

Министерство образования Республики Беларусь

БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А. С. ПУШКИНА
(БрГУ)

УДК 517.986.64

№ ГР 2000739

ИНВ № _____

Экз. № _____

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе
к. ф.-м. н., доцент

_____ В. С. Секержицкий

(дата)

ОТЧЁТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ С ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ И
ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

_____ А. С. Денисюк

(дата)

БРЕСТ 2000

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Ответственный исполнитель, доцент, к. ф.-м. н.	А. С. Денисюк	(Введение, общие вопросы, разделы 1, 2, 3.)
Исполнитель, доцент, к. ф.-м. н.	М. И. Ганжа	(Введение, разделы 4, 5, 6.)
Исполнитель, студент	С. А. Марков	(Раздел 6.)
Исполнитель, студент	В. Н. Рудецкий	(Раздел 4.)

РЕФЕРАТ

Отчёт 42 стр., 1 кн., 11 рис., 39 источников.

ТОМОГРАФИЯ, ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ДВОЙНАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ, ВЫТЯНУТЫЕ СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, НЕПОЛНЫЕ ДАННЫЕ, ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СЕЙСМИКИ, ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Целью настоящего исследования является решение нескольких задач интегральной геометрии и связанных с ними прикладных задач.

В первой главе обсуждаются алгебраические алгоритмы реконструкции функции по неполному набору сферических средних. Численно реализовано два алгебраических алгоритма восстановления: непосредственную дискретизацию и дискретизацию при помощи системы пикселей Паламодова. Результаты численного эксперимента показывают, что второй метод имеет определённые преимущества по отношению к устойчивости восстановления.

Вторая глава посвящена разработке и численной реализации алгоритмов реконструкции, основанных на сведении задачи к обращению преобразования Радона по неполным данным и последующим применением стандартных алгоритмов обращения преобразования Радона. Неизвестные данные полагаются равными нулю. С помощью численных экспериментов показано, что полученные алгоритмы по качеству и устойчивости восстановления не уступают алгебраическим, значительно превосходя их по скорости вычислений.

Поскольку одним из способов исходная задача может быть сведена к задаче обращения преобразования Радона с неполным угловым диапазоном, в третьей главе реализован алгоритм решения этой задачи, основанный на

явной формулы интерполяции. С помощью численных экспериментов показано, что применение интерполяции усиливает детальность восстановления. Таким образом, разработанный алгоритм может быть положен в основу алгоритма пополнения данных в исходной задаче.

Четвёртая глава посвящена разработке и реализации алгоритма многослойной продольной линейной томографии. Продольная линейная томография давно применяется в медицине. В последнее время получили распространение аппараты, в которых чувствительная плёнка заменена на пластинку датчиков, измеряющих падение интенсивности излучения. Оказывается, используя полученные данные можно получить томограмму среза не только на том уровне, на который настроен аппарат, но также и на соседних.

Пятая глава посвящена проблеме устойчивости восстановления. Поскольку основным источником неустойчивости в рассматриваемой задаче является задача интерполяции целой функции экспоненциального вида, именно эта задача подробно рассматривается. Определяется понятие устойчиво и неустойчиво восстанавливаемой функции. Доказано, что пространство всех функций экспоненциального типа разлагается в прямую сумму двух подпространств, первое из которых целиком состоит из устойчиво восстанавливаемых функций, а второе, конечномерное — из неустойчиво восстанавливаемых функций. Разработан метод восстановления по неполным данным проекции функции на „устойчивое“ подпространство, а также — ближайшей устойчиво восстанавливаемой функции.

Важную роль в упомянутом разложении и алгоритмах играет специальный базис в пространстве целых функций экспоненциального типа, связанный с задачей интерполяции. Функции этого базиса обладают свойством ортогональности как во всём пространстве \mathbb{R}^n , так и в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, в которой известны значения интерполируемой функции. При $n = 1$ такая система функций совпадает с известной системой вытянутых сфероидальных

функций. Все известные алгоритмы вычисления вытянутых сфероидальных функций опираются на разложение их в ряд по функциям Лагранжа либо на численное решение определяющего дифференциального уравнения. Таким образом, известные методы вычислений не могут быть непосредственно обобщены на многомерный случай. В шестой главе предпринята попытка вычисления вытянутых сфероидальных функций как собственных функций интегрального оператора. Такой способ мог бы быть непосредственно обобщён на общий случай. Численные эксперименты показывают, что значения вытянутых сфероидальных функций, вычисленные по предлагаемой методике совпадают со значениями, полученными по другим методикам.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1. Восстановление функции по неполному набору сферических средних с помощью алгебраических алгоритмов	10
1.1. Фантом и исходные данные	10
1.2. Непосредственное алгебраическое восстановление	11
1.3. Алгебраическое восстановление по системе пикселей Паламодова	11
2. Восстановление функции по неполному набору сферических средних путём сведения задачи к обращению преобразования Радона	14
2.1. Метод фильтрации и обратной проекции — I	14
2.2. Метод фильтрации и обратной проекции — II	18
3. Обращение преобразования Радона по данным с неполным угловым диапазоном	21
3.1. Введение	21
3.2. Вывод формулы обращения	22
3.3. Численная реализация	24
4. О многослойной линейной продольной томографии	28
5. Восстановление устойчивой части функции с финитным спектром в многомерной задаче интерполяции	30
6. О вычислении вытянутых сфероидальных функций	33
Заключение	37
Список использованных источников	40

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии. Пусть f — функция с компактным носителем в полушаре $H = \{x^2 < 1, x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Задача заключается в определении f по сферическим средним

$$Mf(S) = \int_S f(x) dS, \quad (0.1)$$

$S \subset \mathbf{S}$, где \mathbf{S} — множество сфер с центрами на плоскости $\{x_n = 0\}$.

Эта задача имеет важное значение в связи с приложениями в сейсмической томографии (см. [1], [2], [3], [4], [5], [6]), в задаче синтеза радарных апертур (см. [7], [8]), при $n = 3$ — в линеаризованной обратной задаче рассеяния (см. [3], [9]).

Задача обращения для полного набора данных рассмотрена многими авторами, см. [1], [3], [10], [4], [8] и некоторыми другими. Мы предположим, что Mf известно только для $S \in \mathbf{S}_H$, где $\mathbf{S}_H \subset \mathbf{S}$ — множество сфер, целиком принадлежащих шару $\{x^2 < 1\}$. Такое ограничение данных естественно присутствует в реальных задачах, возникающих в приложениях.

Несмотря на то, что обращение сферического преобразования по полным данным устойчиво, восстановление по $Mf|_{\mathbf{S}_H}$ обладает экспоненциальной неустойчивостью по отношению к случайным ошибкам в данных (см. [11]). Вследствие неустойчивости восстановление оригинала становятся ненадёжным.

Мы будем восстанавливать вместо оригинала функцию, близкую в некотором смысле к оригиналу и обладающую тем свойством, что её восстановление устойчиво (ср. [12]).

Таким образом, перед нами возникают две основные задачи:

- 1). Описать множество оригиналов, восстановление которых устойчиво.
- 2). Указать процедуру восстановления *устойчивой* части f .

Отметим, что аналогичная неустойчивость и сходная задача возникают при обращении преобразования Радона по неполным данным (см. [13], [14]). Преобразование Радона с неполными данными играет важную роль в различных задачах компьютерной томографии (см. [15]).

Настоящая работа посвящена решению поставленных задач и некоторых связанных с ними прикладных задач.

В первой главе обсуждаются алгебраические алгоритмы реконструкции функции по неполному набору сферических средних. Мы реализуем численно два алгебраических алгоритма восстановления: непосредственную дискретизацию и дискретизацию при помощи системы пикселей Паламодова, предложенной в работе [12]. В результате численного эксперимента убеждаемся, что второй метод имеет определённые преимущества по отношению к устойчивости восстановления. Отметим, что в настоящее время

в прикладных исследованиях используется прямой алгебраический метод (см. [4], [9], [3], [6], [5], [8], [16] и др.)

Вторая глава посвящена разработке и численной реализации алгоритмов реконструкции, основанных на сведении задачи к обращению преобразования Радона по неполным данным (см. [17]) и последующим применением стандартных алгоритмов обращения преобразования Радона (см. [15]). Неизвестные данные полагаются равными нулю. С помощью численных экспериментов показано, что полученные алгоритмы по качеству и устойчивости восстановления не уступают алгебраическим, значительно превосходя их по скорости вычислений.

Поскольку одним из способов, описанных в работе [17], исходная задача может быть сведена к задаче обращения преобразования Радона с неполным угловым диапазоном, в третьей главе реализован алгоритм решения этой задачи, основанный на явной формулы интерполяции, приведённой в работе [13]. С помощью численных экспериментов показано, что применение интерполяции усиливает детальность восстановления. Таким образом, разработанный алгоритм может быть положен в основу алгоритма пополнения данных в исходной задаче.

Четвёртая глава посвящена разработке и реализации алгоритма многослойной продольной линейной томографии. Продольная линейная томография давно применяется в медицине (см. [18] и [19]). В последнее время получили распространение аппараты, в которых чувствительная плёнка заменена на пластинку датчиков, измеряющих падение интенсивности излучения. Оказывается, используя полученные данные можно получить томограмму среза не только на том уровне, на который настроен аппарат, но также и на соседних.

Пятая глава посвящена проблеме устойчивости восстановления. Поскольку основным источником неустойчивости в рассматриваемой задаче является задача интерполяции целой функции экспоненциального вида, именно эта задача подробно рассматривается. Определяется понятие устойчиво и неустойчиво восстанавливаемой функции. Доказано, что пространство всех функций экспоненциального типа разлагается в прямую сумму двух подпространств, первое из которых целиком состоит из устойчиво восстанавливаемых функций, а второе, конечномерное — из неустойчиво восстанавливаемых функций. Разработан метод восстановления по неполным данным проекции функции на „устойчивое“ подпространство, а также — ближайшей устойчиво восстанавливаемой функции.

Важную роль в упомянутом разложении и алгоритмах играет специальный базис в пространстве целых функций экспоненциального типа, связанный с задачей интерполяции. Функции этого базиса обладают свойством ортогональности как во всём пространстве \mathbb{R}^n , так и в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, в которой известны значения интерполируемой функции. При $n = 1$ такая система функций совпадает с известной системой вытянутых сферо-

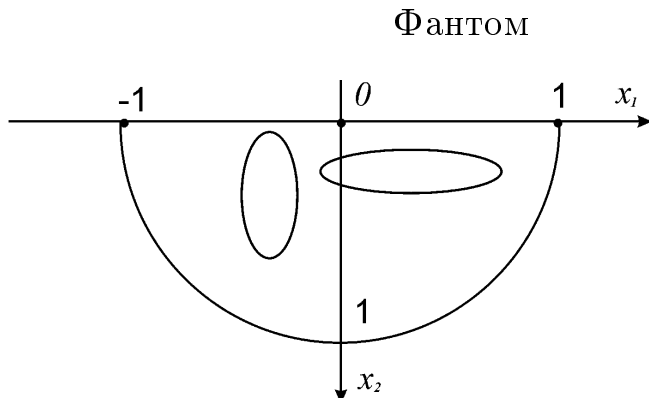
идальных функций, см. [20], [21]. Все известные алгоритмы вычисления вытянутых сфероидальных функций опираются на разложение их в ряд по функциям Лагранжа либо на численное решение определяющего дифференциального уравнения (см. [21], [22], [23], [24], [25], [26]). При $n > 1$ мало известно о свойствах таких систем функций (ср. [27]). Таким образом, известные методы вычислений не могут быть непосредственно обобщены на многомерный случай. В шестой главе предпринята попытка вычисления вытянутых сфероидальных функций как собственных функций интегрального оператора. Такой способ мог бы быть непосредственно обобщён на случай $n > 1$. Численные эксперименты показывают, что значения вытянутых сфероидальных функций, вычисленные по предлагаемой методике совпадают со значениями, полученными по способу работы [24].

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО НЕПОЛНОМУ НАБОРУ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

1.1. ФАНТОМ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для численных экспериментов рассмотрим фантом, состоящий из характеристической функции двух эллипсов с осями, параллельными осям координат (см. рисунок 1.1). один из эллипсов — *длинный* имеет центр в точке $(-0.25, 0.33)$ и полуоси 0.1 и 0.3 соответственно. Вторым — *широкий* — центр в точке $(0.4, 0.15)$ и полуоси 0.47 и 0.1. Оба эллипса расположены внутри окружности $\{|x| < 0.9\}$

Рисунок 1.1



Замечание 1.1. Микрлокальный анализ, проведённый в работе [11] позволяет ожидать, что широкий эллипс восстановится лучше, чем длинный. Для любой граничной точки широкого эллипса существует дуга из семейства, касающаяся границы эллипса в этой точке. Это значит, что конормальное расслоение границы широкого эллипса покрывается кривыми из семейства дуг. Указанное условие не выполнено для длинного эллипса. Можно ожидать, что только точки, находящиеся близко к дневной поверхности $\{x_2 = 0\}$ будут хорошо восстанавливаться.

Мы будем восстанавливать по дискретному набору данных. Фиксируем $N + 1 = 129$ точек на дневной поверхности:

$$a_k = -1 + 2k/N, \quad k = 0 \dots N. \quad (1.1)$$

Предположим, что известен массив $G_{k,l}$, $0 \leq k < l \leq N$. Здесь $G_{k,l}$ — значение сферического преобразования (0.1) для дуги с диаметром $[a_k, a_l]$.

Более того, мы протестируем алгоритмы и для *зашумлённых* данных. Под зашумлёнными данными мы подразумеваем массив G , к каждому элементу которого добавлено случайное слагаемое, не превосходящее по абсолютной величине 10% длины соответствующей дуги. Результаты обращения по зашумлённым данным характеризуют устойчивость алгоритма.

1.2. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ

Рассмотрим непосредственное алгебраическое восстановление. Разделим прямоугольник $[-1, 1] \times [0, 1]$ на квадраты $R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N/2$, где $b_j = 2j/N$, a определены в (1.1). Предположим, что оригинал — постоянная функция на каждом квадрате $f|_{R_{i,j}} = X_{i,j}$. Обозначим через $T_{k,l}^{i,j} = \text{length}(A_{k,l} \cap R_{i,j})$, где $A_{k,l}$ — дуга с диаметром $[a_k, a_l]$. Интегральное уравнение (0.1) преобразуется в переопределённую систему $N(N+1)/2 = 8256$ линейных алгебраических уравнений с $N^2/2 = 8192$ неизвестными $X_{i,j}$:

$$\sum_{i,j} T_{k,l}^{i,j} X_{i,j} = G_{k,l}, \quad 0 \leq k < l \leq N. \quad (1.2)$$

Эта система определяет только те $X_{i,j}$, для которых соответствующий квадрат расположен внутри $\{x^2 = 1\}$, так что фактически число неизвестных меньше.

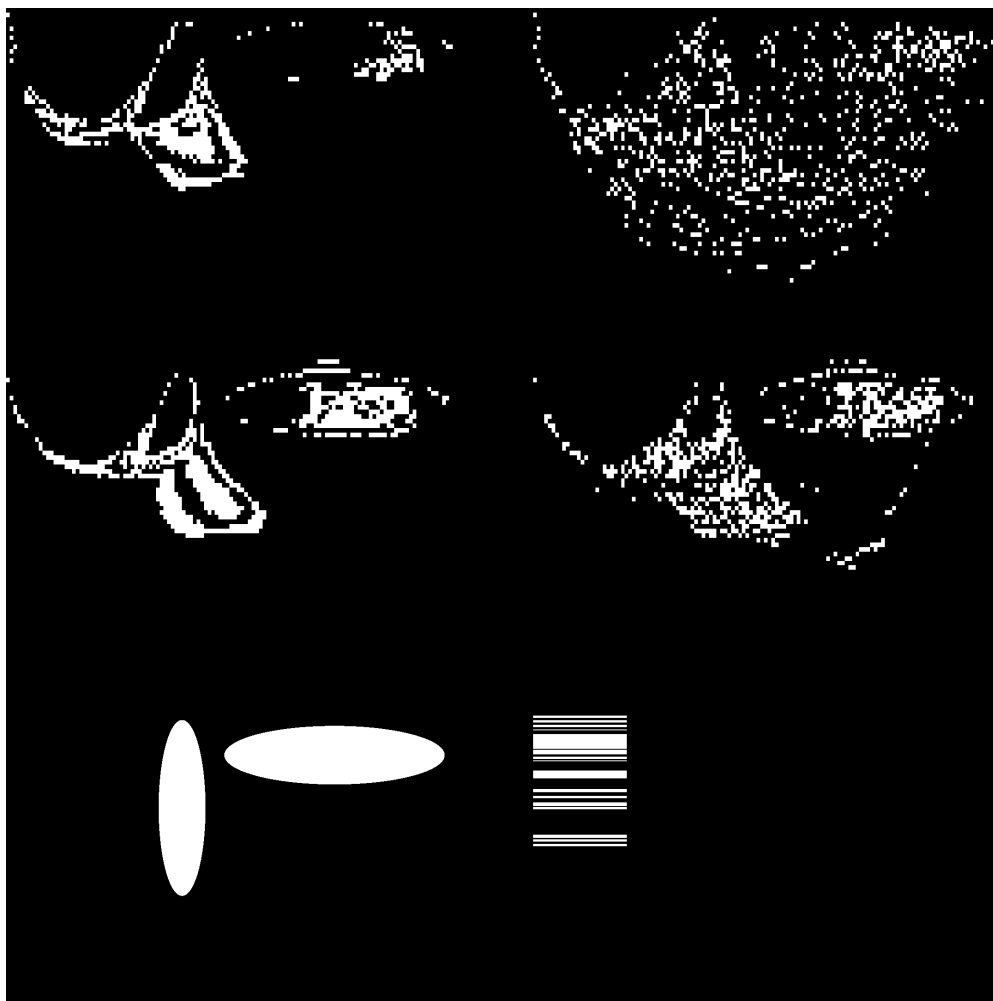
Для решения системы (1.2) применяется метод Качмажа, описанный в [15]. Мы выбираем параметр релаксации $\omega = 0.35$. На рисунке 1.2 в верхнем ряду показаны результаты вычислений после четырёх итераций. Первая картинка в верхнем ряду представляет результат восстановления по точным данным $G_{i,j}$. Вторая — по зашумлённым. В нижнем ряду показан оригинал.

1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО СИСТЕМЕ ПИКСЕЛЕЙ ПАЛАМОДОВА

В работе [12] В. П. Паламодов предложил использовать для дискретизации систему пикселей, волновой фронт которых покрывается дугами семейства. Так как для каждого такого пикселя восстановление устойчиво (см. [11]), можно ожидать, что процедура восстановления функции, основанная на такой системе пикселей, будет более устойчива, чем процедура, основанная на непосредственной дискретизации.

Рисунок 1.2

Алгебраическое восстановление с помощью
непосредственной дискретизации (верхний ряд) и
по системе пикселей Паламодова (средний ряд)



Примером такого пикселя может служить характеристическая функция полосы, ограниченной двумя концентрическими дугами $\{0 \leq R_1 \leq (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq R_2\}$, где $|a| + R_2 < 1$, т. е. полоса расположена внутри H .

Фиксируем $N + 1 = 129$ точек на дневной поверхности: $a'_i = (1 + \varepsilon)(-1 + 2i/N)$, $i = 0 \dots N$. Рассмотрим все полосы, образованные концентрическими дугами: $S_{i,j} = \{0 \leq r_{i,j} \leq (x_1 - a_{i,j})^2 + x_2^2 \leq R_{i,j}\}$, $0 \leq i < j \leq N$. Неге $a_{i,j} = (a'_i + a'_j)/2$, $R_{i,j} = (a'_j - a'_i)/2$, $r_{i,j} = (a'_{j-1} - a'_{i+1})/2$. Предположим, что

$$f(x) = \sum_{i,j} X_{i,j} I_{S_{i,j}}(x),$$

где

$$I_{S_{i,j}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_{i,j}, \\ 0, & x \notin S_{i,j}. \end{cases}$$

Обозначим через $T_{k,l}^{i,j} = \text{length}(A_{k,l} \cap S_{i,j})$, где $A_{k,l}$ — дуга с диаметром $[a_k, a_l]$, a определены в (1.1). Интегральное уравнение (0.1) превращается в систему $N(N+1)/2 = 8256$ линейных алгебраических уравнений с $N(N+1)/2 = 8256$ неизвестными $X_{i,j}$:

$$\sum_{i,j} T_{k,l}^{i,j} X_{i,j} = G_{k,l}, \quad 0 \leq k < l \leq N. \quad (1.3)$$

Так как количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, для решения не требуется никакая процедура регуляризации. Система имеет *точное* решение.

Если ε мало, центр полосы $S_{i,j}$ расположен близко к центру дуги $A_{i,j}$, радиус этой дуги принадлежит сегменту $[r_{i,j}, R_{i,j}]$, так что $A_{i,j} \subset S_{i,j}$. Все остальные дуги либо не пересекают $S_{i,j}$, либо пересекают её трансверсально. Следовательно, матрица системы (1.3) имеет диагональное преобладание.

Чтобы решить систему (1.3), применим метод Качмажа, описанный в [15]. Выберем параметр релаксации $\omega = 0.35$, параметр $\varepsilon = 1,7 \times 10^{-5}$. На рисунке 1.2 в среднем ряду показаны результаты вычислений после четырёх итераций. Первая картинка в среднем ряду представляет результат восстановления по точным данным $G_{i,j}$. Вторая — по зашумлённым. В нижнем ряду показан оригинал.

Можно видеть, что при восстановлении по точным данным по системе пикселей Паламодова получаются менее резкие артефакты по сравнению с результатами восстановления при помощи непосредственной дискретизации. Результат восстановления по зашумлённым данным выглядит менее осциллирующим и более близким к оригиналу.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО НЕПОЛНОМУ НАБОРУ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ПУТЁМ СВЕДЕНИЯ ЗАДАЧИ К ОБРАЩЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

2.1. МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ И ОБРАТНОЙ ПРОЕКЦИИ — I

Задача о восстановлении функции по неполному набору сферических средних эквивалентна задаче обращения преобразования Радона с неполным угловым диапазоном. Пусть $H_e \subset H$ — полукруг, $H_e = \{x_1^2 + x_2^2 < e^2, x_2 > 0\}$, $0 < e < 1$. Обозначим через $P_e \subset \mathbb{R}^2$ область, ограниченную ветвью гиперболы

$$\{y_2^2 - y_1^2 = 1, y_2 > 0\} \quad (2.1)$$

и прямой $\{y_2 = (1 + e^2)/(1 - e^2)\}$. Перепишем теорему из [11] в следующей форме:

Теорема 2.1 (ср. [11]). Пусть $f(x)$ и $g(y)$ суть две функции, сосредоточенные в H_e и P_e соответственно. Следующие соотношения эквивалентны:

$$f(x) = \frac{4x_2}{(1 - x^2)^2} g\left(\frac{2x_2}{1 - x^2}, \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right), \quad (2.2)$$

$$\mathbb{R}g(\omega, p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2}} \mathbb{M}f\left(-\frac{\omega_2}{p + \omega_2}, \frac{\sqrt{p^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2}}{|p + \omega_2|}\right), \quad (2.3)$$

где преобразование Радона определено следующим образом:

$$\mathbb{R}g(\omega, p) = \int_{\langle \omega, y \rangle = p} g(y) ds, \quad (2.4)$$

ds — евклидов элемент длины дуги на гиперплоскости $\langle \omega, y \rangle = p$, в рассматриваемом случае являющейся прямой $\{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = p\}$, ω — единичный вектор нормали к $\langle \omega, y \rangle = p$, то есть $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$.

Эта теорема основана на отображении

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{2x_2}{1 - x^2}, \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right), \quad (2.5)$$

которое отображает дуги в прямые, сегмент $[-1, 1] \subset \{x_2 = 0\}$ в гиперболу (2.1). В частности, дуга $\{|x| = e\}$ отображается на прямую $\{y_2 = (1 + e^2)/(1 - e^2)\}$. Все дуги, содержащиеся внутри H , и, следовательно, дважды пересекающие сегмент $[-1, 1]$, переходят в прямые, которые дважды пересекают гиперболу (2.1).

Для восстановления функции f следует вычислить преобразование Радона Rg по формуле (2.3). Затем, с помощью любой стандартной процедуры восстановить функцию g , и по формуле (2.2) вычислить функцию f .

Мы рассмотрим алгоритм свёртки и обратной проекции для стандартной параллельной геометрии (см. [15]). Для этого алгоритма требуется знать значения Rg в точках (ω^j, s_l) , $j = 1, \dots, P$, $l = -Q, \dots, Q$, где $\omega^j = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$, $\varphi_j = \pi(j-1)/P$, $s_l = l/Q$.

Для выбора параметров P и Q в этом алгоритме, т. е. числа углов и отсчётов, заметим, что $Rg(\omega, p)$ известно только для тех прямых, которые дважды пересекают верхнюю ветвь гиперболы (2.1), т. е. для $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$. Следовательно, известна ровно половина всех данных. Это приводит нас к следующему соотношению:

$$P(2Q + 1) = N(N + 1)$$

С другой стороны, используя результаты анализа, проведённого в [15], имеем соотношение оптимальности для параметров:

$$P = \pi Q \quad (2.6)$$

Решая приближённо эти два уравнения, получаем:

$$Q \approx \sqrt{N(N+1)/(2\pi)}, \quad P \approx \sqrt{\pi N(N+1)/2} \quad (2.7)$$

В нашем случае ($N = 128$), мы имеем $P = 161$, $Q = 51$.

Восстанавливаемая функция должна быть сосредоточена внутри единичного круга. Поэтому перед применением алгоритма свёртки и обратной проекции отобразим область P_e в единичный круг с помощью аффинно-линейного преобразования:

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1/R_e, (y_2 - C_e)/R_e), \quad (2.8)$$

где

$$C_e = 2e^2/(1 - e^2) \quad (2.9)$$

— “центр” P_e ,

$$R_e = \sqrt{2(1 + e^4)/(1 - e^2)} \quad (2.10)$$

— расстояние от C_e до наиболее удалённой точки границы ∂P_e . Это означает, что вместо $g(y)$ мы рассматриваем функцию $g_1(y) = g(y_1 R_e, y_2 R_e + C_e)$. Из свойств преобразования Радона [15] известно, что

$$Rg_1(\omega, p) = R_e^{-1} Rg(\omega, pR_e + C_e \omega_2).$$

Рассматриваемое дискретное множество дуг не отображается на множество параллельных прямых. Для того, чтобы вычислить преобразование Радона по формуле (2.3) мы используем линейную по каждому аргументу интерполяцию (ср. [18]). Все неизвестные данные полагаем равными нулю.

Объединяя наши рассуждения со стандартным алгоритмом свёртки и обратной проекции [15], получаем следующий алгоритм:

Алгоритм 2.2.

Шаг 1. Вычисляем P и Q по формулам (2.7), R_e — по формуле (2.10), C_e — по (2.9).

Шаг 2. Для $j = 1, \dots, P$, $l = -Q, \dots, Q$, вычисляем интерполированное преобразование Радона

$$R_{j,l} = \frac{N^2}{4R_e \sqrt{p^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2}} \times \\ \times \left(G_{k,i}(x_k - a_{k+1})(x_i - a_{i+1}) - G_{k,i+1}(x_k - a_{k+1})(x_i - a_i) \right. \\ \left. - G_{k+1,i}(x_k - a_k)(x_l - a_{i+1}) + G_{k+1,i+1}(x_k - a_k)(x_i - a_i) \right),$$

где $\omega_1 = \cos \varphi_j$, $\omega_2 = \sin \varphi_j$, $\varphi_j = \pi(j-1)/P$, $p = R_e l/Q + C_e \omega_2$,

$$x_k = -\frac{\omega_1}{p + \omega_2} - \frac{\sqrt{p^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2}}{|p + \omega_2|}, \\ x_i = -\frac{\omega_1}{p + \omega_2} + \frac{\sqrt{p^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2}}{|p + \omega_2|},$$

a_k определено в (1.1). Целые числа k и i выбраны так, чтобы $a_k \leq x_k < a_{k+1}$, $a_i \leq x_i < a_{i+1}$:

$$k = [(x_k + 1)/(2N)], \quad i = [(x_i + 1)/(2N)].$$

Если $p + \omega_2 = 0$, дуга не пересекает H_e , поэтому мы полагаем $R_{i,j} = 0$. Если k или i не принадлежат сегменту $[0, N]$ (данные неизвестны), мы предполагаем, что $G_{k,i} = 0$.

Шаг 3 (ср. [15]). Для $j = 1, \dots, p$ вычисляем свёртки

$$v_{j,k} = 1/Q \sum_{l=-Q}^Q w(k-l) R_{j,l}, \quad k = -l, \dots, l,$$

где $w(l)$ — фильтр. Мы используем фильтр Шеппа-Логана [28]:

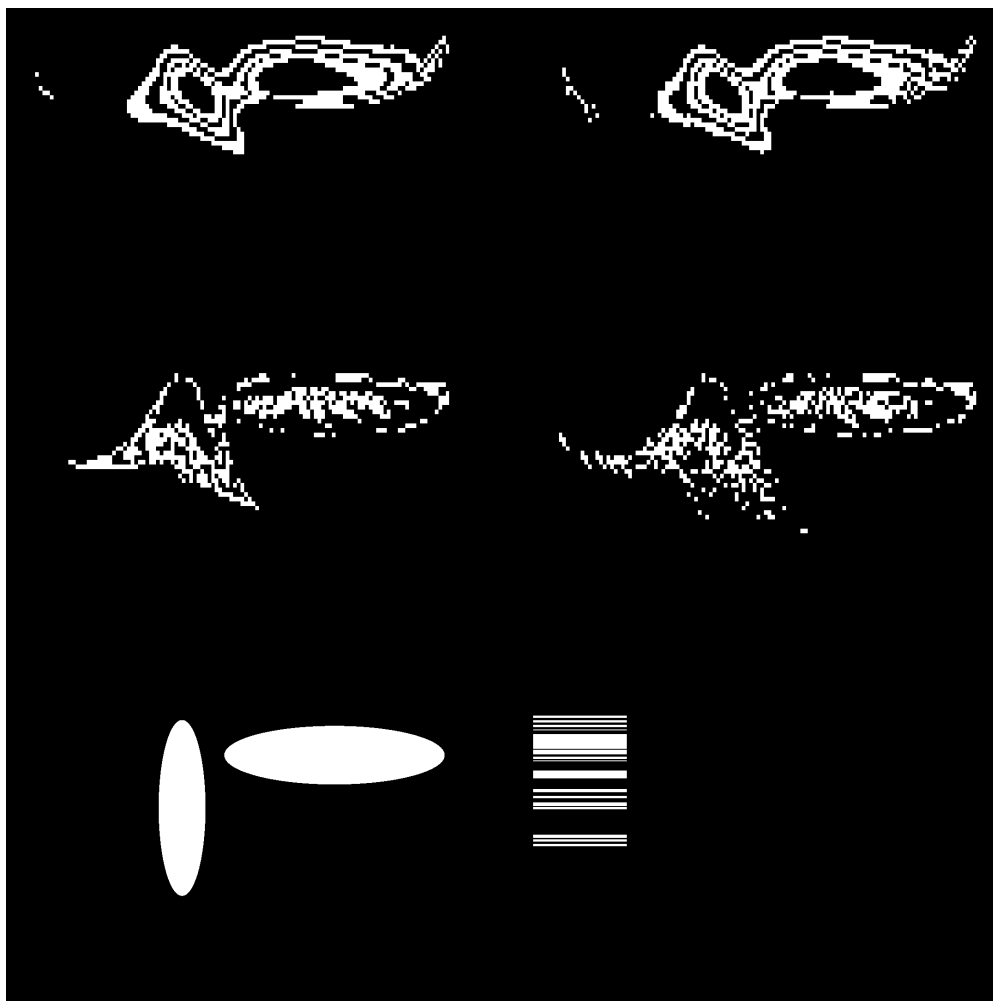
$$w(l) = \frac{Q^2}{\pi^2(1 - 4l^2)}. \quad (2.11)$$

Шаг 4 (ср. [15]). Для точек $x \in H_e$ вычисляем дискретную обратную проекцию

$$f_{FBI}(x) = \frac{4x_2}{(1-x^2)^2} \frac{2\pi}{P} \sum_{j=1}^P ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}),$$

Рисунок 2.1

Восстановление функции с помощью сведения задачи к обращению преобразования Радона. Верхний ряд — первый способ (раздел 2.1), средний ряд — второй способ (раздел 2.2). Нижний ряд — оригинал



где k и u для каждой пары x и j получаются из следующих соотношений:

$$p = \frac{2x_2 \cos \varphi_j}{1 - x^2} + \frac{(1 + x^2) \sin \varphi_j}{1 - x^2}, \quad k \leq Qp < k + 1, \quad u = Qp - k.$$

В верхнем ряду на рисунке 2.1 представлены результаты численного восстановления внутри H_e для $e = 0.8$. На первой картинке в верхнем ряду показаны результаты восстановления по точным данным $G_{i,j}$, на втором — по зашумлённым данным. В нижнем ряду показан оригинал.

Восстановление выглядит менее детализированным, чем восстановление по алгебраическим алгоритмам. Однако, в нём менее выражены артефакты и видна большая устойчивость: между восстановлением по точным и

зашумлённым данным практически нет никакой разницы. Другим преимуществом алгоритма является то, что он гораздо быстрее алгебраических.

2.2. МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ И ОБРАТНОЙ ПРОЕКЦИИ — II

Преобразование (2.5) является композицией двух отображений. Одно из них отображает H в единичный круг и дуги окружностей с центрами на $\{x_2 = 0\}$ — на хорды. Второе — проективное преобразование, которое сводит обращение к задаче с неполным угловым диапазоном (ср. [11]). В этом параграфе мы рассмотрим только первое отображение:

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{2x_1}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \right). \quad (2.12)$$

Это отображение переводит H на полудиск $B = \{y_1^2 + y_2^2 < 1, y_2 > 0\}$. Диаметр $[-1, 1] \subset \{x_2 = 0\}$ H отображается на верхнюю дугу $[-1, 1] \subset \partial B$. Таким образом, восстановление сводится к обращению преобразования Радона по данным, известным для всех прямых, дважды пересекающих верхнюю дугу. Это разновидность внешней задачи для преобразования Радона.

Теорема 2.3 (ср. [17], [11]). *Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — две функции, сосредоточенные в H и B соответственно. Следующие соотношения эквивалентны:*

$$f(x) = \frac{4x_2}{(1+x^2)^2} g\left(\frac{2x_2}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad (2.13)$$

$$\mathbb{R} g(\omega, p) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \mathbb{M} f\left(\frac{\omega_1}{p+\omega_2}, \frac{\sqrt{1-p^2}}{|p+\omega_2|}\right). \quad (2.14)$$

Как и в предыдущем разделе, для восстановления функции f следует вычислить преобразование Радона $\mathbb{R} g$ по формуле (2.14), затем с помощью любого стандартного алгоритма восстановить функцию g , и, наконец, по формуле (2.13) вычислить функцию f .

Снова рассмотрим алгоритм свёртки и обратной проекции для стандартно параллельной схемы [15]. Так как носитель g принадлежит единичному кругу, никаких линейных преобразований типа (2.8) не требуется.

Как и в предыдущем разделе, дискретное множество заданных дуг не отображается на семейство параллельных прямых. Для того, чтобы вычислить преобразование Радона по формуле (2.14), применяем линейную по каждому аргументу интерполяцию. Все неизвестные данные полагаем равными нулю.

Параметры P и Q параллельной геометрии, т. е. число углов и отсчётов, вычисляем по формулам (2.7).

Объединяя приведённые соображения с алгоритмом свёртки и обратной проекции [15], получаем следующий алгоритм, (ср. с алгоритмом 2.2):

Алгоритм 2.4.

Шаг 1. Вычисляем P и Q по формулам (2.7).

Шаг 2. Для $j = 1, \dots, P$, $l = -Q, \dots, Q$, вычисляем интерполированное преобразование Радона

$$R_{j,l} = \frac{N^2}{4\sqrt{1-p^2}} \left(G_{k,i}(x_k - a_{k+1})(x_i - a_{i+1}) - G_{k,i+1}(x_k - a_{k+1})(x_i - a_i) \right. \\ \left. - G_{k+1,i}(x_k - a_k)(x_i - a_{i+1}) + G_{k+1,i+1}(x_k - a_k)(x_i - a_i) \right),$$

где $\omega_1 = \cos \varphi_j$, $\omega_2 = \sin \varphi_j$, $\varphi_j = \pi(j-1)/P$, $p = l/Q$,

$$x_k = \frac{\omega_1}{p + \omega_2} - \frac{\sqrt{1-p^2}}{|p + \omega_2|}, \\ x_i = \frac{\omega_1}{p + \omega_2} + \frac{\sqrt{1-p^2}}{|p + \omega_2|},$$

a_k определены в (1.1). Целые числа k и i выбираются так, чтобы $a_k \leq x_k < a_{k+1}$, $a_i \leq x_i < a_{i+1}$:

$$k = [(x_k + 1)/(2N)], \quad i = [(x_i + 1)/(2N)].$$

Если $p + \omega_2 = 0$, дуга не пересекает H , поэтому мы полагаем $R_{i,j} = 0$. Если k или i не попадают в промежуток $[0, N]$ (данные неизвестны), мы считаем, что $G_{k,i} = 0$.

Шаг 3 (ср. [15]). Для $j = 1, \dots, p$ вычисляем свёртки

$$v_{j,k} = 1/Q \sum_{l=-Q}^Q w(k-l) R_{j,l}, \quad k = -l, \dots, l,$$

где $w(l)$ — фильтр. Мы используем фильтр Шеппа-Логана (2.11).

Шаг 4 (ср. [15]). Для всех точек $x \in H$ вычисляем дискретную обратную проекцию:

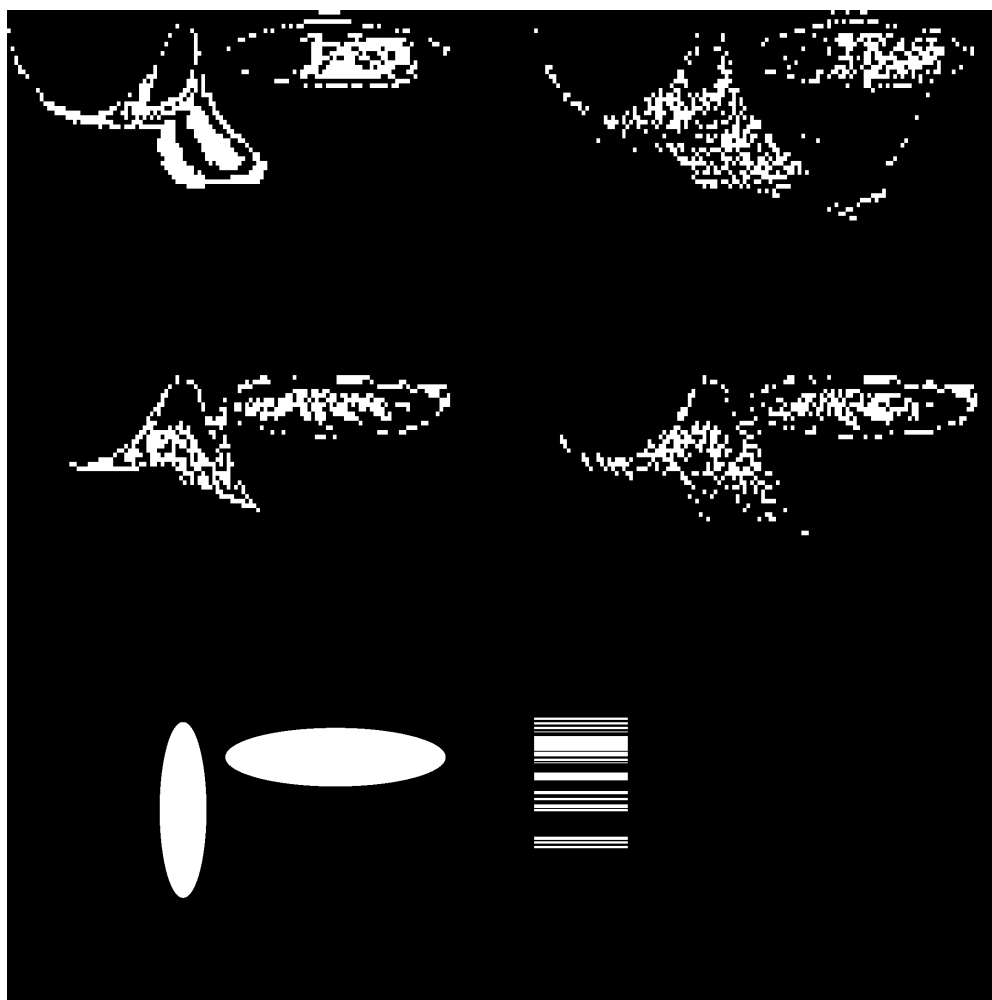
$$f_{FBI}(x) = \frac{4x_2}{(1+x^2)^2} \frac{2\pi}{P} \sum_{j=1}^P ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}),$$

где k и u для каждой пары x и j получаются из следующих соотношений:

$$p = \frac{2x_2 \cos \varphi_j}{1+x^2} + \frac{(1-x^2) \sin \varphi_j}{1+x^2}, \quad k \leq Qp < k+1, \quad u = Qp - k.$$

Рисунок 2.2

Восстановление функции с помощью алгебраического алгоритма, основанного на системе пикселей Паламодова (верхний ряд) и сведения задачи к обращению преобразования Радона, второй способ (средний ряд)



Во втором ряду рисунка 2.1 представлены результаты численного восстановления. На первой картинке в верхнем ряду показаны результаты восстановления по точным данным $G_{i,j}$, на втором — по зашумлённым данным. В нижнем ряду показан оригинал.

По сравнению с алгоритмом 2.2 восстановление выглядит более детализированным.

По сравнению с алгебраическими алгоритмами алгоритмы, представленные в этом разделе имеют гораздо большую скорость. Качество восстановления и устойчивость сравнимы с алгебраическим алгоритмом восстановления по системе пикселей Паламодова. (см. рисунок 2.2)

3. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ПО ДАННЫМ С НЕПОЛНЫМ УГЛОВЫМ ДИАПАЗОНОМ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку метод решения исходной задачи, описанный в разделе 2.1 приводит к обращению преобразования Радона по данным с неполным угловым диапазоном, остановимся в настоящем разделе на этой задаче.

Пусть $f(x) \in L^2_R(\mathbb{R}^n)$ — квадратично суммируемая функция с носителем, заключённым внутри шара $\{|x| \leq R\}$. Определим преобразование Радона формулой (2.4), продолжив по однородности на все значения (ω, p) :

$$\mathbb{R} f(t\omega, tp) = |t|^{-1} \mathbb{R} f(\omega, p). \quad (3.1)$$

Рассмотрим задачу о восстановлении $f(x)$ по $\mathbb{R} f(\omega, p)$, известному для всех $p \in \mathbb{R}^n$ и ω , пробегающим открытое подмножество Ω единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} .

Самый простой подход к решению поставленной задачи — считать все неизвестные данные нулём и применять стандартные алгоритмы обращения преобразования Радона. При таком подходе часть информации теряется, что приводит к появлению артефактов. Для того, чтобы уменьшить артефакты, разрабатываются различные алгоритмы пополнения данных: см., например, [15], [29], [30], [31]. В настоящем разделе разработан алгоритм, основанный на явной интегральной формуле интерполяции целой функции экспоненциального типа, полученной в работе [13]. Анализ, проведённый в работах [13] и [14], показывает, что эта формула является оптимальной по отношению к усилению случайных ошибок в данных.

Описываемый метод заключается в следующем. Во-первых, используя связь преобразований Радона и Фурье [15], по известному $\mathbb{R} f(\omega, p)$ восстанавливаем преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(s \cdot \omega) = \int e^{-ips} \mathbb{R} f(\omega, p) dp. \quad (3.2)$$

С учётом того, что $\mathbb{R} f(\omega, p)$ известно для $(\omega, p) \in \Omega \times \mathbb{R}$, преобразование Фурье $\tilde{f}(\xi)$ оказывается известным в конусе $\xi \in \Omega \cdot \mathbb{R}$. Восстановив $\tilde{f}(\xi)$ в неизвестной области, можно обратить преобразование Фурье (3.2) и восстановить преобразование Радона для всех значений параметров:

$$\mathbb{R} f(\omega, p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ips} \tilde{f}(s \cdot \omega) ds.$$

Значения исходной функции восстанавливаются с помощью обращения преобразования Радона.

3.2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

Рассмотрим двумерный случай. Без ограничения общности считаем, что $\Omega = \{|\omega_2| > \lambda|\omega_1|\}$, где $\lambda > 0$ — некоторая константа. Тогда в неизвестном конусе $\{\xi_2 < \lambda|\xi_1|\}$ преобразование Фурье восстанавливается по формуле (см. [13]):

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\pi} e^{R\sqrt{\rho^2 - \xi_2^2}} \int_{|\eta| > \rho} \frac{\sin R\sqrt{\eta^2 - \rho^2}}{|\eta - \xi_2|} \tilde{f}(\xi_1, \eta) d\eta, \quad (3.3)$$

где $\rho = \lambda|\xi_1|$.

Для разработки численного алгоритма заметим, что в стандартном алгоритме свёртки и обратной проекции (см. [15]) одним из шагов является фильтрация, эквивалентная домножению преобразования Фурье на характеристическую функцию шара $\{|\xi| \leq \Lambda\}$, где $\Lambda > 0$ — уровень фильтрации. Определим фильтрованное преобразование Радона

$$\mathbf{R}_\Lambda(\omega, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{ips} \tilde{f}(s \cdot \omega) ds. \quad (3.4)$$

Таким образом, в стандартном алгоритме свёртки и обратной проекции можно $\mathbf{R}f$ заменить на $\mathbf{R}_\Lambda f$. Для восстановления $\mathbf{R}_\Lambda f$ при $|\omega_2| < \lambda|\omega_1|$ подставим (3.3) в (3.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Lambda f(\omega, p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{ips} e^{R\sqrt{(\lambda s|\omega_1|)^2 - s^2\omega_2^2}} \times \\ &\quad \times \int_{|\eta| > s\lambda|\omega_1|} \frac{\sin R\sqrt{\eta^2 - (\lambda s|\omega_1|)^2}}{|\eta - s\omega_2|} \tilde{f}(s\omega_1, \eta) d\eta ds. \end{aligned}$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $\eta = s\tau$, затем, подставив в получившееся равенство (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Lambda f(\omega, p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \int_{|\tau| > \rho} e^{isp} e^{R|s|\sqrt{\rho^2 - \omega_2^2}} \frac{\sin R|s|\sqrt{\tau^2 - \rho^2}}{|\tau - \omega_2|} \tilde{f}(s\omega_1, s\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \int_{|\tau| > \rho} e^{isp} e^{R|s|\gamma} \frac{\sin R|s|\sqrt{\tau^2 - \rho^2}}{|\tau - \omega_2|} \int_{-R}^R \mathbf{R}f((\omega_1, \tau), u) e^{-ius} dud\tau ds, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\rho = \lambda|\omega_1|, \quad \gamma = \sqrt{\rho^2 - \omega_2^2}. \quad (3.5)$$

Заменим теперь $\tau = p - R\alpha$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Lambda f(\omega, p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \int_{|\tau| > \rho} \int \frac{e^{isR\alpha} e^{R|s\gamma|} \sin R|s| \sqrt{\tau^2 - R\alpha}}{|\tau - \omega_2|} \times \\ &\quad \times \mathbf{R} f((\omega_1, \tau), p - R\alpha) R d\alpha d\tau ds = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{|\tau| > \rho} \int \frac{E_N(\alpha, \sqrt{\tau^2 - \rho^2}, \gamma) \mathbf{R} f((\omega_1, \tau), p - R\alpha)}{|\tau - \omega_1|} d\alpha d\tau, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где ядро $E_N(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть вычислено явно:

$$\begin{aligned} E_N(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{isR\alpha + R\gamma|s|} \sin R|s| \beta ds = \\ &= \int_0^N e^{is\alpha + \gamma s} \sin s\beta ds - \int_{-N}^0 e^{is\alpha - \gamma s} \sin s\beta ds, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $N = R\Lambda$ — безразмерный коэффициент, характеризующий детальность восстановления. Вычисляя элементарные интегралы в (3.7), получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} E_N(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{\gamma N} \left(\frac{\gamma \sin N(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) \cos N(\alpha + \beta)}{\gamma^2 + (\alpha + \beta)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma \sin N(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \cos N(\alpha - \beta)}{\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2} \right) + \\ &\quad + 2\beta \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2}{(\gamma^2 + (\alpha + \beta)^2)(\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заменив в последнем интеграле в (3.6) $\sqrt{\tau^2 - \rho^2}$ на β и рассматривая отдельно интегралы по промежуткам, соответствующим отрицательным и положительным значениям τ , получим после элементарных преобразований формулу для интерполяции:

Теорема 3.1. Пусть $f \in L_R^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда фильтрованное преобразование Радона (3.4) в области $\{|\omega_2| < \lambda|\omega_1\}$ может быть восстановлено по известным значениям преобразования Радона в $\{|\omega_2| > \lambda|\omega_1\}$ при помощи следующей формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Lambda f(\omega, p) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\beta E_N(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\mathbf{R} f((\omega_1, \sqrt{\rho^2 + \beta^2}), p - R\alpha)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2} - \omega_2} + \frac{\mathbf{R} f((\omega_1, -\sqrt{\rho^2 + \beta^2}), p - R\alpha)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2} + \omega_2} \right) d\alpha, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где ρ и γ определены в (3.5), а $E_N(\alpha, \beta, \gamma)$ — в (3.8).

3.3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для разработки численного алгоритма пополнения данных разобьём интеграл (3.9) в сумму пяти слагаемых:

$$\mathbf{R}_\Lambda f(\omega, p) = I_{No} + I_{Sp} - I_{Sm} + I_{Cp} - I_{Cm},$$

где

$$I_{No} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}(\gamma^2 + (\alpha + \beta)^2)(\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2)} G(\alpha, \beta) d\alpha \quad (3.10)$$

— неосциллирующая часть, остальные слагаемые имеют осциллирующий множитель под интегралом:

$$I_{Sp} = \frac{\gamma e^{N\gamma}}{2\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\sin N(\alpha + \beta)}{\gamma^2 + (\alpha + \beta)^2} \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} G(\alpha, \beta) d\alpha, \quad (3.11)$$

$$I_{Sm} = \frac{\gamma e^{N\gamma}}{2\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\sin N(\alpha - \beta)}{\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2} \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} G(\alpha, \beta) d\alpha, \quad (3.12)$$

$$I_{Cp} = \frac{e^{N\gamma}}{2\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\cos N(\alpha + \beta)}{\gamma^2 + (\alpha + \beta)^2} \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} G(\alpha, \beta) d\alpha, \quad (3.13)$$

$$I_{Cm} = \frac{e^{N\gamma}}{2\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int \frac{\cos N(\alpha - \beta)}{\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2} \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} G(\alpha, \beta) d\alpha. \quad (3.14)$$

В формулах (3.10)–(3.14) было использовано обозначение

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\mathbf{R} f((\omega_1, \sqrt{\rho^2 + \beta^2}), p - R\alpha)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2} - \omega_2} + \frac{\mathbf{R} f((\omega_1, -\sqrt{\rho^2 + \beta^2}), p - R\alpha)}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2} + \omega_2}.$$

Вычислим интегралы (3.10)–(3.14) как повторные, применяя квадратурные формулы первого порядка. Для вычисления внутреннего интеграла заметим, что в силу финитности функции f , при $|p - R\alpha| > \sqrt{\omega_1^2 + \rho^2 + \beta^2}$ соответствующая прямая не пересекает носитель f , и $G(\alpha, \beta) = 0$. Таким образом, во внутренних интегралах в (3.10)–(3.14) интегрирование фактически ведётся по промежутку $[A_-, A_+]$, где

$$A_\pm = \frac{p \pm \sqrt{\omega_1^2 + \rho^2 + \beta^2}}{R}. \quad (3.15)$$

Для построения квадратурной формулы для неосциллирующего интеграла (3.10) применим формулу трапеций (подынтегральное выражение обозначено через $F(\alpha, \beta)$):

$$I_{No} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\beta \int_{A_-}^{A_+} F(\alpha, \beta) d\alpha \approx \frac{1}{\pi^2} \int_0^B d\beta \int_{A_-}^{A_+} F(\alpha, \beta) d\alpha = \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^B d\beta \Phi(\beta) \approx \frac{h_B}{\pi^2} \left(\frac{\Phi(0) + \Phi(B)}{2} + \sum_{i=1}^{N_B-1} \Phi(B_i) \right), \quad (3.17)$$

где $B_i = h_B i$, $h_B = B/N_B$, $\Phi(\beta)$ — значение внутреннего интеграла в (3.16):

$$\Phi(\beta) = \int_{A_-}^{A_+} F(\alpha, \beta) d\alpha \approx h_\alpha \left(\frac{F(A_-, \beta) + F(A_+, \beta)}{2} + \sum_{j=1}^{N_A-1} F(A_j, \beta) \right), \quad (3.18)$$

где, в свою очередь, $A_j + j h_\alpha$, $h_\alpha = (A_+ - A_-)/2 = 2\sqrt{\omega_1^2 + \rho^2 + \beta^2}/(RN_A)$.

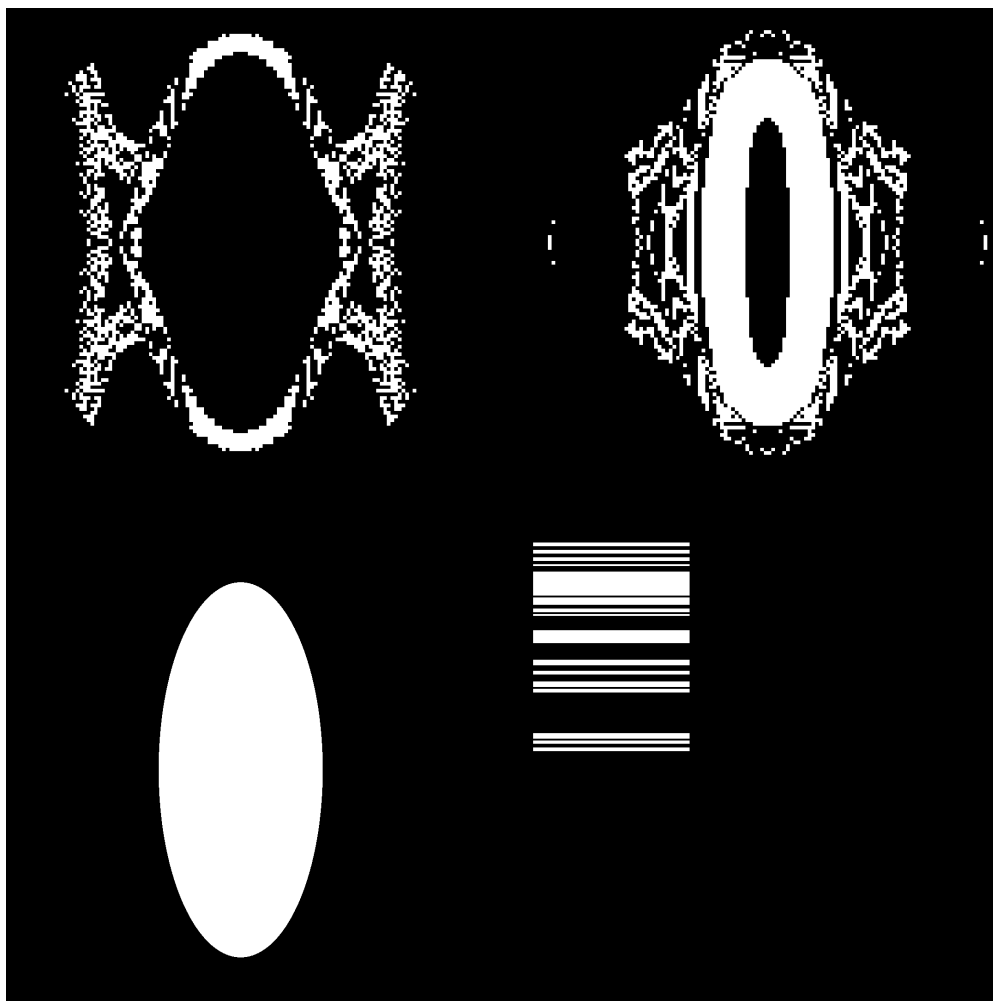
Параметр B в формуле (3.17) следует выбирать, исходя из предполагаемой точности вычислений. Поскольку подынтегральное выражение в (3.10) с ростом β убывает со скоростью, пропорциональной β^{-3} (так как $G(\alpha, \beta)$ в силу однородности преобразования Радона (3.1) имеет порядок убывания β^{-2}), то для достижения точности порядка ε разумно B взять порядка $\sqrt[3]{\varepsilon}$. Для параметров N_B и N_A формул (3.18) и (3.17) (количества узлов) одно соотношение можно получить, исходя из N_R — количества известных значений Rf : $N_A N_B = N_R$. Другое соотношение получается из требования того, чтобы количество узлов было пропорционально длине соответствующего отрезка интегрирования.

Аналогично строятся квадратурные формулы и для осциллирующих интегралов (3.11)–(3.14). Однако, в силу осцилляции, для повышения точности вместо формулы трапеций мы используем квадратурные формулы первого порядка, получающиеся, если синус и косинус рассматривать как весовые функции (ср. [32]):

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) \sin Nx dx &\approx f(a) \left(\frac{\cos Na}{N} - \frac{\cos N(a+h/2) \sin h/2}{N} \frac{1}{Nh/2} \right) + \\ &+ f(b) \left(-\frac{\cos Nb}{N} + \frac{\cos N(b-h/2) \sin h/2}{N} \frac{1}{Nh/2} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \sin Nx_i \frac{\sin Nh/2}{Nh/2} \frac{\sin Nh/2}{N/2}, \end{aligned}$$

Рисунок 3.1

Восстановление функции по неполным в угловом диапазоне данным. Вверху слева неизвестные интегралы считаются равными нулю. Вверху справа восстановление по пополненным данным. Внизу — оригинал



$$\int_b^a f(x) \cos Nx \, dx \approx f(a) \left(-\frac{\sin Na}{N} + \frac{\sin N(a + h/2)}{N} \frac{\sin h/2}{Nh/2} \right) +$$

$$+ f(b) \left(\frac{\sin Nb}{N} - \frac{\sin N(b - h/2)}{N} \frac{\sin h/2}{Nh/2} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \cos Nx_i \frac{\sin Nh/2}{Nh/2} \frac{\sin Nh/2}{N/2}.$$

В обеих формулах n — количество узлов, $h = (b - a)/N$.

Для того, чтобы оценить возможности процедуры пополнения данных, рассмотрим восстановление объекта, изображённого на рисунке 3.1 внизу, по интегралам по прямым, составляющим с горизонтальной осью углы ме-

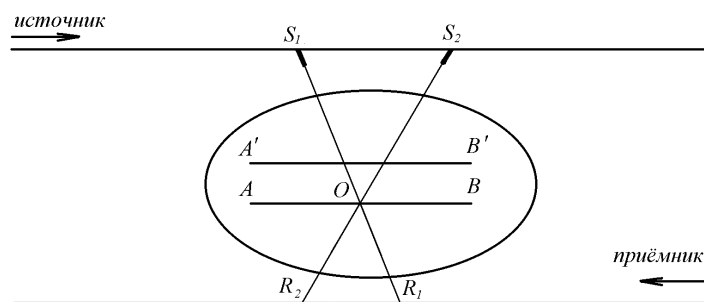
нее 75° . Мы выбрали в этом диапазоне 210 равномерно распределённых направлений и вычислили по каждому из них 134 линейных интеграла. На рисунке 3.1 вверху слева показано восстановление по неполным данным с помощью алгоритма свёртки и обратной проекции, неизвестные интегралы полагаем равными нулю. Вверху справа — результат применения того же алгоритма к пополнению данных. Использование процедуры пополнения приводит к ослаблению сильных артефактов вне объекта. Отметим также существенное увеличение точности восстановления внутри цилиндрического кольца вблизи верхней и нижней вершин.

4. О МНОГОСЛОЙНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Первый томографический аппарат с линейным движением системы был предложен в 1936 году, см. [33]. Принцип формирования томографического изображения (ср. [18], [19]) заключается в следующем (см. рис. 4.1).

Рисунок 4.1

Принцип продольной линейной томографии



Источник рентгеновского излучения и приёмник, которым может служить обычная рентгеновская плёнка, движутся навстречу друг другу по параллельным прямым. Скорости их движения подобраны так, чтобы луч, проходящий через определённую точку, например, O на прямой AB в каждый момент времени проецировался в одну и ту же точку приёмника. Оказывается, в этом случае такое свойство будет выполнено для всех точек прямой AB и только для них. Таким образом, на плёнке-приёмнике происходит суммирование тени, создаваемой сечением AB исследуемого тела, в то время, как тень от других точек будет „размазываться“.

В последнее время получили распространение приборы, в которых чувствительная плёнка заменена на пластинку датчиков, которые измеряют интенсивность падающего излучения. Полученные данные затем обрабатываются с помощью компьютера (усредняются).

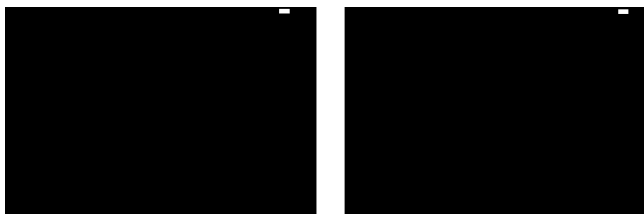
В этом случае можно за счёт компьютерной обработки данных получить томографическое изображение среза, отличного от AB , например, $A'B'$. Для этого достаточно для каждой точки $A'B'$ усреднить тени, порождаемые только теми лучами, которые проходят через эту точку в разные моменты времени. Эти лучи, в отличие от случая томографии слоя AB , будут фиксироваться разными датчиками.

Можно также воспользоваться лучами, проходящими вблизи точки, применив линейную интерполяцию по каждому из двух параметров: положения источника и координаты приёмника, который фиксирует луч. За-

метим, что аналогичные соображения использовались в [18] при переходе от веерной схемы сканирования к параллельной.

Рисунок 4.2

Томограмма осевого сечения цилиндра



Для численных экспериментов рассматривалась модельная функция, равная единице внутри цилиндра и нулю вне его. На рисунке 4.2 приведены томограммы осевого сечения цилиндра.

Результаты экспериментов подтверждают то, что по построенным алгоритмам можно получить приелимое изображение не только в том слое, на который настроен рентгеновский аппарат, но и соседних слоях.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ЧАСТИ ФУНКЦИИ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ В МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ квадратично-интегрируемая функция, представляемая в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R e^{i\langle x, y \rangle} F(y) dy \quad (5.1)$$

по ограниченной области $R \subset \mathbb{R}^n$. Здесь $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Как известно, в силу теоремы Пэли-Винера $f(x)$ продолжается до целой функции в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что $f(x)$ известна вне открытой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим *задачу интерполяции*: восстановить значения $f(x)$, $x \in \Lambda$ по $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda}$.

Мы рассматриваем эту задачу в связи с обращением сферического преобразования и преобразования Радона по неполным данным (ср. [13], [11], [17]). Аналогичная задача возникает также в теории передачи информации, радиоэлектронике, оптике, см. [34], [35].

Так как (5.1) — целая функция, задача интерполяции имеет единственное решение, которое может быть найдено одним из известных методов. Однако, любой алгоритм восстановления необходимо имеет экспоненциальный коэффициент усиления шума ([13], [14], [11]), что делает неустойчивым любой практический алгоритм восстановления и ставит под сомнение достоверность результатов, полученных в результате процедуры, основанной на интерполяции.

Следуя [12], мы поставим задачу получить *устойчивую* процедуру, которая восстанавливает функцию \tilde{f} , близкую к оригиналу f .

Обозначим через \mathcal{B}_R пространство функций, представимых в виде (5.1) с $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$. По теореме Планшереля \mathcal{B}_R , снабжённое стандартным скалярным произведением, изометрично вложено в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для $f \in \mathcal{B}_R$ через $\|f\|_\Lambda$ обозначим часть энергии функции f в области Λ :

$$\|f\|_\Lambda^2 = \int_\Lambda |f(x)|^2 dx.$$

Примем следующее определение

Определение 5.1. $f \in \mathcal{B}_R$ называется функцией *устойчивого (неустойчивого) восстановления*, если

$$\|f\|_\Lambda \leq \|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \quad \left(\|f\|_\Lambda > \|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \right). \quad (5.2)$$

Оказывается, пространство всех функций с ограниченным спектром разлагается в прямую сумму двух подпространств: первое из которых состоит целиком из функций устойчивого восстановления, а второе — конечномерное — целиком из функций неустойчивого восстановления.

Теорема 5.2. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Имеет место следующее разложение:

$$\mathcal{B}_R = \mathcal{S}_\Lambda \oplus \mathcal{U}_\Lambda,$$

где все функции из \mathcal{S}_Λ устойчивого восстановления, а все функции из \mathcal{U}_Λ — неустойчивого, причём $\dim \mathcal{U}_\Lambda < \infty$.

Доказательство. Определим два проектора в $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ср. [21]). Первый — оператор обрезания носителя:

$$D : f(x) \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in \Lambda, \\ 0, & x \notin \Lambda. \end{cases} \quad (5.3)$$

Второй — оператор обрезания спектра:

$$B : f(x) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R e^{i\langle x, \xi \rangle} F(\xi) d\xi, \quad (5.4)$$

где $F(\xi)$ — преобразование Фурье $f(x)$.

По теореме Красичкова [36] существует система

$$\{\psi_i\}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.5)$$

вещественнозначных собственных функций оператора BD , которая обладает следующими свойствами:

1. Соответствующие собственные значения $\{\lambda_i\}$ вещественны, положительны и упорядочены следующим образом: $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_i \rightarrow 0$.
2. $\{\psi_i\}$ — полная система в \mathcal{B}_R .
3. $\{\psi_i\}$ — ортонормальна в $L^2(\mathbb{R}^n)$.
4. $\langle D\psi_i, \psi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \lambda_i, & i = j. \end{cases}$

Искомые подпространства следующие: $\mathcal{S}_\Lambda = l.h.\{\psi_i | \lambda_i \leq 1/2\}$, $\mathcal{U}_\Lambda = l.h.\{\psi_i | \lambda_i > 1/2\}$. $\mathcal{B}_R = \mathcal{S}_\Lambda \oplus \mathcal{U}_\Lambda$.

Из свойства 1 следует, что $\dim \mathcal{U} < \infty$.

Любая функция $f \in \mathcal{B}_R$ может быть разложена в ряд Фурье по системе $\{\psi_i\}$, $f = \sum_i \alpha_i \psi_i$, где $\alpha_i = \langle f, \psi_i \rangle$. Следовательно,

$$\|f\|^2 = \sum \alpha_i^2,$$

$$\|f\|_\Lambda^2 = \langle Df, f \rangle = \sum \alpha_i^2 \langle D\psi_i, \psi_i \rangle = \sum \lambda_i \alpha_i^2.$$

Аналогично

$$\|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda}^2 = \sum (1 - \lambda_i) \alpha_i^2.$$

Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\Lambda$

$$\|f\|_\Lambda^2 - \|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda}^2 = \sum_{\lambda_i > 1/2} (2\lambda_i - 1)\alpha_i^2 > 0,$$

следовательно, f — функция неустойчивого восстановления.

Точно также доказывается, что любая функция из \mathcal{S}_Λ — устойчивого восстановления. Теорема доказана.

Замечание 5.3. В одномерном случае функции (5.5) совпадают с системой вытянутых сфероидальных функций [21]. В высших размерностях мало известно о связи функций (5.5) с какими-либо известными специальными функциями (ср. [27]).

Система (5.5) позволяет нам предложить два метода для устойчивого восстановления части функции с ограниченным спектром.

Определение. Для функции $f \in \mathcal{B}_R$ под *устойчивой частью* f , обозначаемой f_S , подразумеваем ортогональную проекцию f на \mathcal{S}_Λ .

Теорема 5.4. Устойчивая часть $f \in \mathcal{B}_R$ может быть восстановлена по $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda}$ с помощью следующей формулы:

$$f_S = \sum_{\lambda_i \leq 1/2} \frac{a_i}{1 - \lambda_i} \psi_i,$$

где

$$a_i = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda} f \psi_i dx. \quad (5.6)$$

Эта теорема — немедленное следствие свойств функций (5.5).

Заметим, что неравенство (5.2) определяет конус в пространстве \mathcal{B}_R . Применение бесконечномерного правила множителей Лагранжа приводит к теореме, которая даёт формулу для восстановления *ближайшей* в L^2 -метрике устойчиво восстанавливаемой функции f_N (которая, вообще говоря, не совпадает с f_S).

Теорема 5.5. Ближайшая к $f \in \mathcal{B}_R$ устойчиво восстанавливаемая функция может быть определена по $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Lambda}$ с помощью следующей формулы:

$$f_N = \sum \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \tau(2\lambda_i - 1)} \psi_i,$$

где a_i определены в (5.6), а τ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sum \frac{(2\lambda_i - 1)\lambda_i^2 a_i^2}{(\lambda_i + \tau(2\lambda_i - 1))^2} = 0$$

6. О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы обсуждаем возможность вычисления собственных функций оператора BD (см. (5.3), (5.4)), играющих важную роль в задаче интерполяции. Оператор BD имеет интегральное представление (см. [36]):

$$BD: f(x) \mapsto \int_{\Lambda} K_R(x-y)f(y) dy,$$

где

$$K_R(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R e^{i\langle \xi, x-y \rangle} d\xi.$$

Таким образом, функции (5.5) и соответствующие собственные значения могут быть вычислены как решения однородного уравнения Фредгольма второго рода:

$$\lambda_k \psi_k(x) = \int_{\Lambda} K(x-y)\psi_k(y) dy. \quad (6.1)$$

Для решения интегрального уравнения (6.1) применим один из стандартных методов (ср. [37], [38]).

Заменим интеграл квадратурной формулой:

$$\int_{\Lambda} K(x-y)\psi(y) dy \approx \sum_{j=1}^n A_j K(x-x_j)\psi(x_j),$$

где n — количество узлов. Уравнение (6.1) сведётся к системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{i,j} Y_j = 0, \quad (6.2)$$

где $Y_i = \psi_k(x_i)$ — приближённые значения функции ψ_k в узлах x_i , а $K_{i,j} = K(x_i - x_j)$. Решив эту систему, найдём значения Y_1, Y_2, \dots, Y_n . В качестве аналитического выражения приближённого решения уравнения (6.1) примем функцию

$$Y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x-x_j) Y_j,$$

которая в узлах x_1, x_2, \dots, x_n принимает соответственно значения Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Система (6.2) имеет нетривиальное решение в том и только том случае, когда её определитель равен нулю. Решая характеристическое уравнение

этой системы, вообще говоря, степени n относительно λ , получим n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые будут приближёнными значениями первых n собственных значений ядра $K(x - y)$. Подставляя в однородную систему (6.2) одно из найденных значений λ_k и находя линейно независимые решения этой системы, получим приближения к линейно независимым собственным функциям ядра $K(x - y)$, соответствующим данному собственному значению.

Рисунок 6.1

Вытянутые сфероидальные функции $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ при $c = 1$

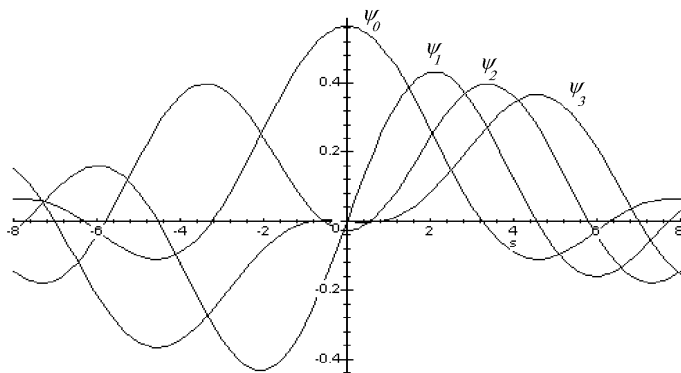


Рисунок 6.2

Вытянутые сфероидальные функции $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ при $c = 2$

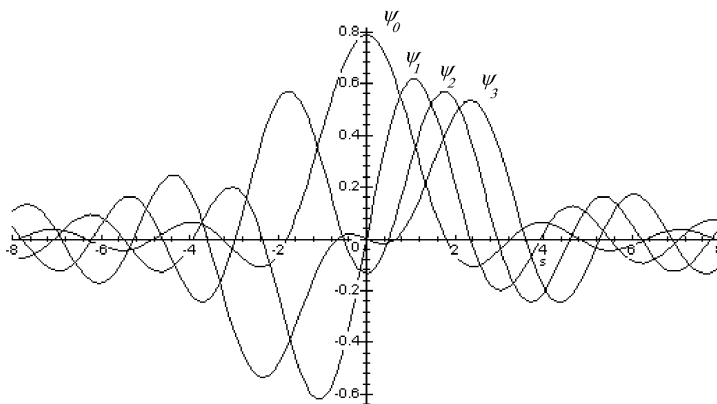


Рисунок 6.3

Вытянутые сфероидальные функции $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ при $c = 4$

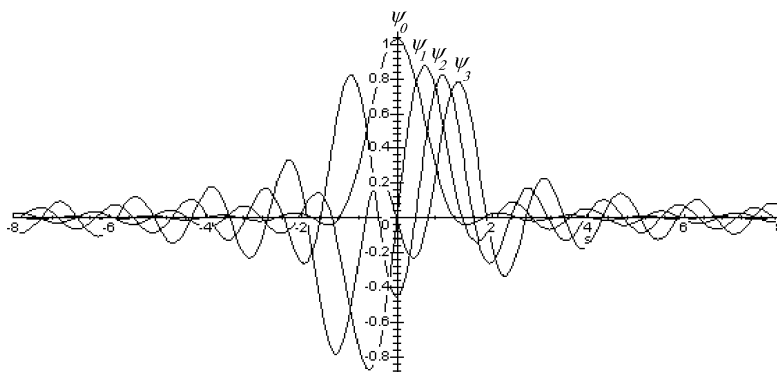
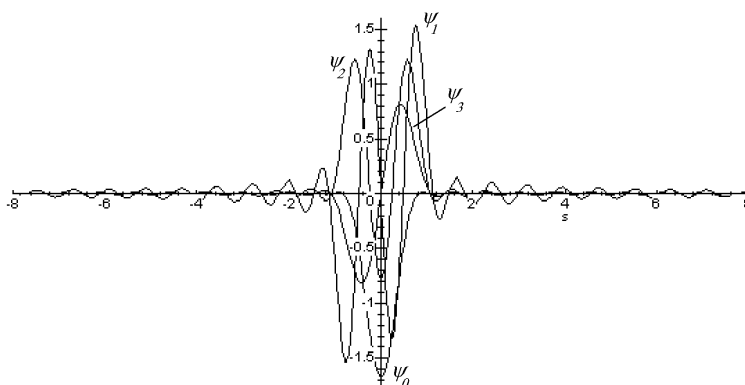


Рисунок 6.4

Вытянутые сфероидальные функции $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ при $c = 8$



Для того, чтобы оценить возможности предложенной процедуры, был проведён численный эксперимент для одномерного случая, когда области R и Λ суть отрезки вещественной прямой. В этом случае функции (5.5) совпадают с вытянутыми сфероидальными функциями [21], [20]. Уравнение (6.1) преобразуется к виду:

$$\psi(x) - \lambda\psi(x) \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)} dy = 0,$$

где параметр c определяется размерами областей-отрезков R и Λ . Для дис-

кретизации интеграла в (6.1) применялась квадратурная формула Симпсона.

На рисунках 6.1 – 6.4 представлены графики вытянутых сфероидальных функций при разных значениях параметров, вычисленные по предлагаемой методике. Сравнение аналогичными графиками из работы [21] и таблицами [39] показывает совпадение значений в пределах точности проводимых вычислений (10^{-4}).

Замечание 6.1. Предложенный метод численного вычисления вытянутых сфероидальных функции, по-видимому, применён впервые. Ср. [21], [22], [23], [24], [25], [26], где алгоритмы вычисления вытянутых сфероидальных функций опираются на разложение их в ряд по функциям Лагранжа либо на численное решение определяющего дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} \psi(x) \right) + \left(\tau - c^2 x^2 - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) \psi(x) = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подытожим результаты исследования.

В первой главе численно реализованы два алгебраических алгоритма восстановления: непосредственная дискретизация и дискретизация на основе системы пикселей Паламодова. Результаты численных экспериментов показывают, что второй метод имеет определённые преимущества по отношению к устойчивости восстановления. Отметим, что в настоящее время в прикладных исследованиях используется прямой алгебраический метод. Численная реализация алгебраического метода реконструкции на основе системы пикселей Паламодова проведена впервые.

Вторая глава посвящена разработке и численной реализации алгоритмов реконструкции, основанных на сведении задачи к обращению преобразования Радона по неполным данным и последующим применением стандартных алгоритмов обращения преобразования Радона. Неизвестные данные полагаются равными нулю. Полученные алгоритмы по качеству и устойчивости восстановления не уступают алгебраическим, превосходя их значительно по скорости вычислений.

Поскольку одним из способов исходная задача может быть сведена к задаче обращения преобразования Радона с неполным угловым диапазоном, в третьей главе реализован алгоритм решения этой задачи, основанный на явной формулы интерполяции, приведённой в работе. С помощью численных экспериментов показано, что применение интерполяции усиливает детальность восстановления. Таким образом, разработанный алгоритм может быть положен в основу алгоритма пополнения данных в исходной задаче. Отметим, что задача обращения преобразования радона по данным, неполным в угловом диапазоне имеет и самостоятельный интерес.

Четвёртая глава посвящена разработке и реализации алгоритма многослойной продольной линейной томографии. Продольная линейная томография давно применяется в медицине. В последнее время получили распространение аппараты, в которых чувствительная плёнка заменена на пластинку датчиков, измеряющих падение интенсивности излучения. Оказывается, используя полученные данные можно получить томограмму среза не только на том уровне, на который настроен аппарат, но также и на соседних. Результаты численных экспериментов показывают, что разработанные алгоритмы могут быть положены в основу разработки новых медицинских рентгеновских томографов.

Пятая глава посвящена проблеме устойчивости восстановления. Поскольку основным источником неустойчивости в рассматриваемой задаче является задача интерполяции целой функции экспоненциального вида, именно эта задача подробно рассматривается. Определяется понятие устойчиво и неустойчиво восстанавливаемой функции. Доказано, что пространство всех функций экспоненциального типа разлагается в прямую сумму

двух подпространств, первое из которых целиком состоит из устойчиво восстанавливаемых функций, а второе, конечномерное — из неустойчиво восстанавливаемых функций. Разработан метод восстановления по неполным данным проекции функции на „устойчивое“ подпространство, а также — ближайшей устойчиво восстанавливаемой функции.

Важную роль в упомянутом разложении и алгоритмах играет специальный базис в пространстве целых функций экспоненциального типа, связанный с задачей интерполяции. Функции этого базиса обладают свойством ортогональности как во всём пространстве \mathbb{R}^n , так и в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, в которой известны значения интерполируемой функции. При $n = 1$ такая система функций совпадает с известной системой вытянутых сфероидальных функций. Все известные алгоритмы вычисления вытянутых сфероидальных функций опираются на разложение их в ряд по функциям Лагранжа либо на численное решение определяющего дифференциального уравнения. Таким образом, известные методы вычислений не могут быть непосредственно обобщены на многомерный случай. В шестой главе предпринята попытка вычисления вытянутых сфероидальных функций как собственных функций интегрального оператора. Такой способ мог бы быть непосредственно обобщён на случай $n > 1$. Численные эксперименты показывают, что значения вытянутых сфероидальных функций, вычисленные по предлагаемой методике совпадают со значениями, полученными по другим методам.

Все полученные результаты являются новыми. Для достижения результатов использовались методы теории функций, функционального анализа, вычислительной математики, теории функций комплексной переменной. Результаты работы могут быть использованы для решения задач интегральной геометрии, томографии, теории функций, интерполяции целых функций экспоненциального типа, теории передачи информации, теории некорректных задач. Разработанные численные алгоритмы могут найти применение в сейсмической томографии, при решении линеаризованной обратной задачи рассеяния, синтезе радарных апертур, в томографии с неполными данными, при разработке новых медицинских томографов, в экологии (мониторинг Земли и океана). Результаты будут интересны специалистам, работающим в указанных областях.

Настоящее исследование может быть продолжено. А именно, следующим этапом могли бы стать разработка алгоритмов для вычисления систем функций с двойной ортогональностью в многомерном случае. Интерес представляет случай, когда R — шар в \mathbb{R}^n , (круг в \mathbb{R}^2), а Λ — сектор шара (круга). Эта ситуация соответствует задаче обращения преобразования Радона по данным, неполным в угловом диапазоне. За основу алгоритма можно взять разработанный в шестой главе настоящего исследования алгоритм решения интегрального уравнения. Затем было бы интересно реализовать численно предложенные в пятой главе алгоритмы интерполяции

и применить их к обращению преобразования Радона по данным, неполным в угловом диапазоне и к задаче восстановления функции по неполному набору сферических средних. Интересно сравнить результаты с полученными в настоящем исследовании. Другим направлением работы могла бы стать разработка алгоритма интерполяции преобразования Радона не только по неполным в угловом диапазоне данным, но и в других ситуациях, например в случае, возникающем в разделе 2.2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Романов В. Г. — Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа — Новосибирск: «Наука», 1969.
2. Романов В. Г. — Обратные задачи математической физики — М.: «Наука», 1994.
3. Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Vasil'ev V. — Multidimensional inverse problems for differential equations — Lecture Notes in Mathematics — 1970 — V. 167 — Berlin: «Springer-Verlag».
4. Алексеев А. С., Лаврентьев М. М., Романов М. Е., Романов В. Г. — Теоретические и вычислительные аспекты сейсмической томографии / Математическое моделирование в геофизике — Новосибирск: Вычислительный центр — 1987.
5. Firbas P. — Tomography from seismic profiles / Seismic Tomography — P. 189–202 — G. Nolet Ed. — Reidel, 1987.
6. Tarantola A. — Inversion of travel times and seismic waveforms / Seismic Tomography — P. 135–153 — G. Nolet Ed. — Reidel, 1987.
7. Harger R. O. — Synthetic Aperture Radar Systems — New-York: «Academic Press», 1970.
8. Hellsten H., Andersson L. E. — An inverse method for the processing of synthetic aperture radar data // Inverse Problems — 1987 — V. 3, P. 111–124.
9. Cohen J., Bleistein N. — Velocity inversion procedure for acoustic waves // Geophysics — 1979 — V. 44, P. 1077–1085.
10. Fawcett J. A. — Inversion of N-dimensional spherical averages // SIAM J. Appl. Math. — 1985 — V. 45 — P. 336–341.
11. Palamodov V. P. — Reconstruction from limited data of arc means // Fourier analysis and applications — (to appear).
12. Паламодов В. П. — О достоверности восстановления поля скоростей по годографу / Теория и практика сейсмических исследований литосферы. Сборник докладов — Петропавловск-Камчатский: Камчатская геофизическая станция ИФЗ АН СССР — 1991, С. 63–71.
13. Denisjuk A., Palamodov V. — Inversion de la transformation de Radon d'après des données incomplètes // C. R. Acad. Sci. Paris — 1988 — T. 307 — Ser I — P. 181–183.
14. Palamodov V. P. — Some singular problems in Tomography / Mathematical Problems of Tomography. Translations of Mathematical Monographs — Rhode Island: AMS — 1990 — V. 81 — Pp. 123–140.
15. Наттерер Ф. — Математические аспекты компьютерной томографии — Москва: Мир, 1990.
16. Томографические методы в физико-технических измерениях / Сборник научных трудов — Москва: ВНИИФТРИ — 1990.
17. Denisjuk A. — Integral geometry on the family of semi-spheres // Fractional calculus and applied analysis — 1999 — V. 2 — No 1 — P. 42–59.

18. Хермен Г. — Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии — М.: «Мир», 1983.
19. Гладыш Б. — Томография в клинической практике — Варшава: Польское государственное медицинское издательство, 1965.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. — Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье — М.: Наука, 1967.
21. Slepian D., Pollak H. O. — Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—I. // Bell System Techn. J. — 1961 — V. 40 — No. 1 — P. 43–63.
22. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В. — Вычисление радиальной волновой функции сфероида с помощью модифицированного метода фазовой функции // Журнал вычислительной математики и математической физики — 1987 — Т/ 31 — № 2 — С. 25–42.
23. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Пак Т. В., Парийский Б. С. — Вычисление вытянутых сфероидальных функций с помощью решения соответствующего дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики — 1987 — Т. 31 — № 2 — С. 25–42.
24. Пальцев А. А. — Вычисление сфероидальных функций и их первых производных при помощи ЭВМ. I // Весці Акадэміі навук БССР. Сер. фіз-мат навук — 1969 — № 1, С. 19–25.
25. Ерашевская С. П., Пальцев А. А. — Вычисление сфероидальных функций и их первых производных при помощи ЭВМ. II // Весці Акадэміі навук БССР. Сер. фіз-мат навук — 1969 — № 1 — С. 19–25.
26. Lozier D. W., Olver F. W. J. — Numerical evaluation of special functions — <http://gams.cam.nist.gov/nesf/Sect0/Sect0.html>
27. Slepian D. — Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—IV // Bell System Techn. J. — 1964 — V. 43 — No. 6 — Pp. 3009–3057.
28. Shepp L. A., Logan B. F. — The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. — 1974 — V. NS-21 — Pp. 21–43
29. Louis A. K. — Picture reconstruction from projections in restricted range // Mathematical Methods in the Applied Sciences — 1980 — V. 2 — Pp. 209–220.
30. Tuy H. K. — Reconstruction of a three-dimensional object from a limited range of views // Journal of Mathematical Analysis and Applications — 1981 — V. 80 — Pp. 598–616.
31. Davison M. E. — The ill-conditioned nature of the limited angle tomography problem // SIAM Journal of Applied mathematics — 1983 — V. 43 — Pp. 428–448.
32. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. — Численные методы — М.: «Наука», 1987.

33. Both E. — Ein vereinfachter Tomograph // Munch. med. Wschr. — 1936 — V. 51 — P. 2109.
34. Pratt W. K. — Digital Image Processing — Wiley, 1978.
35. Аблеков В. К., Колядин С. А., Фролов А. В. — Высокоразрешающие оптические системы — М., 1985.
36. Красичков В. Ф. — Системы функций со свойством двойной ортогональности // Математические заметки — 1968 — Т. 4 — № 5 — С. 551–556.
37. Самарский А. А., Гулин А. В. — Численные методы — М.: «Наука», 1989.
38. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. — Вычислительные методы — Т. 2 — М.: «Наука», 1977.
39. Ерашевская С. П., Иванов Е. А., Пальцев А. А., Соколова Н. Д. — Таблицы вытянутых сфероидальных волновых функций и их производных — Т. 1 — пол ред. Крылова В. И. — Мн.: «Навука і тэхніка», 1973.