

Matematyczne Podstawy Grafiki Komputerowej. Elementy geometrii 3W

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
denisjuk@matman.uwm.edu.pl

Elementy geometrii 3W

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Definicja wektora

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

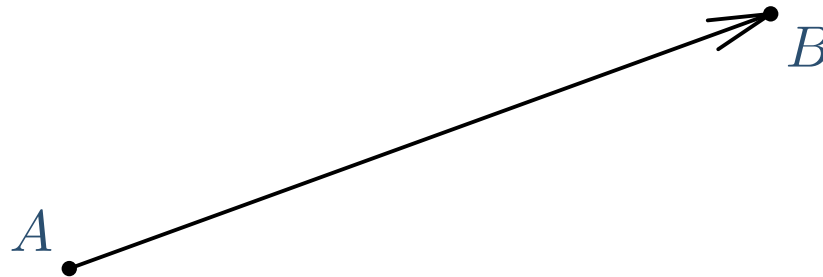
❖ Wektory

- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- *Wektorem* nazywa się skierowany odcinek.



- Kierunek wektora pokazuje strzałka.
- Punkt A jest *początkiem* wektora
- Punkt B jest *końcem* wektora
- Oznaczenie: $a = \overrightarrow{AB}$

Równość wektorów

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

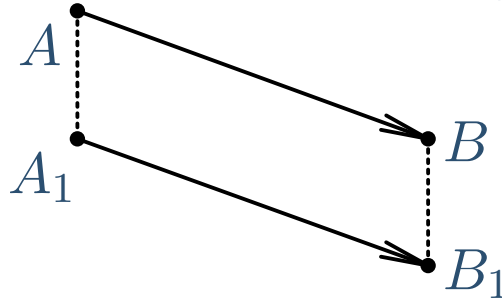
❖ Wektory

- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = a$ jeżeli ABB_1A_1 jest równoległobokiem:



- Relacja równości wektorów jest *relacją równoważności*:
 - ◆ $a = a$ (symetryczna)
 - ◆ $a = b \Rightarrow b = a$ (zwrotna)
 - ◆ $a = b, b = c \Rightarrow a = c$ (przechodnia)
- Nie odróżniamy równych wektorów
 - ◆ każdy wektor może się zacząć w dowolnym punkcie

Wektory, cd

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Dwa wektory są *zgodnie kolinearne (współliniowe)*, jeżeli są równoległe i mają ten sam zwrot.
- Dwa wektory są *niezgodnie kolinearne (współliniowe)*, jeżeli są równoległe i mają przeciwne zwroty.
- Długość odcinka AB , przedstawiającego wektor a , nazywa się jego *długością* $|AB| = |a| = \|a\|$
- wektor nazywa się *zerowym*, jeśli jego początek i koniec się pokrywają: $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$

Dodawanie wektorów

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

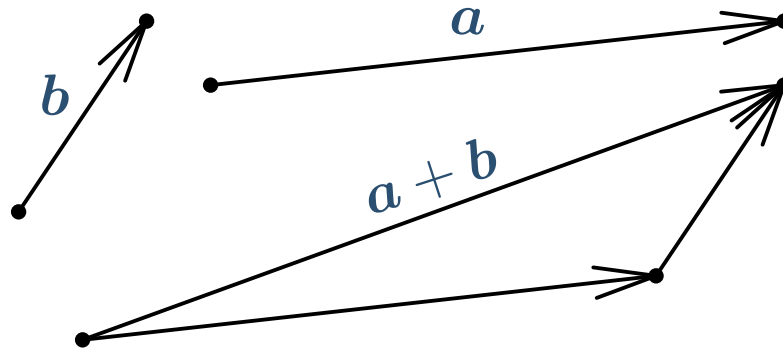
❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Sumą wektorów a i b nazywa się wektor $a + b$, otrzymany z tych wektorów bądź równych im wektorów jak na poniższym rysunku



Dodawanie wektorów przemienne i łączne

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

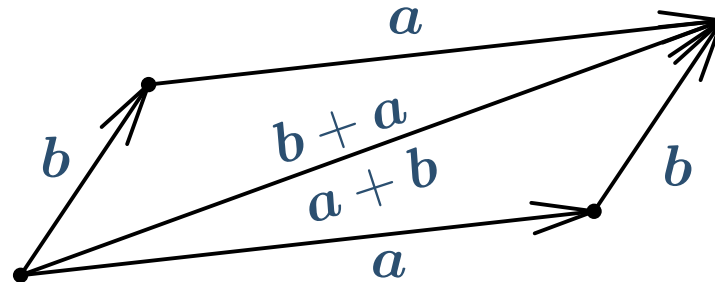
❖ Wektory

- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

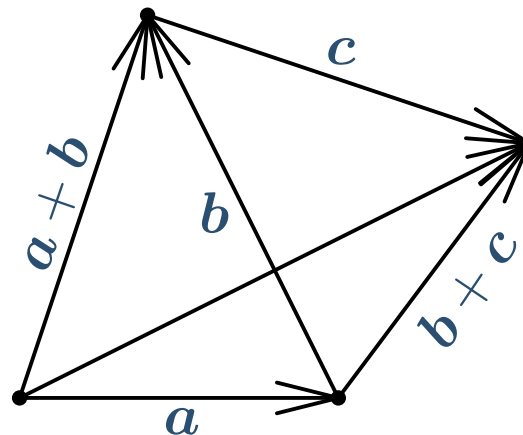
Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^3 *

● $a + b = b + a$



● $(a + b) + c = a + (b + c)$



Odejmowanie wektorów

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

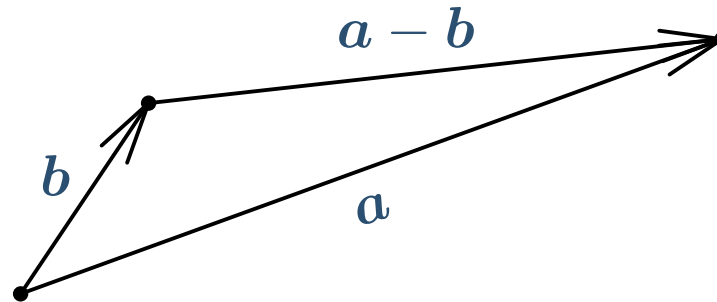
❖ Wektory

- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Wektor $a - b$ — jest wektorem, suma którego z b



Mnożenie wektora przez liczbę (skalowanie)

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Iloczynem wektora a i liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wektor λa
 - ◆ $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$
 - ◆ λa i a są zgodnie kolinearne, jeżeli $\lambda > 0$ oraz niezgodnie kolinearne, gdy $\lambda < 0$
 - ◆ $0 \cdot a = \mathbf{0}$
- $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$



Kombinacje liniowe wektorów

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

❖ Przekształcenia
liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dany będzie układ wektorów $\{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

- Wektor

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$$

nazywa się *kombinacją liniową* wektorów $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Iloczyn skalarny wektorów

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

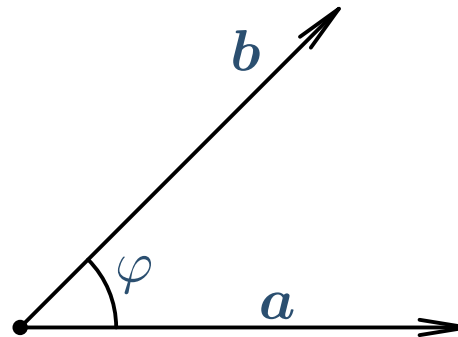
❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Iloczynem skalarnym wektorów a i b jest liczba:
 - ◆ $a \cdot b = a \circ b = ab = |a||b| \cos \varphi$
 - φ jest kątem między a i b
- $ab = ba$



Iloczyn skalarny wektorów

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

❖ Przekształcenia
liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztutowa \mathbb{RP}^{3*}

- $a^2 = aa = |a|^2$
- $(\lambda a)b = \lambda(ab)$
- $(a + b)c = ac + bc$
- $ab = 0 \iff a \perp b$ albo jeden z wektorów jest zerowy
- $\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$
 - ◆ jeżeli $|a| = |b| = 1$, to $\cos \varphi = a \cdot b$
 - normalizacja: $a \mapsto \frac{a}{|a|}$
- OpenGL (GLSL):
 - ◆ `dot(a, b)`
 - ◆ `normalize(a)`

Rzut prostopadły wektora na prostą

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

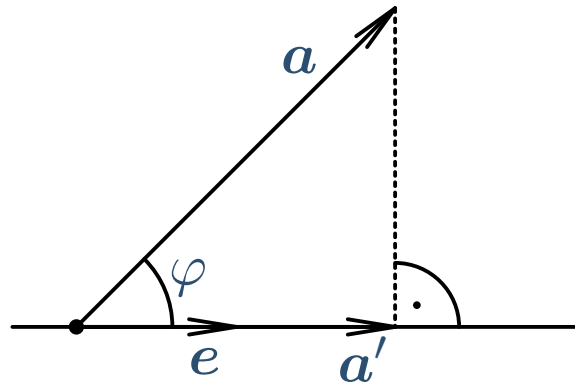
❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Rzut (projekcja) wektora a na prostą jest wektor a' , którego początkiem jest rzut początku wektora a na prostą, a końcem — rzut końca wektora a na tę prostą.
- $|e| = 1$, wówczas $a' = (a \cdot e)e$



Iloczyn wektorowy

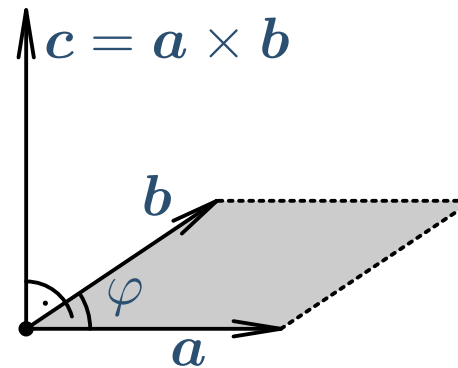
Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
 - ◆ $\mathbf{c} \perp (\mathbf{a}, \mathbf{b})$
 - ◆ $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$
 - ◆ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$
- Pole równoległoboku



- $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- OpenGL (GLSL): `cross (a, b)`

Przykład

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech $|c| = 1$
- Mnożenie wektorowe przez c działa na płaszczyźnie prostopadłej do c jak obrót o $\frac{\pi}{2}$

Współrzędne wektora względem bazy

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą trzy niezerowe, niekomplanarne wektory e_1, e_2, e_3 . Wtedy każdy wektor a może zostać jednoznacznie przedstawiony jako suma

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (e_1 \ e_2 \ e_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Wektory e_1, e_2, e_3 nazywane są *bazą* przestrzeni wektorów.
- Liczby x, y, z nazywane są *współzrędnymi* wektora a w bazie e_1, e_2, e_3 .

- $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$

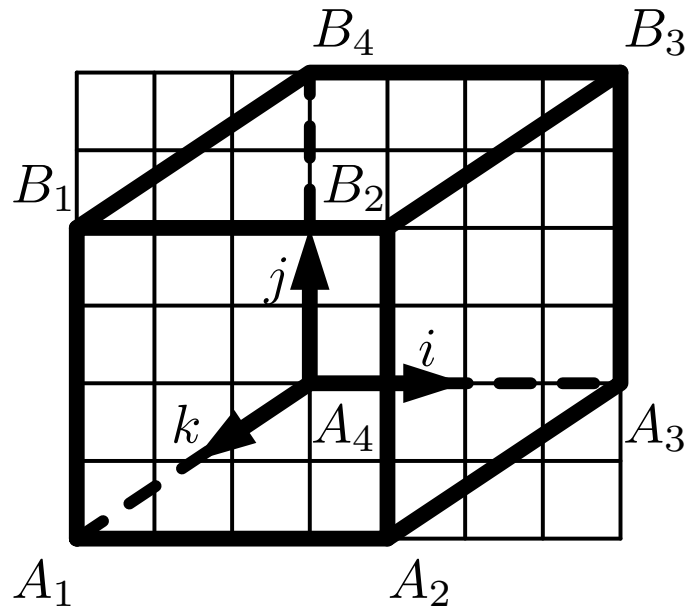
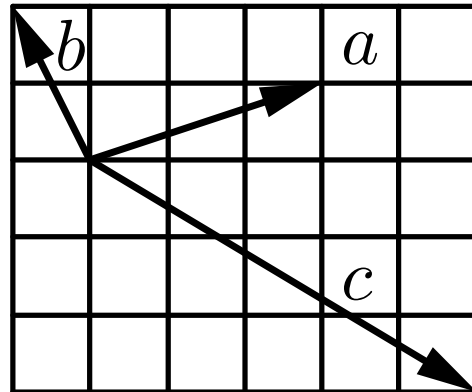
Przykłady

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^3 *



Działania liniowe na wektorach

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

- ❖ Przekształcenia
liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dana będzie baza e_1, e_2, e_3

$$\blacklozenge \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \quad \lambda \mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_a \\ \lambda y_a \\ \lambda z_a \end{pmatrix}$$

Baza kartezjańska

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Baza kartezjańska: i, j, k

- ◆ $|i| = |j| = |k| = 1$

- ◆ $i \perp j \perp k \perp i$

- ◆ $(i, j, k) > 0$

- $a = x_a i + y_a j + z_a k = (a_i)i + (a_j)j + (a_k)k$

Działania metryczne w bazie kartezyjskiej

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

❖ Przekształcenia
liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- $i^2 = j^2 = k^2 = 1$

- $ij = kj = ik = 0$

- ◆ $ab = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

- $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

- $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$

- $j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$

- ◆ $a \times b = \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{array} \right| \end{array} \right)$

- ◆ $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

Zmiana bazy

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ oraz $\mathcal{F} = \{ f_1, f_2, f_3 \}$. Wtedy
 - ◆ Wektory (e_1, e_2, e_3) mają jednoznaczne rozłożenie po bazie (f_1, f_2, f_3) :
$$\begin{cases} e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3, \\ e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3, \\ e_3 = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3. \end{cases}$$
 - ◆ $(e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) A$, gdzie A jest macierzą kolumn współrzędnych wektorów \mathcal{E} w bazie \mathcal{F}
 - ◆ wektor a w bazie \mathcal{F} będzie miał współrzędne $A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, gdzie $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ — jego współrzędne w \mathcal{E} .
 - ◆ A nazywa się macierzą przejścia od \mathcal{E} do \mathcal{F} (zmiany bazy)

Zmiana bazy. Uwagi

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- $(e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) A \iff (f_1 \ f_2 \ f_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3) A^{-1}$, gdzie A^{-1} jest macierzą odwrotną.
- Jeżeli obie bazy są kartezyjańskie, to macierz przejścia jest *ortogonalna*
 - ◆ wektory-kolumny są jednostkowe i wzajemnie prostopadłe
 - to samo dotyczy wierszy
 - ◆ dla macierzy ortogonalnych $A^{-1} = A^t$

Przekształcenia liniowe

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą: układ wektorów $\mathcal{E} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ oraz baza $\mathcal{F} = \{ f_1, f_2, f_3 \}$, $(e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) A$.

- ◆ *przekształceniem liniowym* nazywa się

$$\text{odwzorowanie } a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \mapsto x_a e_1 + y_a e_2 + z_a e_3$$

- ◆ współrzędne wektora a po przekształceniu będą

$$\text{równe } A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

- ◆ A nazywa się *macierzą* przekształcenia
- ◆ wynik przekształcenia zapisuje się Aa

Przekształcenia liniowe. Uwagi

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

❖ Wektory

❖ Iloczyn skalarny

❖ Iloczyn wektorowy

❖ Baza

❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych układu \mathcal{E} w bazie \mathcal{F}
- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych wektorów bazy \mathcal{F} po przekształceniu
- jeżeli macierz A jest odwracalną, to \mathcal{E} też jest bazą oraz przekształcenie liniowe zgada się z zamianą bazy $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$
- przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy
 1. dla dowolnych dwóch wektorów \mathbf{a}, \mathbf{b} spełniono $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$
 2. dla dowolnego wektora \mathbf{a} oraz dowolnej liczby rzeczywistej λ spełniono $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\phi(\mathbf{a})$

Przekształcenia liniowe. Zmiana bazy*

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ oraz $\mathcal{F} = \{ f_1, f_2, f_3 \}$, $(e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) T$
- Niech przekształcenie liniowe będzie dane w bazie \mathcal{E} macierzą A
- Wtedy w bazie \mathcal{F} to przekształcenie dane będzie macierzą TAT^{-1}

Obrót

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

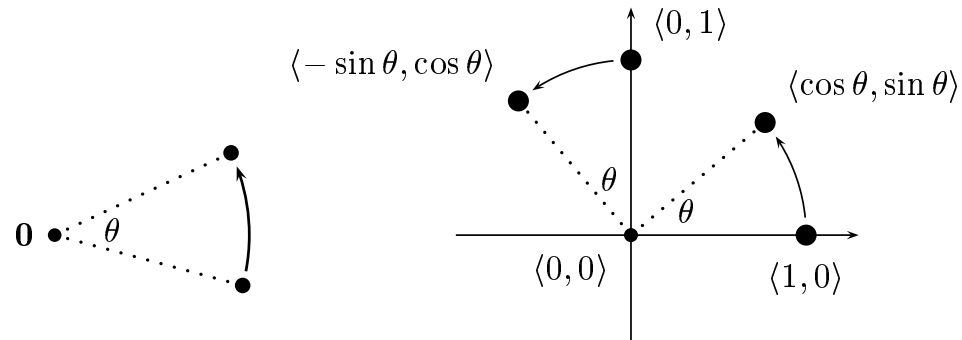


Figure II.5: Effect of a rotation through angle θ . The origin $\mathbf{0}$ is held fixed by the rotation.

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Skalowanie

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza

❖ Przekształcenia
liniowe

- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

$$S_{\lambda_1, \lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Mnożenie przekształceń

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą dwa przekształcenia liniowe: A oraz B
- Iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *liniowe* $AB(\mathbf{a}) = A(B\mathbf{a})$
 - ◆ Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
 - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

Twierdzenie 1. *Każde przekształcenie liniowe można rozłożyć w iloczyn obrotu oraz skalowania (o różnych współczynnikach)*

Twierdzenie 2. *Każde przekształcenie liniowe sztywne, które nie zmienia orientacji, jest obrotem*

Obrót 3D

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

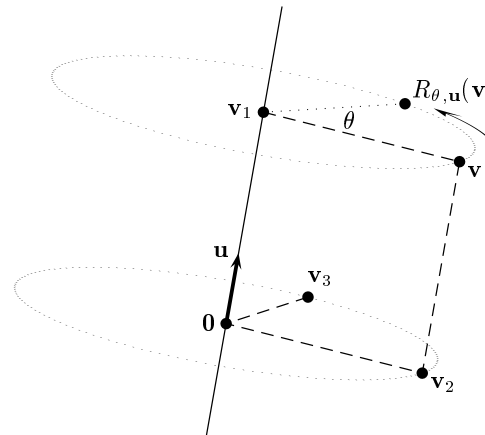


Figure II.14: The vector \mathbf{v} being rotated around \mathbf{u} . The vector \mathbf{v}_1 is \mathbf{v} 's projection onto \mathbf{u} . The vector \mathbf{v}_2 is the component of \mathbf{v} orthogonal to \mathbf{u} . The vector \mathbf{v}_3 is \mathbf{v}_2 rotated 90° around \mathbf{u} . The dashed line segments in the figure all meet at right angles.

Macierz obrotu 3D

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$.

Przykład

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe
- ❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Obrót odwzorowujący osie $x \mapsto y \mapsto z \mapsto u$

Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie

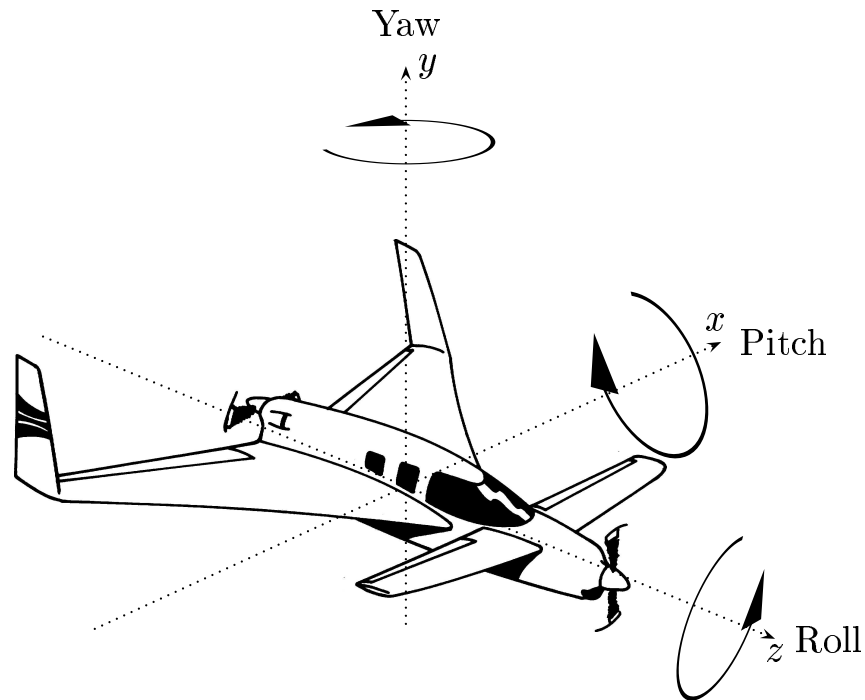
Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}



● $R = R_{\theta_y, j} R_{\theta_p, i} R_{\theta_r, k}$

Macierze obrotów Eulera

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- $R_{\theta_p, i}$
- $R_{\theta_y, j}$
- $R_{\theta_r, k}$

Skalowanie 3D

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

- ❖ Wektory
- ❖ Iloczyn skalarny
- ❖ Iloczyn wektorowy
- ❖ Baza
- ❖ Przekształcenia liniowe

❖ Kąty Eulera

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

$$S_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

**Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3**

- ❖ Działania na punktach
- ❖ Układ współrzędnych
- ❖ Przekształcenia afiniczne
- ❖ Współrzędne jednorodne
- ❖ Obrót
- ❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

Odejmowanie punktów

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

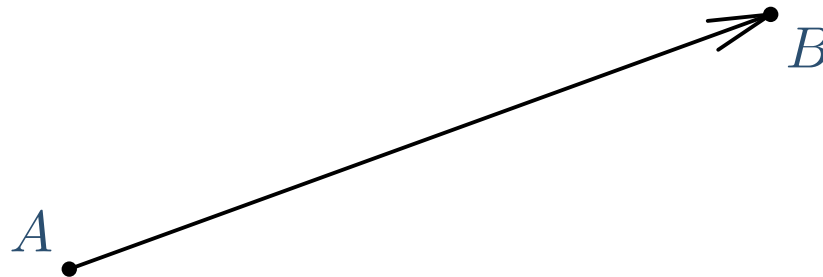
❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Różnicą punktów B i A jest wektor \overrightarrow{AB} .



- $B - A = \overrightarrow{AB}$
- $A = B \iff B - A = \mathbf{0}$
- $(B - A) + (C - B) = (C - A) = \overrightarrow{AC}$

Dodanie do punktu wektora

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

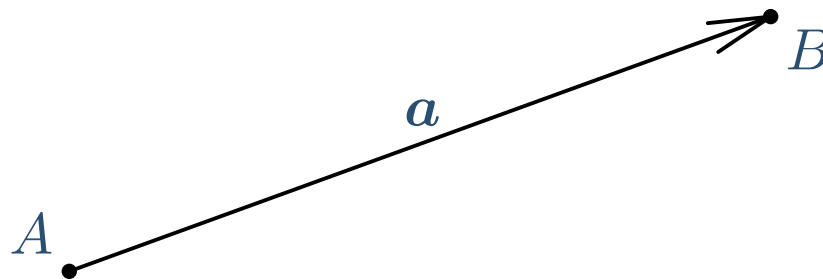
❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Sumą punktu A oraz wektora a jest punkt B , który zgadza się z końcem wektora a , jeżeli początek tego wektora umieścić w A .



- $B = A + \overrightarrow{AB}$
- $(A + a_1) + a_2 = A + (a_1 + a_2)$
- Dodanie wektora nazywa się *przesunięciem równoległym*

Kombinacja afiniczna punktów

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dany będzie układ punktów $\{A_1, \dots, A_k\}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, takie że $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$
- Ustalmy dowolny punkt O
- *Kombinacją afiniczną* punktów $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k$ jest punkt $O + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$

Twierdzenie 3. *Kombinacja afiniczna punktów nie zależy od wyboru punktu O*

Układ współrzędnych

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Wybierzmy dowolny punkt O , *początek układu*
- Przez ten punkt poprowadźmy trzy niekomplanarne proste: Ox , Oy , Oz , *osie współrzędnych*
- Płaszczyzny współrzędnych Oxy , Oxz , Oyz
- Na osiach wyznaczmy niezerowe wektory: odpowiednio e_1 , e_2 , e_3 — *bazę*.
- Dla każdego punktu A wektor \overrightarrow{OA} ma jednoznaczne przedstawienie $\overrightarrow{OX} = xe_1 + ye_2 + ze_3$
 - ◆ liczby x , y , z — *współrzędne punktu A*
- układ jest *prawym (dodatnim)*, jeżeli $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest zorientowany dodatnio
- układ jest *lewym (ujemnym)*, jeżeli $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest zorientowany ujemnie
- kierunki na osiach, zorientowane zgodnie z wektorami bazy, nazywają się *dodatnimi*. Kierunki przeciwne — *ujemnymi*

Układ współrzędnych kartezjańskich

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Układ współrzędnych nazywa się *kartezjańskim*, jeżeli
 - ◆ osie są wzajemnie prostopadłe
 - ◆ wektory e_1, e_2, e_3 są jednostkowe (mają jednostkową długość).
- Dalej w prezentacji prawie zawsze układ będzie prawym kartezjańskim układem
- Dla wektorów bazy układu kartezjańskiego czasami stosuje się oznaczenia i, j, k

Działania na punktach w układzie współrzędnych

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Odejmowanie punktów:

$$\blacklozenge A_2 - A_1 = \overrightarrow{A_1 A_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

- Dodanie wektora:

$$\blacklozenge A_1 + \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 + x_a \\ y_1 + y_a \\ z_1 + z_a \end{pmatrix}$$

- Kombinacja afiniczna:

$$\blacklozenge \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \\ \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k \\ \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k \end{pmatrix}$$

- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Podział odcinka w danym stosunku

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
- Znaleźć punkt $A(x, y, z)$, który dzieli odcinek A_1A_2 w stosunku $\lambda_1 : \lambda_2$
 - ❖ $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A} - \lambda_1 \overrightarrow{AA_2} = 0$
 - ❖ $\overrightarrow{OA} = \frac{\lambda_2 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$
 - ❖ $x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Odległość między punktami

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
 - ◆ $|A_1A_2|^2 = \overrightarrow{A_1A_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$
- wzory są prawidłowe tylko w układzie kartezjańskim

Zmiana układu współrzędnych

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą dwa ogólne układy współrzędnych: (O, e_1, e_2, e_3) oraz (O', f_1, f_2, f_3)
- Punkt P ma współrzędne (x, y, z) względem jednego układu oraz (z', y', z') względem drugiego.
- Wektory (e_1, e_2, e_3) mają jednoznaczne rozłożenie po

$$\text{bazie } (f_1, f_2, f_3): \begin{cases} e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3, \\ e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3, \\ e_3 = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3. \end{cases}$$

$$\blacklozenge (e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) A$$

- Punkt O w nowym układzie ma współrzędne (x_0, y_0, z_0) .

- Wówczas
$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0. \end{cases}$$

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenia afiniczne

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dany będzie układ współrzędnych O, f_1, f_2, f_3 oraz punkt O' i układ wektorów e_1, e_2, e_3

◆ *przekształceniem afinicznym* nazywa się

odwzorowanie $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto O' + xe_1 + ye_2 + ze_3$

◆ współrzędne punktu A po przekształceniu będą

równe $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, gdzie

■ $(e_1 \ e_2 \ e_3) = (f_1 \ f_2 \ f_3) A$

■ (x_0, y_0, z_0) — współrzędne wektora $\overrightarrow{OO'}$

Uwagi

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Jeżeli układ wektorów e_1, e_2, e_3 jest bazą, to przekształcenie afiniczne zgadza się z zamianą układu współrzędnych
- Przekształcenie afiniczne B składa się z przekształcenia liniowego A i przesunięcia równoległego T_u , $B = T_u \circ A$
 - ◆ Wówczas przesunięcie T_u oraz przekształcenie liniowe A określone są jednoznacznie.

Twierdzenie 4. *Każde przekształcenie afiniczne można rozłożyć w iloczyn obrotu, skalowania (o różnych współczynnikach) oraz przesunięcia równoległego*

Twierdzenie 5. *Każde przekształcenie afiniczne sztywne, które nie zmienia orientacji, jest obrotem (afinicznym) lub przesunięciem równoległym*

Przykład

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ **Przekształcenia
afiniczne**

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Obrót o 90° dookoła punktu $(2, 3)$ na płaszczyźnie

Współrzędne jednorodne w \mathbb{R}^2

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Trójka liczb $x, y, w \in \mathbb{R}$ ($w \neq 0$) reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w) \in \mathbb{R}^2$.
- $(2, 1) \sim (2 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1)$

Współrzędne jednorodne w \mathbb{R}^3

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Czwórka liczb $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ ($w \neq 0$) reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w, z/w) \in \mathbb{R}^3$.
- $(2, 1, 1) \sim (2 : 1 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1 : -1)$

Macierz przekształcenia afinicznego w \mathbb{R}^2

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rztutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech $B = T_u \circ A$ będzie przekształceniem afinicznym,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

- Macierzą przekształcenia B nazywa się macierz

$$M_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obrót

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalowanie

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

$$S_{\lambda_1, \lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przesunięcie równoległe

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

$$T_{u_1, u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz przekształcenia afinicznego w \mathbb{R}^3

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \bullet \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + u_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + u_3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Przesunięcie równoległe

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

Obrót

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni. Kierunek obrotu określany jest orientacją.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 & 0 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 & 0 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$.

Skalowanie

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

•
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$y - z$.

— symetria względem płaszczyzny

Jednorodność macierzy przekształcenia afinicznego

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Macierze A oraz λA określają to samo przekształcenie afiniczne.

Macierz superpozycji przekształceń

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na
punktach

❖ Układ
współrzędnych

❖ Przekształcenia
afiniczne

❖ Współrzędne
jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

- Niech dane będą dwa przekształcenia afiniczne: A oraz B
- iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *afiniczne* $AB(a) = A(Ba)$
 - ◆ Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
 - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

Teoria transponowana

Przestrzeń wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń afiniczna \mathbb{R}^3

❖ Działania na punktach

❖ Układ współrzędnych

❖ Przekształcenia afiniczne

❖ Współrzędne jednorodne

❖ Obrót

❖ Skalowanie

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

- Wektory i punkty są zapisywane jako wiersze $v = (v_x, v_y, v_z)$, $P = (x : y : z : w)$
- Mnożenie przez macierz przekształcenia po prawej stronie $(v_x \ v_y \ v_z) M$, $(x \ y \ z \ w) A$
- Macierze są zamieniane na transponowane:
 - ◆ przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{pmatrix},$$

etc

- Mnożenie macierzy w innej kolejności
 - ◆ Macierzą $A_1 \circ A_2$ będzie $A_2 A_1$

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

❖ Przestrzeń
rzutowa

Przestrzeń rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

Przestrzeń rzutowa

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rzutowa \mathbb{RP}^{3*}

❖ Przestrzeń
rzutowa

- Składa się z czwórek współrzędnych $(x : y : z : w)$ — współrzędnych jednorodnych
 - ◆ w może być zerem
- Dwie proporcjonalne czwórki reprezentują ten sam punkt:

$$(x_1 : y_1 : z_1 : w_1)$$

$$\sim (x_2 : y_2 : z_2 : w_2) \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

Przekształcenia rzutowe

Przestrzeń
wektorowa \mathbb{R}^3

Przestrzeń
afiniczna \mathbb{R}^3

Przestrzeń
rztowa \mathbb{RP}^{3*}

❖ Przestrzeń
rztowa

- Przekształceniem rzutowym (projektywicznym) nazywa się przekształcenie

$$\mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

gdzie A jest dowolną 4×4 macierzą, przy czym $\det A \neq 0$