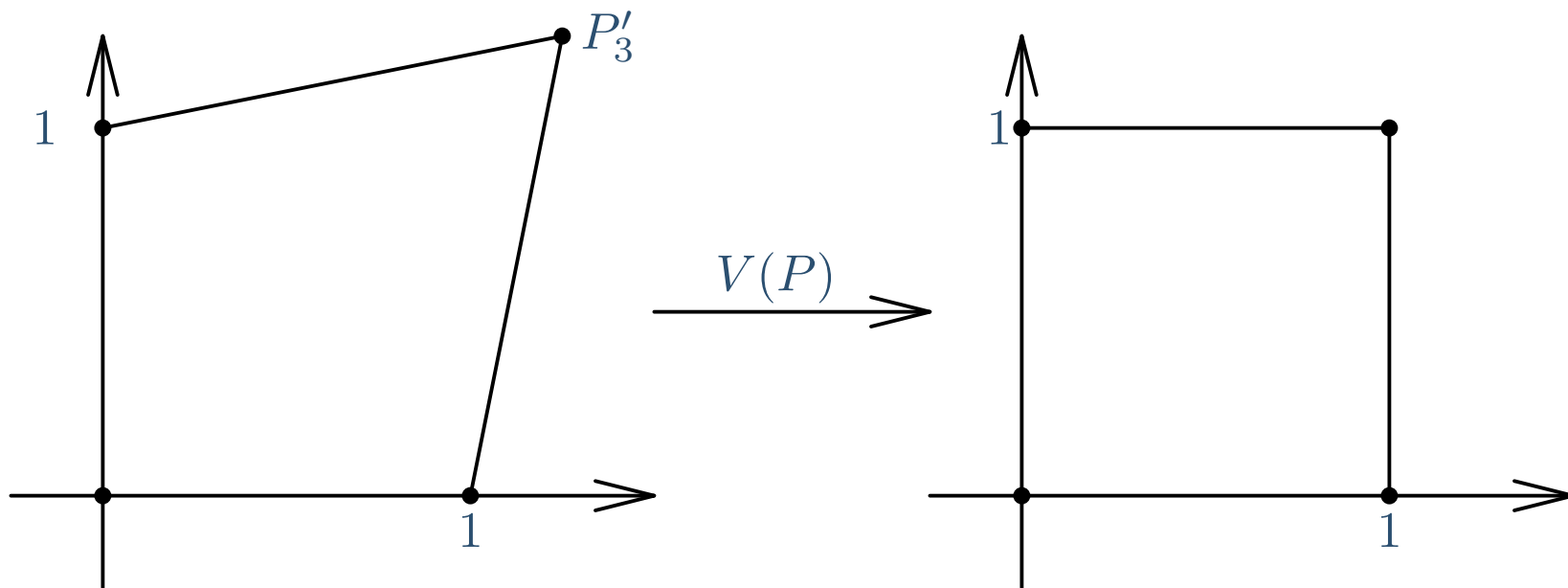
Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $P'_3 = (x'_3, y'_3)$, określone na slajdzie 28



Równania na macierz V

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $(0, 0) \mapsto (0, 0)$:
 - ◆ $a_{13} = a_{23} = 0, a_{33} = 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$:
 - ◆ $a_{11} = \lambda_1, a_{21} = 0, a_{31} + 1 = \lambda_1.$
 - $a_{31} = a_{11} - 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$:
 - ◆ $a_{12} = 0, a_{22} = \lambda_2, a_{32} + 1 = \lambda_2.$
 - $a_{32} = a_{22} - 1.$
- $P'_3 \mapsto (1, 1)$
 - ◆ $a_{11}x'_3 = \lambda, \quad a_{22}y'_3 = \lambda, \quad -x'_3 - y'_3 + 1 = -\lambda.$

Macierz V

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

● Rozwiązanie równań:
$$\begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$$

● Inna postać macierzy V :

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{array} & 0 & 0 \\ \begin{array}{c|c} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{array} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c|c} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c|c} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{array} & \begin{array}{c|c} x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{array} & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz V^{-1}

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- $V^t = TS$, gdzie S jest skalowaniem, a T — przesunięciem równoległym
- $(V^t)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
- $V^{-1} = ((V^t)^{-1})^t = (S^{-1}T^{-1})^t$
- $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 \\ \frac{1-y'_3}{x'_3+y'_3-1} & \frac{1-x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x'_3 & 0 & 0 \\ 0 & y'_3 & 0 \\ 1-y'_3 & 1-x'_3 & x'_3+y'_3-1 \end{pmatrix}$

Algorytm obliczenia przekształcenia

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

● $P_j = (x_j, y_j), Q_j = (s_j, t_j), j = 0, \dots, 3$

1. $dx_j = x_j - x_0, dy_j = y_j - y_0, j = 1, 2, 3$

2. $\Delta_p = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$

3. $x'_3 = \frac{dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2}{\Delta_p}, y'_3 = \frac{-dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1}{\Delta_p}$

4. $U(P) = \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}$

5. $V(P) = \begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$

Algorytm obliczenia przekształcenia, cd

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

$$6. \quad ds_j = s_j - s_0, \quad dt_j = t_j - t_0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$7. \quad \Delta_q = ds_1 dt_2 - dt_1 ds_2$$

$$8. \quad s'_3 = \frac{ds_3 dt_2 - dt_3 ds_2}{\Delta_q}, \quad t'_3 = \frac{-ds_3 dt_1 + dt_3 ds_1}{\Delta_q}$$

$$9. \quad V^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} s'_3 & 0 & 0 \\ 0 & t'_3 & 0 \\ 1 - t'_3 & 1 - s'_3 & t'_3 + s'_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad U^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & +s_0 \\ dt_1 & dt_2 & +t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)V(P)U(P)$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Uwagi

Rzutowanie

Case study:
modelowanie cienia

Case study:
przekształcenie
rzutowe obrazów

❖ Transformacja
perspektywiczna

❖ Cztery punkty

- Jeżeli punkty P tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
 - ◆ $U(P) = V(P) = I$
 - ◆ $A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)$
- Jeżeli punkty Q tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
 - ◆ $U^{-1}(Q) = V^{-1}(Q) = I$
 - ◆ $A = V(P)U(P)$