

Informatyka praktyczna. Rzutowanie

Aleksander Denisiuk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
Olsztyn, ul. Słoneczna 54
aleksander.denisiuk@uwm.edu.pl

Rzutowanie

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/uwm>

Rzutowanie

Dwa typy rzutowania

- Równoległe
- Perspektywiczne

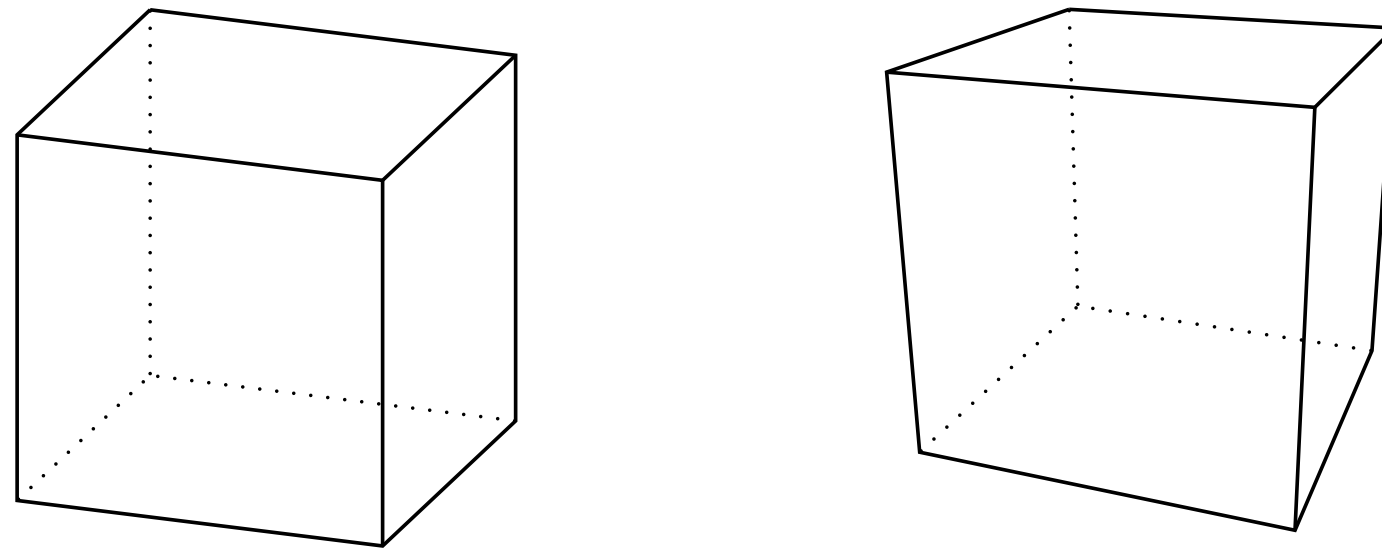


Figure II.18: The cube on the left is rendered with an orthographic projection. The one on the right with a perspective transformation. With the orthographic projection, the rendered size of a face of the cube is independent of its distance from the viewer; compare, for example, the front and back faces. Under a perspective transformation, the closer a face is, the larger it is rendered.

Ukryte powierzchnie

- Algorytm malarza
- Algorytm buforu głębokości

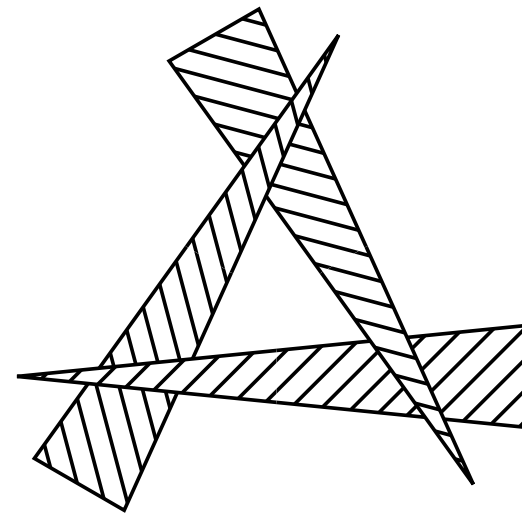
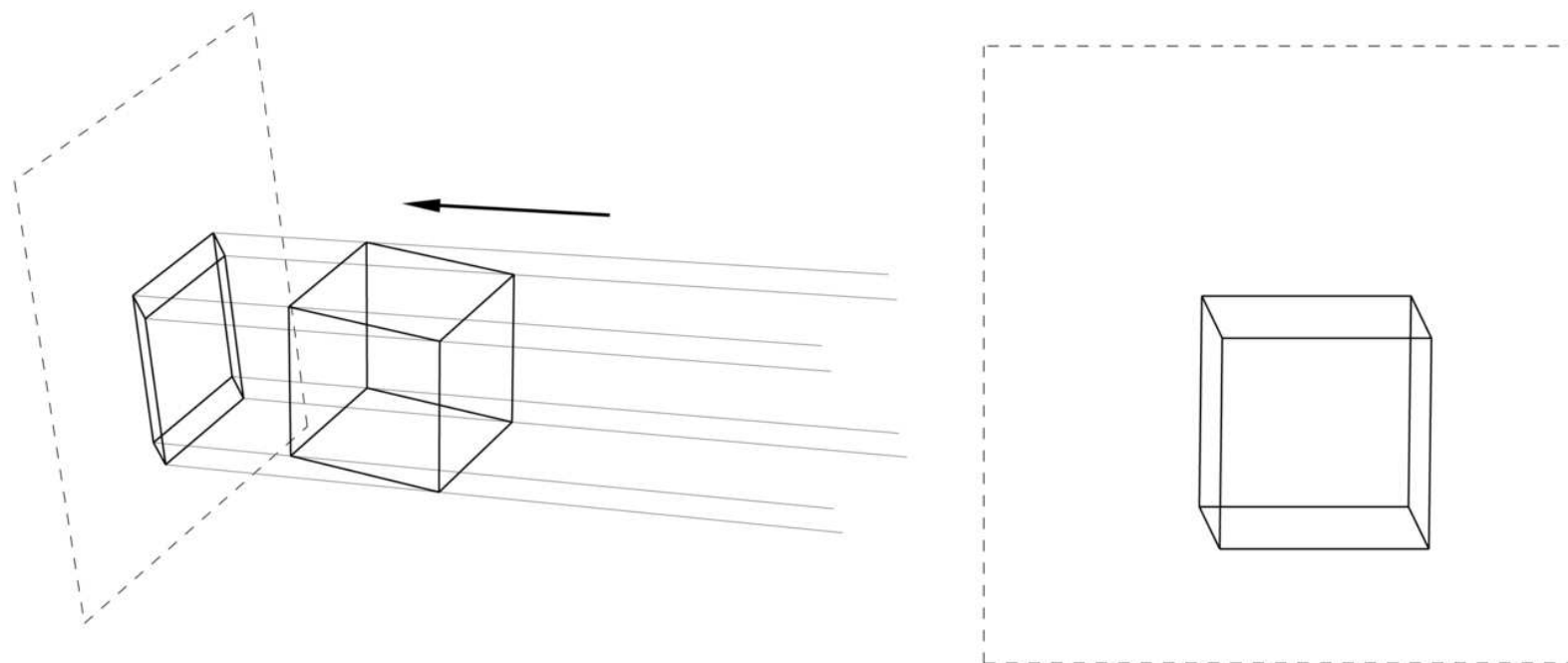


Figure I.12: Three triangles. The triangles are turned obliquely to the viewer so that the top portions of each triangle is in front of the base portion of another.

Rzutowanie równoległe

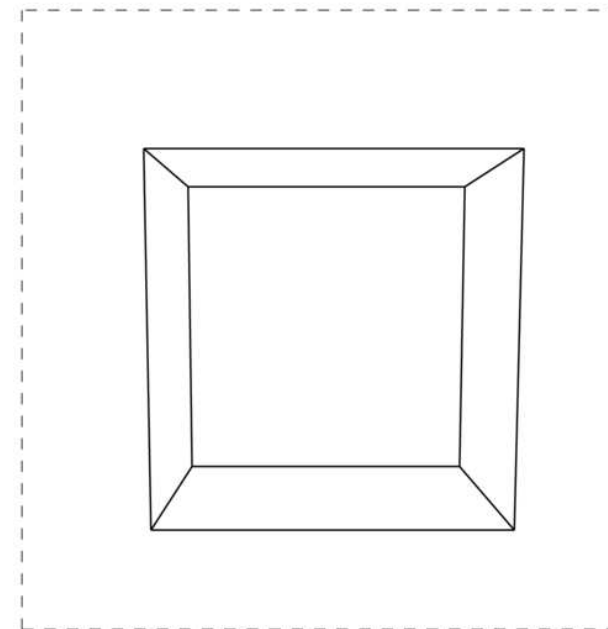
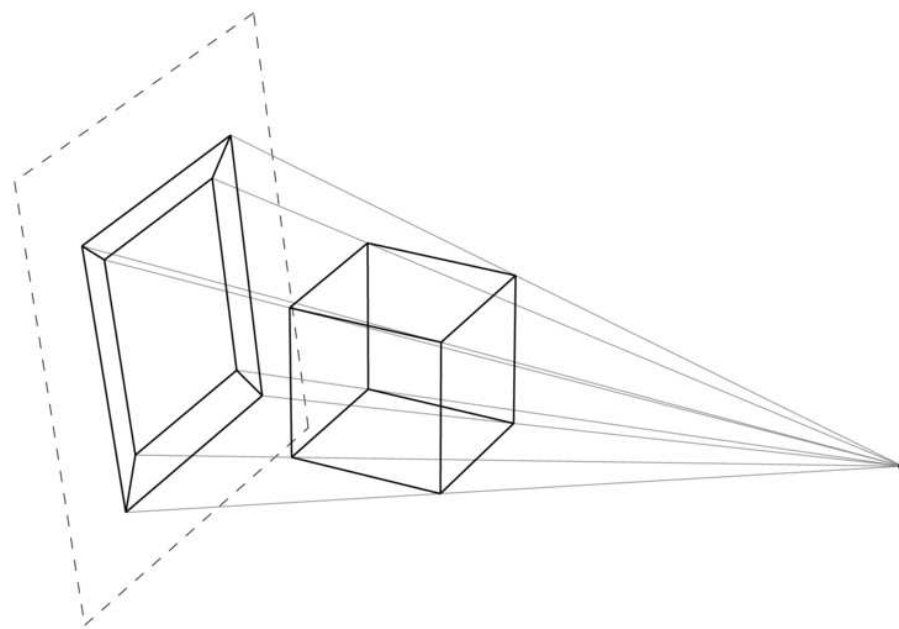


Macierz rzutowania równoległego

$$\begin{aligned}l &\leq x \leq r, && \text{left, right} \\b &\leq y \leq t, && \text{bottom, top} \\n &\leq -z \leq f, && \text{near, far}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rzutowanie perspektywiczne



Rzutowanie perspektywiczne

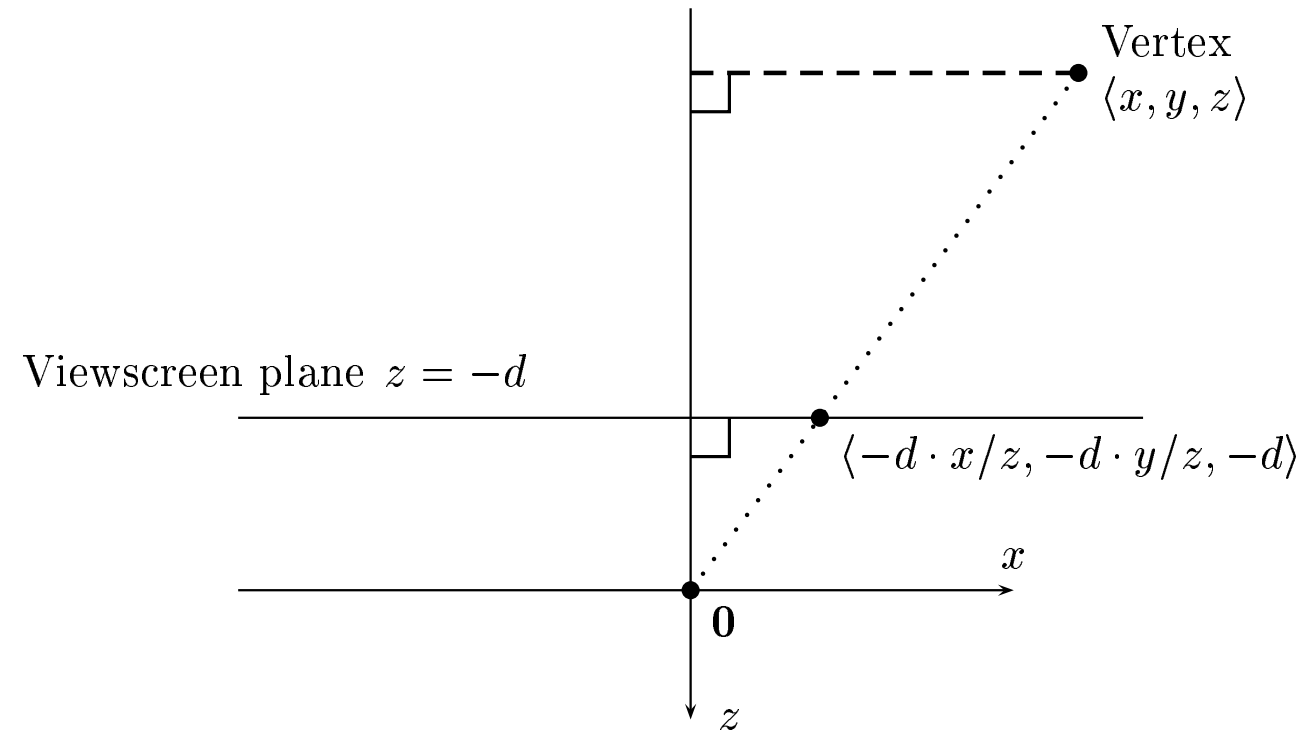


Figure II.19: Perspective projection onto a viewscreen at distance d . The viewer is at the origin, looking in the direction of the negative z axis. The point $\langle x, y, z \rangle$ is perspectively projected onto the plane $z = -d$, which is at distance d in front of the viewer at the origin.

Funkcja głębokości

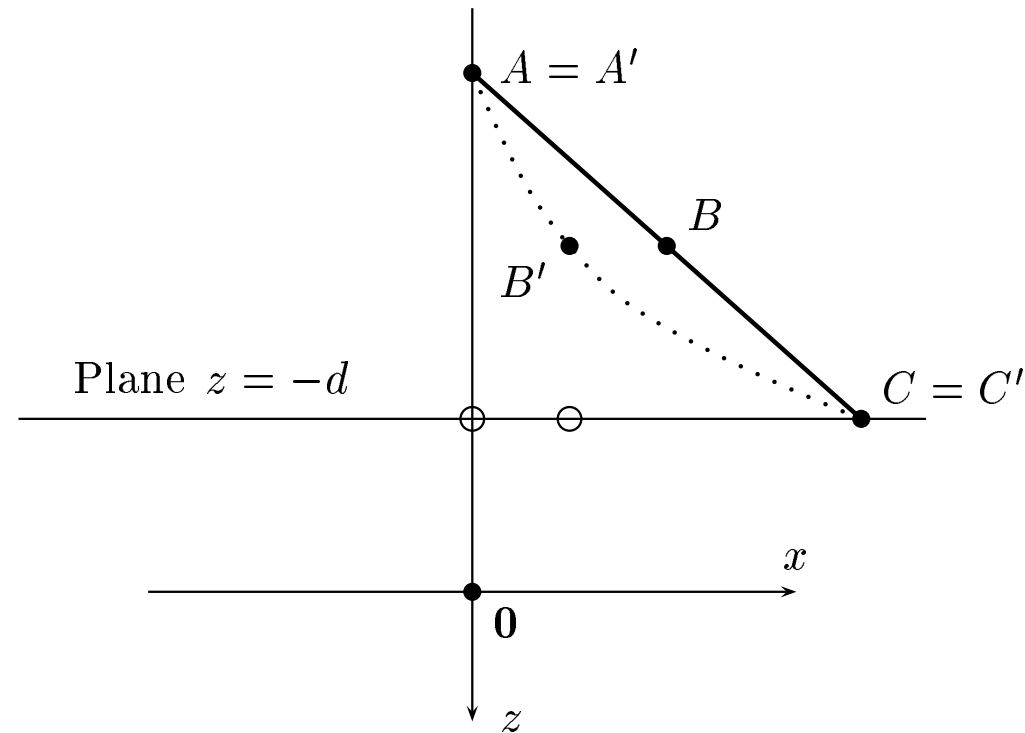


Figure II.20: The undesirable transformation of a line to a curve. The mapping used is $\langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -d \cdot x/z, -d \cdot y/z, z \rangle$. The points A and C are fixed by the transformation and B is mapped to B' . The dotted curve is the image of the line segment AC . (The small unlabeled circles show the images of A and B under the mapping of figure II.19.)

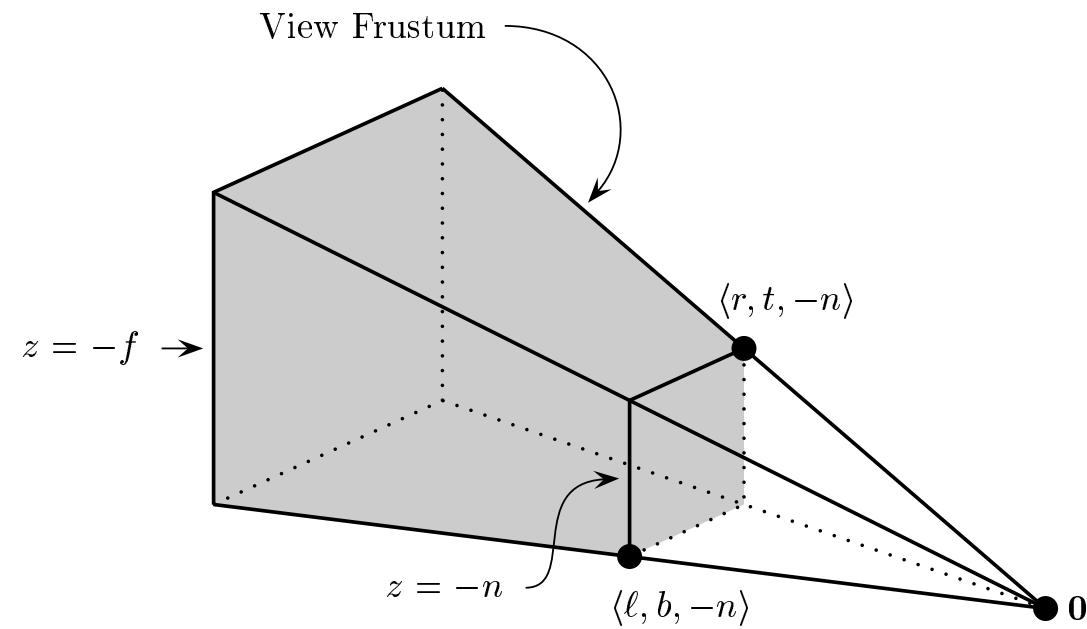
- $\text{głębokość}(z) = A + \frac{B}{z}$

Macierz rzutowania

- $(x, y, z) \mapsto (-\frac{dx}{z}, -\frac{dy}{z}, A + \frac{B}{z})$
- we współrzędnych jednorodnych $(x : y : z : 1) \mapsto (dx : dy : -Az - B : -z)$
- macierz:

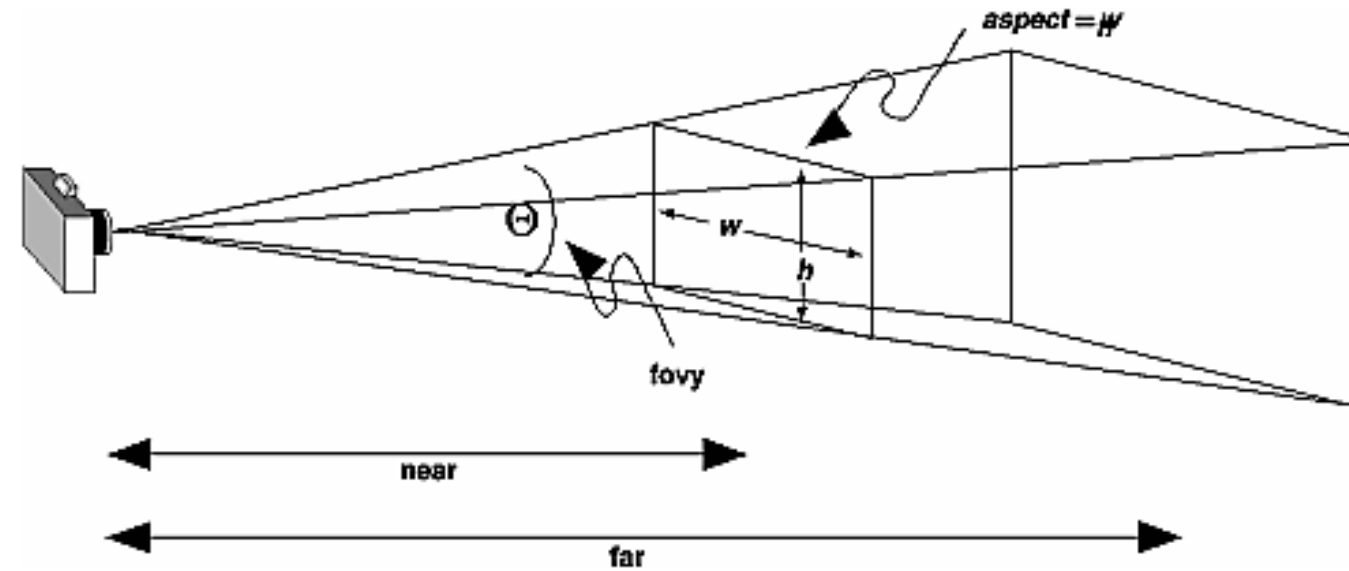
$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bryła widzenia



- głębokość(z) = $A + \frac{B}{z}$, gdzie $A = \frac{f+n}{f-n}$, $B = \frac{2fn}{f-n}$.
- macierz:
$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz rzutowania



- θ — kąt widzenia
- $a = \frac{w}{h}$ — *aspect ratio*, format obrazu
- macierz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze w modelowaniu

- Macierz `ModelMatrix`
- Macierz `ViewMatrix`
- Macierz `ProjectionMatrix`

Case study: modelowanie cienia

Zastosowanie rzutowania: cień

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 - y/y_0}, 0, \frac{z}{1 - y/y_0} \right)$$

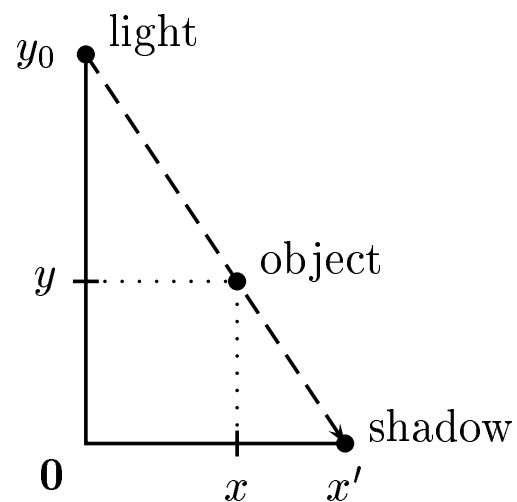
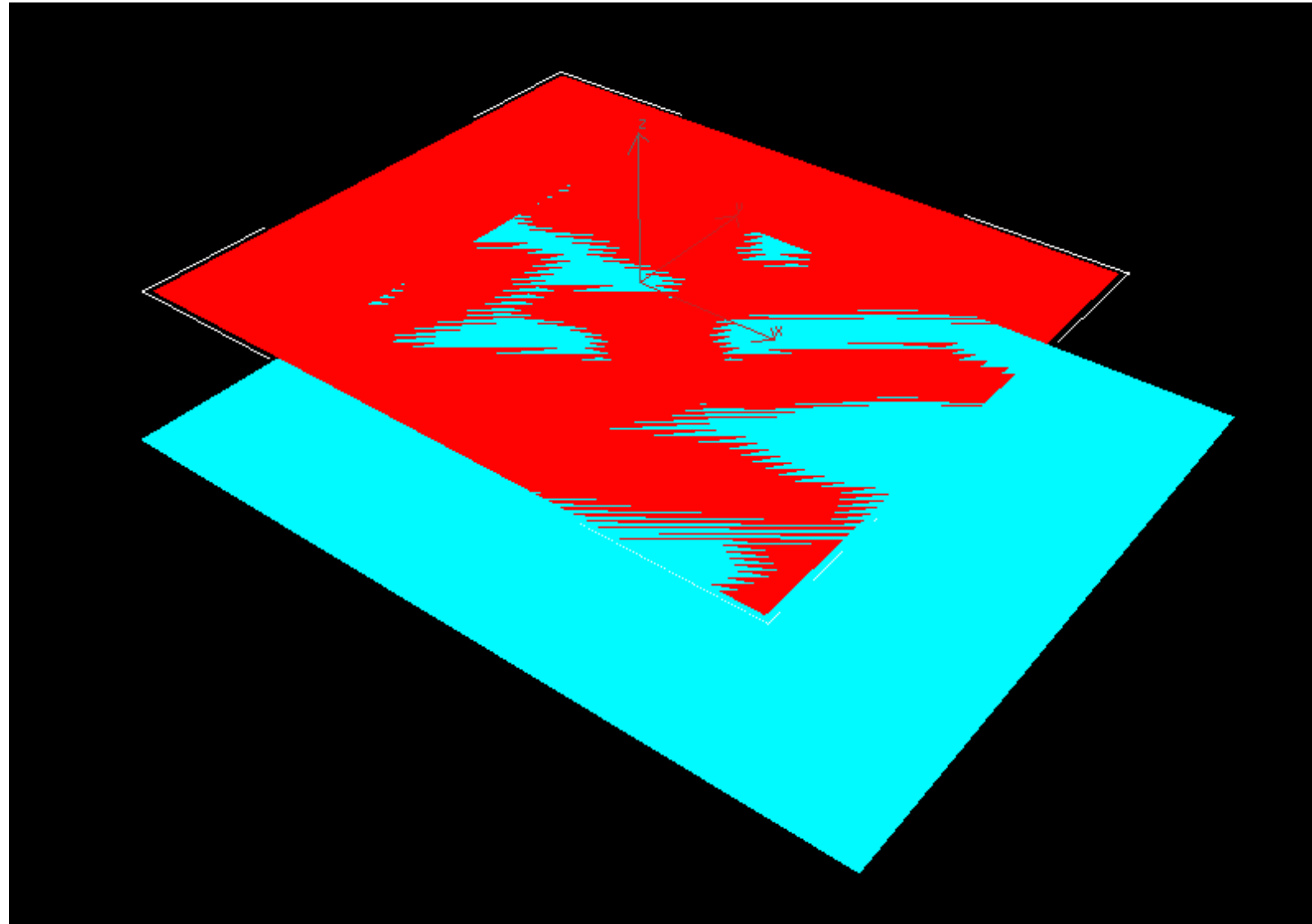


Figure II.22: A light is positioned at $\langle 0, y_0, 0 \rangle$. An object is positioned at $\langle x, y, z \rangle$. The shadow of the point is projected to the point $\langle x', 0, z' \rangle$, where $x' = x/(1 - y/y_0)$ and $z' = z/(1 - y/y_0)$.

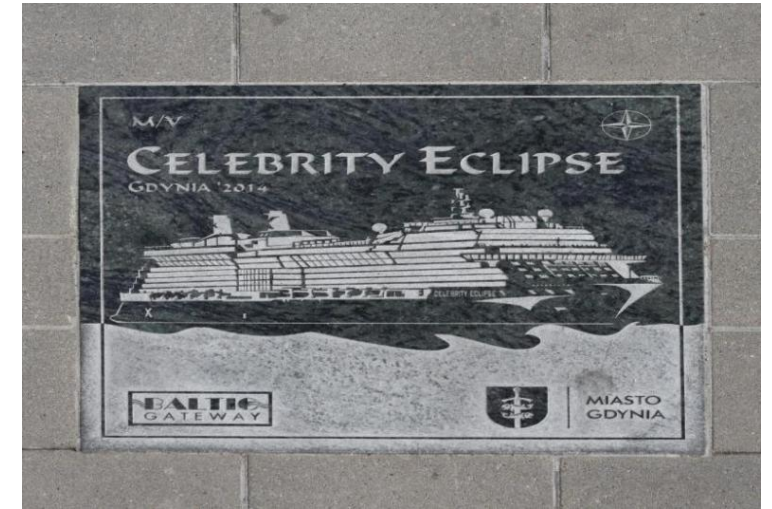
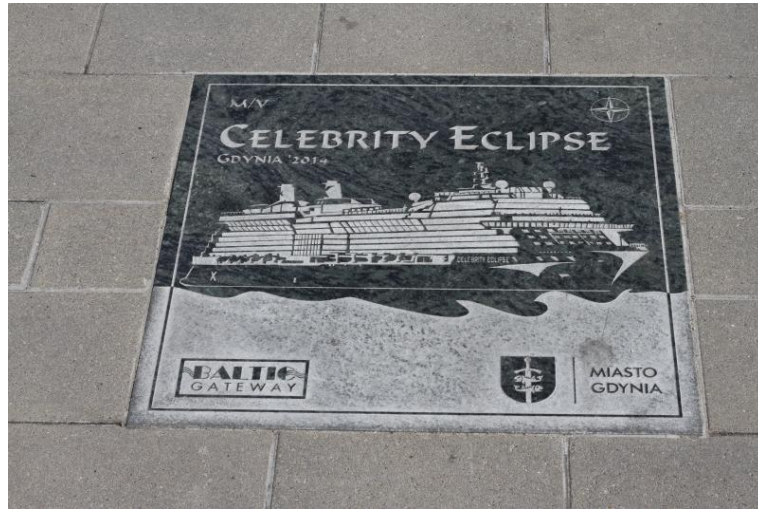
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z-fighting



Case study: przekształcenie rzutowe obrazów

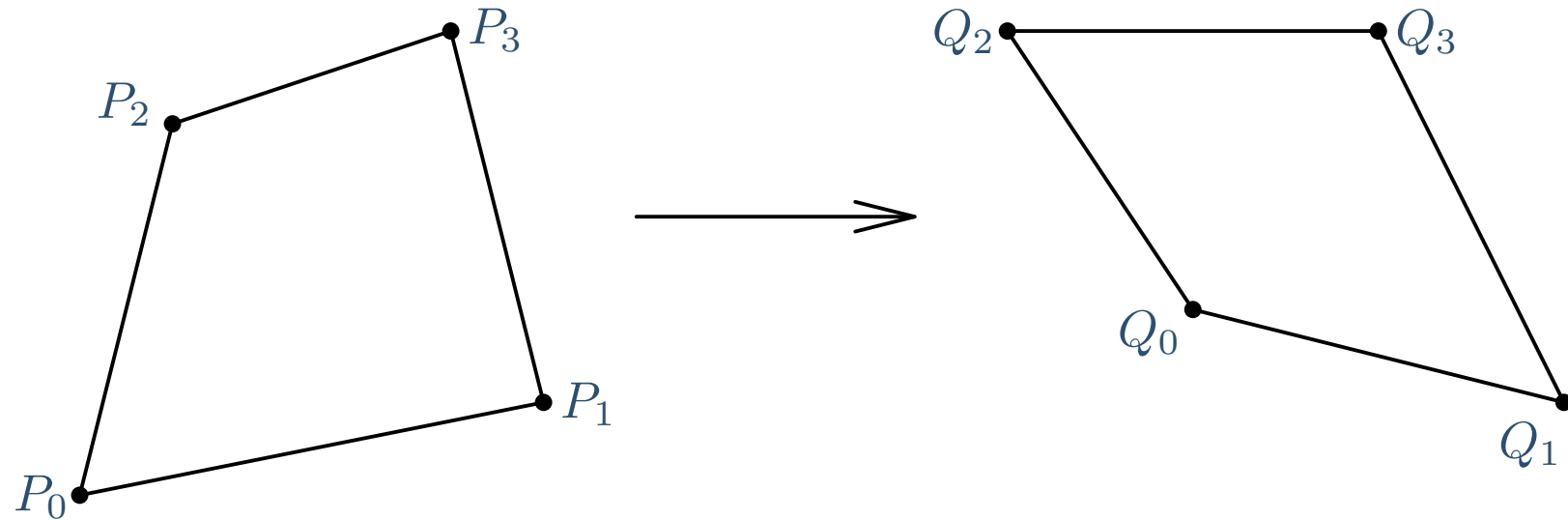
Transformacja perspektywiczna



- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
 - ◆ zazwyczaj wymaga się $\det A \neq 0$.
 - czemu?

Transformacja po czterech punktach

- Dane są dwie czwórki punktów na płaszczyźnie: $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ oraz $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
 - ◆ $P_j = (x_j, y_j)$, $Q_j = (s_j, t_j)$, $j = 0, \dots, 3$.
- Znaleźć taką transformację perspektywiczną $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, że $A(P_j) = Q_j$, $j = 0, \dots, 3$.

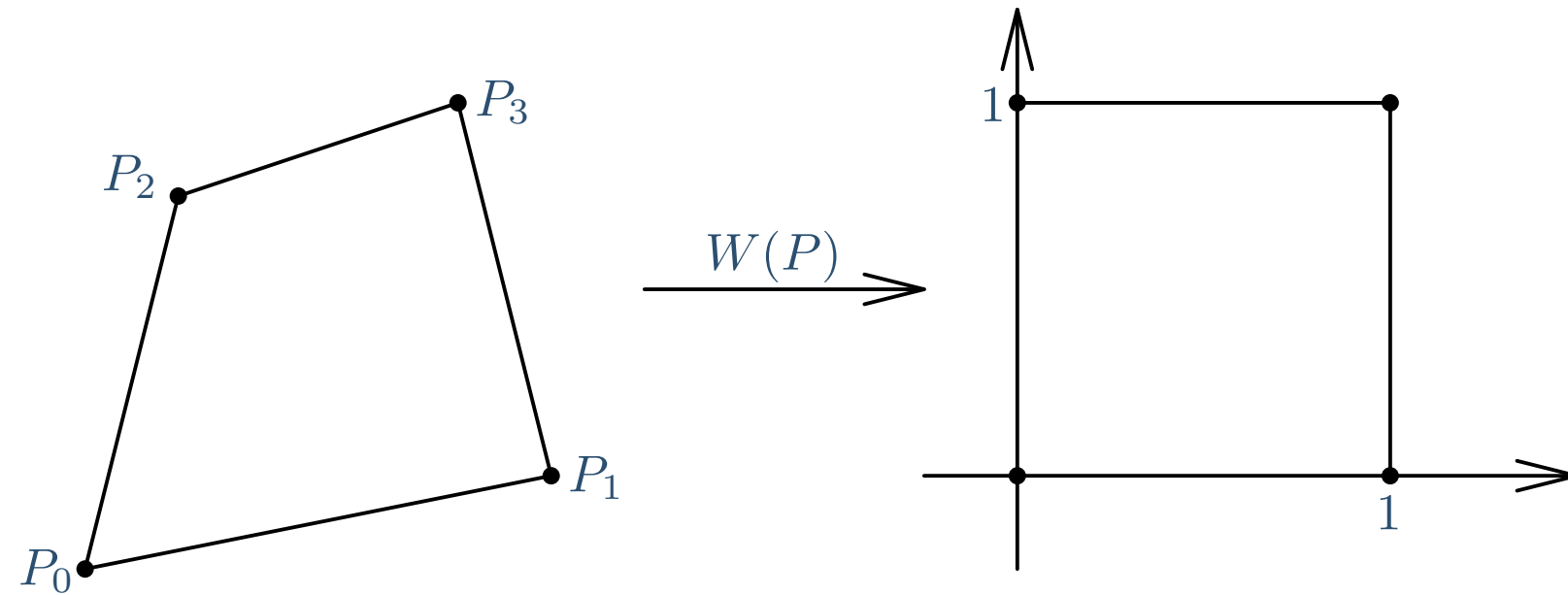


Metoda algebraiczna

- Rozwiązanie jednorodnego układu równań liniowych
 - ◆ 8 równań
 - ◆ 9 zmiennych

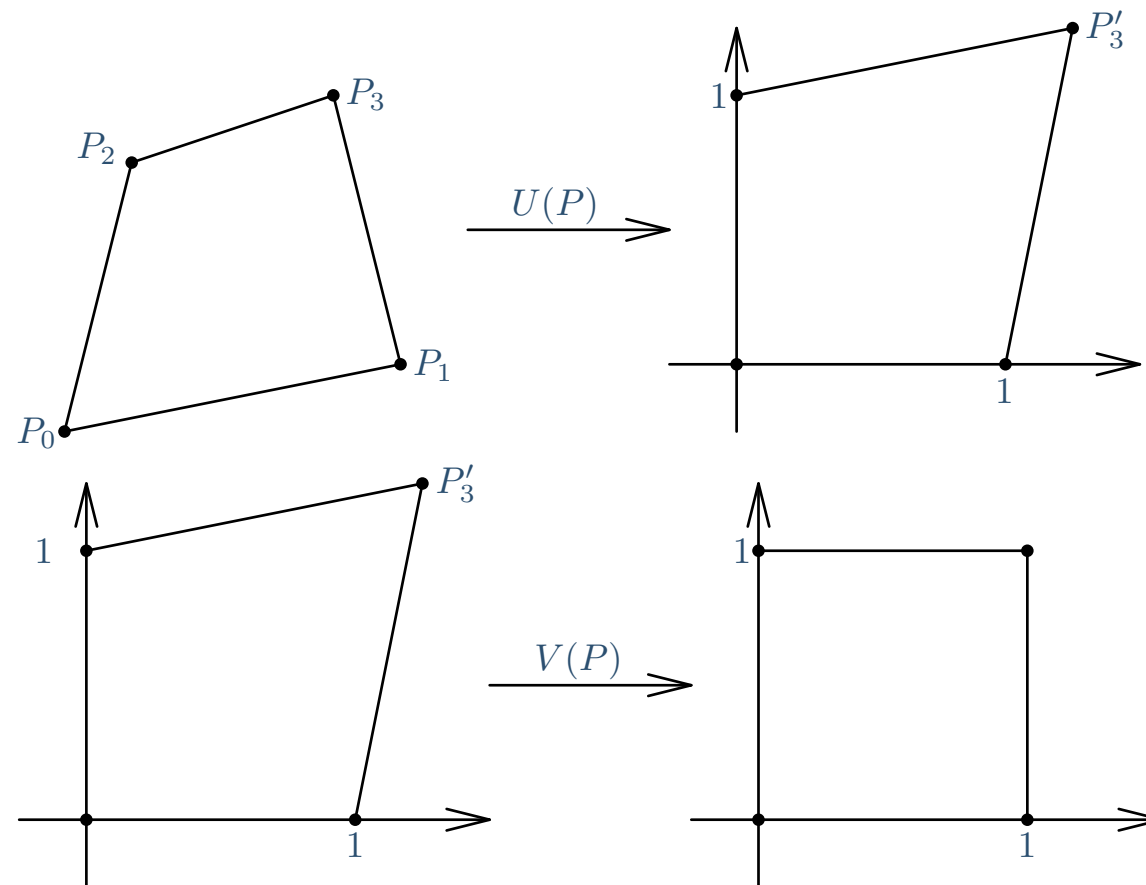
Metoda geometryczna

- Przekształcenie pomocnicze $W(P) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 - ◆ $A = (W(Q))^{-1}W(P)$



Przekształcenie W

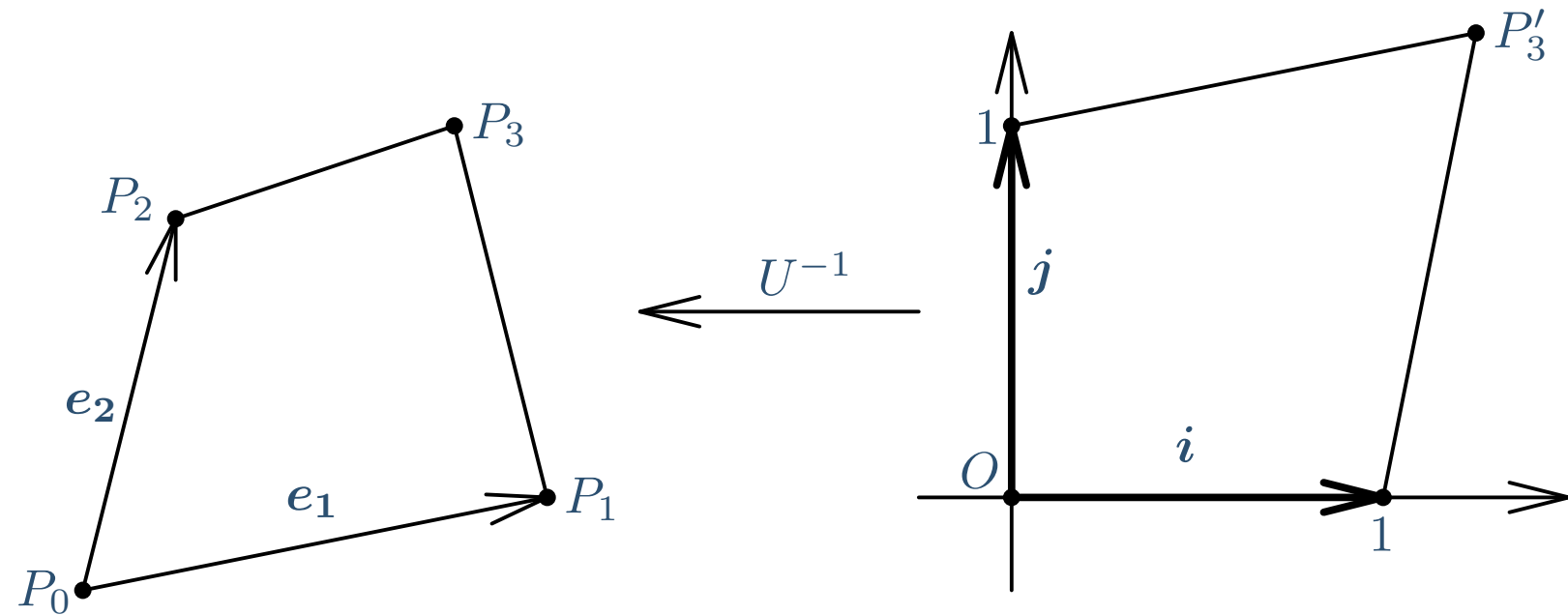
- Rozkładamy W w iloczyn $W(P) = V(P)U(P)$, gdzie
 - ◆ $U(P)$ będzie przekształceniem afinicznym,
 - ◆ $V(P)$ — rzutowym.



Przekształcenie U^{-1}

- Przekształcenie U^{-1} :

◆ $O \mapsto P_0, i \mapsto e_1, j \mapsto e_2$.



Macierz przekształcenia U

- $U^{-1} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & x_0 \\ dy_1 & dy_2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ♦ gdzie $dx_k = x_k - x_0$, $dy_k = y_k - y_0$, $k = 1, 2, 3$.

- $U = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{\Delta} & -\frac{dx_2}{\Delta} & \frac{-x_0 dy_2 + y_0 dx_2}{\Delta} \\ -\frac{dy_1}{\Delta} & \frac{dx_1}{\Delta} & \frac{x_0 dy_1 - y_0 dx_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- ♦ gdzie $\Delta = \det M = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$

- W szczególności, $P_3 \mapsto \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2 \\ -dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1 \end{pmatrix}$

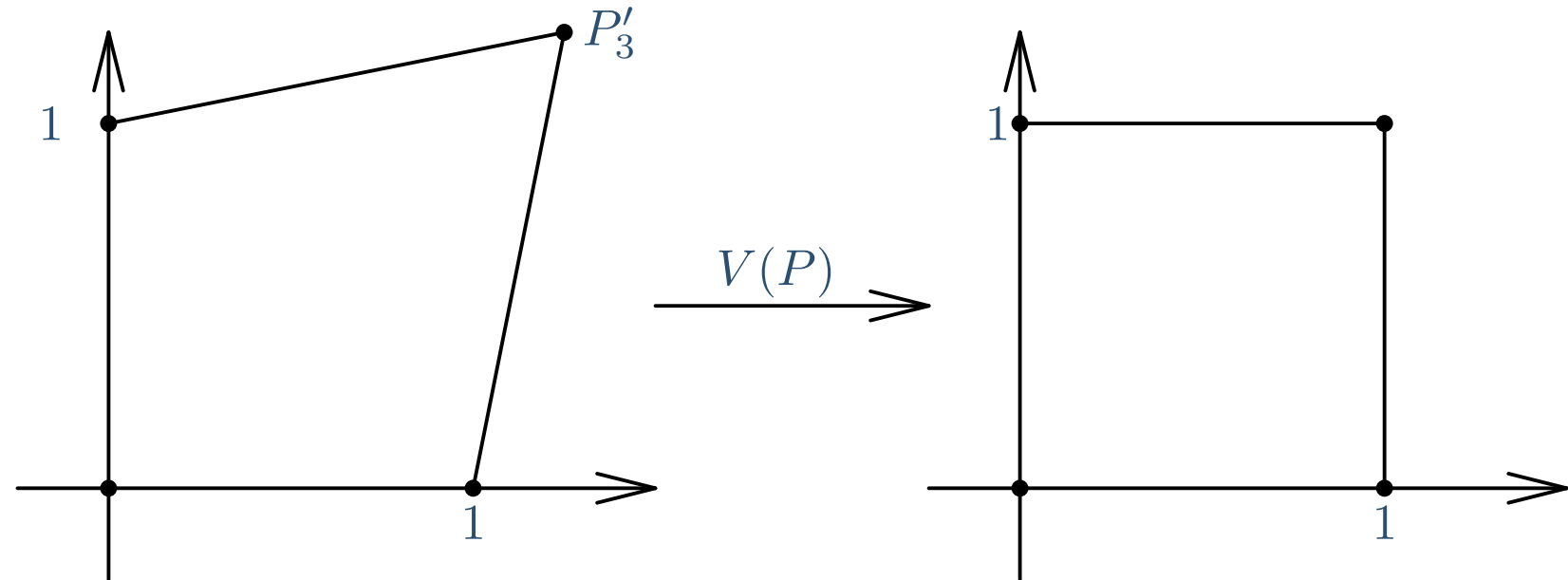
- Stosowanie współrzędnych jednorodnych pozwala zamienić U na prostszą

macierz: $\begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$

- Uwaga: $\Delta \neq 0$ (P_0, P_1, P_2 nie są współliniowe)

Przekształcenie V

- $P'_3 = (x'_3, y'_3)$, określone na slajdzie ??



Równania na macierz V

- $(0, 0) \mapsto (0, 0)$:
 - ◆ $a_{13} = a_{23} = 0, a_{33} = 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$:
 - ◆ $a_{11} = \lambda_1, a_{21} = 0, a_{31} + 1 = \lambda_1.$
 - $a_{31} = a_{11} - 1.$
- $(1, 0) \mapsto (1, 0)$:
 - ◆ $a_{12} = 0, a_{22} = \lambda_2, a_{32} + 1 = \lambda_2.$
 - $a_{32} = a_{22} - 1.$
- $P'_3 \mapsto (1, 1)$
 - ◆ $a_{11}x'_3 = \lambda, \quad a_{22}y'_3 = \lambda, \quad -x'_3 - y'_3 + 1 = -\lambda.$

Macierz V

- Rozwiązanie równań:
$$\begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$$
- Inna postać macierzy V :
$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{vmatrix} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} & 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} & 1 \\ \begin{vmatrix} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \end{vmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$
- Uwaga: $x'_3 \neq 0, y'_3 \neq 0$ (P_0, P_1, P_3 oraz P_0, P_2, P_3 nie są współliniowe)

Macierz V^{-1}

- $V^t = TS$, gdzie S jest skalowaniem, a T — przesunięciem równoległym
- $(V^t)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
- $V^{-1} = ((V^t)^{-1})^t = (S^{-1}T^{-1})^t$
- $$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 \\ \frac{1-y'_3}{x'_3+y'_3-1} & \frac{1-x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x'_3 & 0 & 0 \\ 0 & y'_3 & 0 \\ 1-y'_3 & 1-x'_3 & x'_3+y'_3-1 \end{pmatrix}$$
- ◆ Uwaga: $x'_3 + y'_3 - 1 \neq 0$ (P_1, P_2, P_3 nie są współliniowe)

Algorytm obliczenia przekształcenia

- $P_j = (x_j, y_j), Q_j = (s_j, t_j), j = 0, \dots, 3$

1. $dx_j = x_j - x_0, dy_j = y_j - y_0, j = 1, 2, 3$

2. $\Delta_p = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$

3. $x'_3 = \frac{dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2}{\Delta_p}, y'_3 = \frac{-dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1}{\Delta_p}$

4. $U(P) = \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}$

5. $V(P) = \begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$

Algorytm obliczenia przekształcenia, cd

$$6. \quad ds_j = s_j - s_0, dt_j = t_j - t_0, j = 1, 2, 3$$

$$7. \quad \Delta_q = ds_1 dt_2 - dt_1 ds_2$$

$$8. \quad s'_3 = \frac{ds_3 dt_2 - dt_3 ds_2}{\Delta_q}, t'_3 = \frac{-ds_3 dt_1 + dt_3 ds_1}{\Delta_q}$$

$$9. \quad V^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} s'_3 & 0 & 0 \\ 0 & t'_3 & 0 \\ 1 - t'_3 & 1 - s'_3 & t'_3 + s'_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad U^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & s_0 \\ dt_1 & dt_2 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)V(P)U(P)$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Uwagi

- Jeżeli punkty P tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
 - ◆ $U(P) = V(P) = I$
 - ◆ $A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)$
- Jeżeli punkty Q tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
 - ◆ $U^{-1}(Q) = V^{-1}(Q) = I$
 - ◆ $A = V(P)U(P)$