Matematyka stosowana

Wstęp do Teorii Gier

Tadeusz Płatkowski
tplatk@mimuw.edu.pl
http://www.mimuw.edu.pl/~tplatk

Uniwersytet Warszawski, 2012

Streszczenie. Skrypt jest przeznaczony dla studentów wydziałów matematycznych i przyrodniczych uniwersytetów i politechnik, pragnących zapoznać się z matematycznymi podstawami i wybranymi zastosowaniami teorii gier, w szczególności gier niekooperacyjnych.

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=wtg

(może zawierać dodatkowe materiały)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

Wstęp

Prezentowany cykl wykładów obejmuje wprowadzenie do gier w postaci strategicznej, gier w postaci ekstensywnej i gier kooperacyjnych. Zostały uwzględnione gry iterowane, przetargi. Oddzielne wykłady zostały poświęcone wprowadzeniu do gier ewolucyjnych i do teorii uczenia się w grach.

Wybrana literatura w postaci podstawowych podręczników i prac źródłowych jest podana w bibliografii umieszczonej w końcowej części prezentowanego cyklu wykładów. Poniżej podamy kilka informacji dotyczących źródeł dostępnych w sieci.

W sieci istnieje wiele interesujących stron zawierających materiały dotyczące różnych apektów teorii gier. Link http://arielrubinstein.tau.ac.il/books.html udostepnia wybrane monografie A. Rubinsteina dotyczące teorii gier, zob. też http://theory.economics.utoronto.ca/books/, oraz strona domowa A. Rubinsteina gdzie można znaleźć m.in. szereg artykułów dotyczących różnych aspektów teorii gier.

Oto wybrane inne interesujące adresy:

http://www.gametheory.net/, zawierający wiele wykładów, zadań, programów interakcyjnych itp.,

strona D. K. Levina: http://www.dklevine.com/General/whatis.htm

strona Game Theory Society: http://www.gametheorysociety.org/

Aukcje: strona P. Klemperera: http://www.paulklemperer.org/

Cykl wykładów B. Polaka (Yale University) zarejestrowanych na video:

http://academicearth.org/courses/game-theory

Pakiety numeryczne:

www.gambit-project.org

http://www.univie.ac.at/virtuallabs(autor:C.Hauert)

http://www.ssc.wisc.edu/~whs/dynamo/(autorzy:B.Sandholm,E.Dokumaci,F.Franchetti)

Adresy "encyklopedyczne":

http://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory

http://plato.stanford.edu/entries/game-theory/

Uwaga 0.1. Podstawowa literatura związana z tematyką wykładów jest dostępna w języku angielskim. Dlatego częstokroć będziemy kursywą, na ogół w nawiasach, podawali odpowiednią terminologię angielską.

1. Wprowadzenie. Przykłady Gier

1.1. Uwagi ogólne

Teorię gier (TG) można scharakteryzować jako naukę o strategicznym działaniu w warunkach konfliktu i kooperacji.
Jest zbiorem rozważań stosowalnych przez podmioty w sytuacjach strategicznych.
Jest narzędziem ułatwiającym zrozumienie zjawisk i interakcji zachodzących między ludźmi i innymi podmiotami. Jest formalnym, uniwersalnym językiem unifikacji nauk behawioralnych.
Opisuje formalnie sytuacje w których podmioty współzawodniczą lub współpracują.
Jest nauką o powstawaniu, przemianach, dyfuzji (tj. rozprzestrzenianiu się) i ewentualnej stabilizacji różnych form behawioralnych ludzi i innych podmiotów.
W biologii pewne idee i metody TG stały się ważnym teoretycznym narzędziem teorii ewolucji.
W ostatnich dziesięcioleciach obserwujemy sprzężenie zwrotne między teorią gier a biologią, antropologią, socjologią, ekonomią, psychologią, naukami politycznymi, informatyką i innymi gałęziami nauki. Matematyczny aparat i formalizm teorii gier jest stosowany do opisu teorii ewolucji populacji, opisu konkurencji i kooperacji między indywidualnymi osobnikami i grupami, do opisu konfliktów politycznych i społecznych, funkcjonowania rynków finansowych, powstawania i ewolucji instytucji i norm społecznych, do opisu przebiegu procesów ekonomicznych, przekazu informacji w internecie itd.
Podstawowym obiektem w nieformalnym opisie TG jest (podejmujacy decyzje) gracz. W zależności od dziedziny badawczej i/lub kontekstu używamy nazw: agent, osobnik, podmiot, osoba, indywiduum, obiekt etc. Graczem może być grupa, jednostka ekonomiczna czy administracyjna, zwierzę, program komputerowy itp.
W przypadku jednego gracza mamy do czynienia z problemem decyzyjnym.
Interakcja jest to sytuacja (strategiczna sytuacja) w której rezultat decyzji każdego gracza zależy od decyzji (akcji) conajmniej jednego innego gracza (wpp. mielibyśmy zbiór niezależnych problemów decyzyjnych). Jako prosty przykład rozważmy dwie osoby w restauracji. Gdy każda zamawia tylko dla siebie i płaci tylko za siebie, mamy 2 niezależne problemy decyzyjne. Gdy każda zamawia tylko dla siebie a płaci połowę całego rachunku, mamy interakcję którą można sformalizować w postaci gry (tu rezultatem, wynikiem decyzji, akcji obu graczy jest kwota którą każdy gracz płaci).
Istotną rolę będzie odgrywało pojęcie gracz racjonalny. Gracz racjonalny to taki który zna szczegóły interakcji (kto, z kim i w jaką grę gra) i wie że inni też znają szczegóły interakcji i wie że inni wiedzą że on wie że...itd., oraz podejmuje najlepszą (z punktu widzenia preferencji na wynikach) dla siebie decyzję (inaczej - wybiera akcję), i wie ze inni gracze też podejmują takie decyzje (wybieraja takie akcje).
W zależności od kontekstu używa się terminów: zagrać, zagrać (wybrać) akcję, strategię, podjąć decyzję, mieć ruch, wykonać posunięcie, etc.
W ogólności istnieje różnica między pojęciami akcja i strategia, o czym będzie mowa w odpowiednich wykładach. Akcja to decyzja jednorazowa; strategia to plan akcji, który precyzuje jaką decyzje podjąć w każdej możliwej sytuacji w grze.
TG została po raz pierwszy sformalizowana matematycznie w monografii J. von Neumanna, O.

Morgensterna, [16]. Literatura w języku angielskim jest bardzo bogata, patrz np. [1, 6, 5, 7, 9, 8, 10, 11, 19, 17, 40, 31, 37, 39]. W języku polskim przykładowe pozycje to [13, 14, 20, 36].
Początkowo zasadniczym żródłem inspiracji dla formalizowania TG była ekonomia. Do około I p. XIX ekonomia była nauka opisową. Pierwsze modele matematyczne to modele duopolu Cournota i Bertranda. W modelach tych zajmowano się problemami równowagi rynkowej (np. podaż - popyt, liczba rąk do pracy - liczba miejsc pracy). Obecnie TG jest stosowana w wielu dyscyplinach nauki, od biologii po nauki polityczne.
Ze względu na specyficzne własności i charakterystyki wyróżniamy wiele typów gier i istnieją różne sposoby ich klasyfikacji. Poniżej przykładowe typy kier i ich klasyfikację ze wzgledu na rózne ich cechy (nie są to wyczerpujące i spójne charakterystyki i klasyfikacje, lecz raczej informacje jakie nazwy, określenia i typy gier spotyka się w bogatej literaturze przedmiotu). Gry można podzielić:

— Ze względu na czas (kolejność) podejmowania decyzji:
  1. Gry w postaci strategicznej (normalnej)
  Opisują sytuacje w których gracze podejmują decyzje jednocześnie, bez wiedzy o decyzjach innych uczestników gry.
  2. Gry w postaci ekstensywnej (rozwinętej)
  Opisują sytuacje w których gracze podejmują decyzje sekwencyjnie, w kolejnych chwilach czasu, mając określone informacje o decyzjach innych graczy (i swoich) w poprzednich chwilach czasu.
— Ze względu na posiadana wiedzę:
  1. Gry z kompletną informacją
  Są to gry w których gracze mają pełną informację o możliwych wynikach gry (znają funkcje wypłat swoją i innych graczy) i o zbiorach możliwych strategii graczy. W przypadku gier ekstensywnych, gdy gracze oprócz tego w każdej chwili mają pełną informację o poprzednich decyzjach innych graczy i o ewentualnych ich posunięciach losowych, mówimy o grach z pełną informacją.
  2. Gry z niekompletną informacją
— Ze względu na możliwość tworzenia koalicji
  1. Gry kooperacyjne (koalicyjne) - gdy akcje są przypisywane grupom (koalicjom) graczy
  2. Gry niekooperacyjne - gdy akcje są przypisywane pojedynczym graczom
— Ze względu na liczbę graczy:
  Gry dwuosobowe, wieloosobowe nieskończone (w szczególności tzw. ”duże gry”, tzn. gry z continuum graczy).
— Ze względu na zbiory dostępnych akcji, strategii:
  Gry skończone - gdy zbiór akcji czy strategii każdego gracza jest skończony.
  Gry nieskończone. W szczególności wyodrebniamy tu gry z continuum akcji (strategii).
— Ze względu na liczbę wykonywalnych akcji
  Gry ze skończonym i z nieskończonym horyzontem czasowym.
— Ze względu na powtarzalność:
  Gry jednokrotne i wielokrotne (iterowane)
— Ze względu na ”rolę” czasu:
  Gry statyczne i gry ewolucyjne
— Inne charakterystyki gier: Gry stochastyczne, gry różniczkowe, gry dynamiczne, gry przeciwko naturze, gry na sieciach.

Nagrody Banku Szwecji im. A. Nobla z ekonomii, związane z teorią gier:
1975 L. Kantorowicz, T. C. Koopmans
1972: K.J. Arrow
1983: G. Debreu
1994: J. Nash, J. Harsanyi, R. Selten
2005: R. Aumann, T. Schelling
2007: L. Hurwicz, E. Maskin, R. Myerson

1.2. Przykłady Gier

Przykład 1.1. Polowanie na Jelenia (*Stag Hunt*)
2 myśliwych może polować na jelenia lub na zające. Ich decyzje zapadają jednocześnie i niezależnie, tzn. bez wiedzy o decyzji drugiego. Jeleń ma wartość 4, zające po 1. Każdy ma 2 akcje do wyboru: J, Z. Jesli obaj zapolują na jelenia (akcje J) to upoluja go, otrzymujac po 2. Jeśli jeden wybierze J, drugi Z, to pierwszy nic nie upoluje (otrzymuje 0), drugi upoluje zająca (otrzymuje 1). Jeśli obaj wybiora Z, to otrzymuja po 1. Przedstawimy możliwe rezultaty polowania w postaci macierzy wypłat graczy:

i=1:	J	Z
J	2	0
Z	1	1

i=2:	J	Z
J	2	1
Z	0	1

gdzie pierwsza macierz reprezentuje wypłaty gracza nazwanego graczem wierszowym, druga - gracza kolumnowego. Przykładowo: zero w pierwszej macierzy oznacza wypłatę gracza (wierszowego) grającego J, gdy przeciwnik (gracz kolumnowy) gra Z. Jedynka w pierwszym wierszu drugiej macierzy w oznacza wypłate gracza kolumnowego grającego Z gdy przeciwnik (gracz wierszowy) gra J. Nierozróżnialność myśliwych implikuje że jedna macierz jest transponowana do drugiej. Zapis w postaci jednej macierzy:

	J	Z
J	2,2	0,1
Z	1,0	1,1

Zauważmy że gdyby gracze podjęli decyzje (J,J) lub (Z,Z) to żadnemu z nich nie opłaca się JEDNOSTRONNIE (tj. gdy drugi nie zmienia decyzji) zmienić swojej decyzji. Mówimy, na razie nieformalnie, że takie pary akcji, decyzji, strategii czystych "są w równowadze", "tworzą równowagę" (równowagę Nasha w strategiach czystych, patrz następny wykład).

Uwaga: J. J. Rousseau 1712-1779, pisarz, filozof Oświecenia, w traktacie o początku i zasadach nierówności między ludżmi" (1755) opisał nieformalnie tę grę [5].
Oto wolny przekład odpowiedniego fragmentu traktatu:
"...Jeżeli grupa myśliwych poluje na jelenia, to każdy z nich musi być na stanowisku by polowanie zakończyło się sukcesem. je,zeli jednak zając przemknie koło jednego z nich to [nie ma wątpliwości że] ten myśliwy zacznie go gonić nie zważając na to że w ten sposób może dramatycznie obniżyć szanse innych na upolowanie jelenia..."
Więcej o grze Polowanie na Jelenia można przeczytać np. w książce [34].

Przykład 1.2. Gra Dylemat Więźnia (*Prisoner's Dilemma*)
2 podejrzanych o dokonanie przestępstwa siedzi w areszcie, nie komunikując się między sobą. Śledczy nie ma dostatecznych dowodów by skazać obu, Proponuje każdemu by obciążył drugiego, uzyskując w zamian zwolnienie. Podejrzani mają do wyboru dwie akcje (strategie): C: milczeć, czyli nie obciążać drugiego (kooperacja, *Cooperation*), i D: obciążyć drugiego (defekcja, *Defection*), i wybierają jedną z nich jednocześnie i bez komunikacji między sobą. Wybierajac:
(C,C) $\Rightarrow$ każdy dostaje rok więzienia: wynik akcji to po -1 dla każdego
(C,D) i (D, C) $\Rightarrow$ C dostaje 5 lat (wynik -5), D jest zwolniony (wynik 0)
(D,D) $\Rightarrow$ każdy dostaje 3 lata: wynik akcji to po -1 dla każdego
Macierz gry:

	C	D
C	-1,-1	-5,0
D	0,-5	-3,-3

Uwaga: nawet gdyby więźniowie mogli się kontaktować, a nawet uzgodnić przedtem swoje akcje, a nawet gdyby decydowali sekwencyjnie, wynik (D,D) jest jedynym "racjonalnym" z punktu widzenia indywidualnych interesów każdego z podejrzanych!
Jeżeli za wynik gry (wypłatę) przyjmiemy liczbę lat spędzonych na wolności w czasie 5 lat po zapadnięciu wyroku, to macierz gry ma postać

	C	D
C	4,4	0,5
D	5,0	2,2

Dylemat Więźnia w postaci ogólnej:

	C	D
C	R,R	S,T
D	T,S	P, P

$T > R > P > S$. T: Temptation, R: Reward, P: Punishment, S: Sucker. Para (D, D) jest (jedyną) równowagą Nasha.

Oto inne przykłady "tego typu" gry.
* Wspólny projekt.
$s_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2$ indykator gracza i: udaje pracę: $s_i = 0$, pracuje: $s_i = 1$. Jeśli gracz pracował - ponosi koszt 3, nie - 0. Wynik pracy: $2(s_1 + s_2)$ dla każdego uczestnika, niezależnie od tego czy pracował czy udawał.

	C	D
C	1, 1	-1, 2
D	2, -1	0, 0

* Dylemat Współpracy
2 mocarstwa A, B muszą niezależnie, bez wiedzy o decyzji drugiego, podjąć decyzję: C - włożyć (zainwestować) $2c > 0$, lub D - nie inwestować. $2c > 0$ - koszt wyjścia świata z kryzysu. Jeśli A i B włożyły po $2c > 0$ to korzyść (wypłata) każdego: $-2c + c + b = b - c$. Jeśli A włożyłoby $2c$ a B nic, to A otrzymuje $b - 2c$, B b; nalogicznie (symetrycznie) B. Jeśli A i B nic nie włożą, to będą miały po a, $0 < b - 2c < a < b - c < b$. Macierz gry:

	C	D
C	b-c,b-c	b-2c,b
D	b,b-2c	a,a

Przykład 1.3. Gra Zamieć Śnieżna (*Snowdrift*)
2 kierowców stoi przed drogą zasypaną przez lawinę. $c > 0$ - całkowity nakład energii potrzebny do odśnieżenia drogi , $b > c$ - korzyść każdego gracza z dojechania do domu, a - energia (wypłata) każdego gracza gdy nic nie robią, $b - c > a$ by opłacało sie wracać.

	C	D
C	b-c/2,b-c/2	b-c,b
D	b, b-c	a,a

Na ogół przyjmuje się $a = 0$. Przykład ogólniejszy: $b = 5, c = 2, a = 1$. W tej grze żaden gracz nie ma tzw. strategii dominującej. Są dwie ("asymetryczne") równowagi Nasha w strategiach czystych: $(C, D), (D, C)$.
Oto inny przykłady "tego typu" gry:
* Dylemat Współpracy II
2 mocarstwa: A, B mają do wyboru akcje: C: włożyć (zainwestować), D - nie inwestować. A musi "na początku" włożyć c by wyjść z kryzysu (niezależnie od tego co będzie grał B; "finalna" wypłata B zależy od akcji B!) B: analogicznie (symetrycznie). Jeśli A i B włożą po $c > 0$ to dostaną zwrot $c/2$ + zysk b. Jeśli A włoży c a B włoży 0, to A otrzymuje $b - c > 0$, B b. Analogicznie B. Jeśli A i B włożą 0, będą miały po kryzysie a, $b - c > a$. Macierz gry:

	C	D
C	b-c/2,b-c/2	b-c,b
D	b,b-c	a,a

W powyższych przykładach macierz wypłat jednego gracza była transponowaną macierzą wypłat drugiego (symetryczne gry dwuosobowe; ogólna definicja dla szerszej klasy gier będzie podana później). Poniższa gra nie ma już tej własności.

Przykład 1.4. Gra W Monety (Gra Orzeł-Reszka, *Matching Pennies*)
Dwaj gracze pokazują jednocześnie stronę monety (O lub R). Macierz wypłat:

	O	R
O	1,-1	-1,1
R	-1,1	1,-1

Gry nie mają RN w strategiach czystych ("brak koordynacji"). Są to gry o sumie stałej (w pierwszym przypadku - o sumie zerowej). Intuicyjnie: w przypadku wielokrotnego powtarzania gry, średnia wypłata każdego gracza ze strategii mieszanej polegającej na odkrywaniu każdej ze stron monety z prawdopodobieństwem 1/2 wynosi 0 dla pierwszej, 0.5 dla drugiej macierzy.

Podobny przykład, w którym brak symetrii gry (formalna definicja będzie podana w nastepnym wykładzie) jest "bardziej widoczny":

Przykład 1.5. (Gra W Kota i Myszkę)
Kot goni Myszkę. Każde zwierze ma 2 opcje: skręcić w lewo (L) lub w prawo (P). Macierz wypłat:

	L	P
L	0,2	1,0
P	1,0	0,2

gdzie M jest graczem wierszowym, K - kolumnowym: pierwszy element każdej pary wypłat daje wypłatę M, drugi - K. Gra nie ma RN w strategiach czystych. W przeciwieństwie do poprzedniego przypadku gracze są "rozróżnialni".

Przykład 1.6. Gra Walka Płci (*Battle of the Sexes*)
Kobieta (gracz wierszowy, K) woli boks (Bo), mężczyzna (gracz kolumnowy, M) balet (Ba). Z drugiej strony chcą oglądać wybrane widowisko razem. Macierz wypłat:

	Bo	Ba
Bo	3,2	0,0
Ba	1,1	2,3

Przykład 1.7. Gra Walka Płci - wersja ekstensywna:
Załóżmy że K wybrała Bo i nie może już zmienić decyzji, i dzwoni do M z tymi informacjami. Racjonalny M wybierze Bo. Można narysować postać rozwiniętą tej gry. Uwzględniamy wszystkie scenariusze, np. wybór Ba przez K (np. gdy nie jest pewna pełnej racjonalności M lub gdy jest szansa że M się pomyli).

Przykład 1.8. Gra Kamień-Papier-Nożyczki (*Rock-Paper-Scissors*)
2 graczy, każdy ma 3 strategie: K, P, N. Macierz wypłat:

	K	P	N
K	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
N	-1,1	1,-1	0,0

Przykład 1.9. Gra Dobra Publiczne (*Public Goods Game, PG*)
N graczy. Każdy dostaje po $c(=1)$ do dyspozycji i wkłada tę kwotę (akcja C) lub nie (akcja D) do wspólnej puli. Jeśli zagra D to zatrzymuje c. Gracze nie znają decyzji innych graczy. Pula zostaje zwielokrotniona r razy. Niech n oznacza liczbę graczy którzy zagrali C. KAŻDY z N graczy dostaje rn/N z puli. Niech $P_C(n)$, $P_D(n)$ - finalne stany posiadanie gracza grającego odpowiednio $C, D : P_C(n) = nrc/N$, $P_D(n) = nrc/N + c$. Zauważmy że $r < N \Leftrightarrow P_C(n) < P_D(n-1)$; dla $r < N$ zawsze lepiej grać D. PG to gra opisana powyższym scenariuszem, dla której $r < N$ i dodatkowo $P_C(N) > P_D(0)$, czyli dla której $1 < r < N$.
W szczególności, im większa liczba graczy N tym mniej każdy gracz musi dostać z puli by opisany scenariusz definiował PG.

Przykład 1.10. Gra "Dylemat Wspólnych Zasobów" (*Tragedy of Commons*)
N graczy. Jeżeli jest nie więcej niż $M < N$ defektorów to każdy gracz dostaje bonus B. Wypłata defektorów jest zawsze wyższa niż kooperatorów: $T > R$. Każdy gracz ma lepiej jeśli wszyscy kooperują niż gdy wszyscy zdradzają: $R + B > T$

	$< M$ innych gra D	M innych gra D	$> M$ innych gra D
C	R+B	R + B	R
D	T + B	T	T

W tej grze jest wiele RN w strategiach czystych: totalna defekcja i takie profile gry w których jest dokładnie M defektorów (minimalna efektywna kooperacja). Minimalna efektywna kooperacja jest jedynym profilem Pareto - optymalnym, patr Wykład 3.

Przykład 1.11. Gra Ultimatum (*Ultimatum Game*)
Jest do podziału 100 PLN między graczy A i B. A proponuje B podział: x dla B, $100 - x$ dla A, gdzie $x \in \{1, 2, ...100\}$ są akcjami gracza A. Dla gracza A jego strategie utożsamiamy z akcjami. Gracz B ma dwie akcje : TAK, NIE. Wypłaty: (100 - x, x) lub (0,0). Strategie B (czyli plany jaką akcję podjąć w każdej możliwej sytuacji): wektory 100 elementowe o wyrazach TAK, NIE. Równowaga Nasha: Para strategii: (1, (TAK, TAK, ...,TAK)).

Przykład 1.12. Gra Wejście–Odstraszanie (*Entry - Deterrence Game*)
Posiadasz warsztat o dochodach 2. Obok jest sklep spożywczy o dochodach 5. Jeśli przekształcisz warsztat w drugi sklep to:
a. jeśli pierwszy sklep zareaguje agresywnie (wojna cen) to dochody obu będa po 1.
b. jeśli pokojowo (podział rynku) to dochody obu będa po 3.
Jeśli nie przekształcisz warsztatu w sklep to wasze dochody nie ulegną zmianie.

Przykład 1.13. Gra Stonoga (*Centipede Game*)
2 graczy A i B, mają na kontach po 0 PLN. A otrzymuje ofertę przyjęcia 1 PLN. Jeśli przyjmie (akcja T), to gra się kończy i A ma 1, B 0, użyjemy notacji (1,0) na oznaczenie wyniku.
Jeśli nie (akcja N), to B otrzymuje ofertę 10^1 PLN. Jeśli B zagra T to gra się kończy z wynikiem (0,10).
Jeśli N to A otrzymuje oferte 10^2 PLN. Jeśli A zagra T to gra się kończy z wynikiem $(10^2, 0)$.
Jeśli N to B otrzymuje oferte 10^3 PLN. Jeśli B zagra T to gra się kończy z wynikiem $(0, 10^3)$.
Jeśli N to A otrzymuje oferte 10^4 PLN. Jeśli A zagra T to gra się kończy z wynikiem $(10^4, 0)$.
Jeśli N to B otrzymuje oferte 10^5 PLN. Jeśli B zagra T to gra się kończy z wynikiem $(0, 10^5)$.
Jeśli N to gra się kończy i nikt nic nie dostaje.

Przykład 1.14. Gra Podział Dolara.
Do podziału jest 1 \$. N=3 gracze moga tworzyć koalicje (niepuste podzbiory zbioru graczy) proponując partnerom koalicji pewien podział 1 \$. Podział następuje (gra się kończy) gdy conajmniej 2 graczy go zaakceptuje i żaden z 3 graczy nie zaproponuje innego podziału, który by zmienił decyzję conajmniej jednego z tych 2 graczy, którzy zaakceptowali podział. Każdy chce dostać jak największą część z 1 \$ i nie jest związany w żaden sposób z pozostałymi graczy.

Ćwiczenie 1.1. Gra W Tchórza (*Chicken Game*)
2 osoby stoją po przeciwnej stronie kładki przez rzekę. Przez kładkę może przejść tylko jedna osoba. Mają do wyboru 2 strategie: A(gresywna) - wejść na kładkę, P(okojowa) - nie wejść (czekając aż druga przejdzie). Jeśli obie wejdą (grają A) to żadna nie przejdzie, obie ucierpią w wyniku zderzenia oraz spóźnią się do pracy - wypłaty po -1, jeśli wybiorą przeciwne strategie to wybierający A dostaje 2, a P dostaje 1 (A będzie wcześniej w pracy), jeśli obie grają P, to spóźnią się do pracy - dostają po 0. Macierz gry:

	A	P
A	-1,-1	2,1
P	1,2	0,0

Czyste RN: (A,P), (P,A). Ogólna postać tej gry:

	A	P
A	a,a	b,c
P	c,b	d,d

$b > a, c > a, d < b$. Czyste RN: (A,P), (P,A).

Ćwiczenie 1.2. 3-osobowy PD: każdy z 3 graczy ma 2 akcje: C lub D.
$(C, C, C) \Rightarrow (R, R, R)$, $(D, D, D) \Rightarrow (P, P, P)$,
$(C, D, D) \Rightarrow (S, P', P'), (C, C, D) \Rightarrow (R', R', T)$, $T > R > P > S$, $T > P' > P$, $R > R'$. Jedyna równowaga Nasha to (D, D, D).

Ćwiczenie 1.3. 3-osobowa Gra Zamieć Śnieżna
Praca wymagana do odśnieżenia: c. Wypłaty: $(CCC) : (b - c/3, b - c/3, b - c/3), (CCD) : (b - c/2, b - c/2, b)$, $(CDD) : (b - c, b, b), (DDD) : (c/3, c/3, c/3)$ (defektorzy zachowują energię). Jedyna czysta RN: (DDD). Rozważyć modyfikację: $(DDD) - (0, 0, 0)$. Są wtedy 3 RN czyste.

Ćwiczenie 1.4. 3-osobowa Gra na Mniejszość (*Minority Game*)
3 graczy wybiera jednocześnie jedną z opcji: A lub B. Wygrywa gracz który jest w mniejszości. Macierz gry - 3 "kostki gry". Można zróżnicować wyniki (wypłaty) w zależności czy się wybrało opcję tę samą co 1 czy 2 pozostali gracze. Uogólnienie - $2k + 1$ - osobowa gra na mniejszość.

Ćwiczenie 1.5. Dylemat podróżnika (*Traveller's Dilemma*)
Linia lotnicza zgubiła 2 identyczne walizki, należące do 2 podróżnych. Linia oferuje odszkodowanie, ale nie większe niż K \$. Podróżni proszeni są niezależnie od siebie o napisanie kwoty jakiej oczekują jako odszkodowanie, nie mniejszej niż 2 \$ i nie większej niż K \$. Jeśli napiszą taką samą kwotę, obaj otrzymają odszkodowanie tej wysokości, jeśli różne, to zostanie uznana niższa kwota i ten kto napisze niższą kwotę, dostanie dodatkowo 2 \$, a drugi straci 2 \$ ze swojego odszkodowania.
Dla $K = 3$ \$ gra jest dylematem więźnia. Dylemat podróżnika jest uogólnieniem DW.
Jeśli przewidujemy że przeciwnik napisze wartość K \$, najbardziej opłaca nam się napisać $K - 1$ \$. Nasza nagroda wyniesie wtedy $K + 1$ \$. Jeśli jednak przeciwnik przewidzi, że będziemy chcieli napisać $K - 1$ \$, sam napisze $K - 2$ \$ (jego nagroda wyniesie wtedy K \$, a nasza $K - 4$ \$ itd. Napisanie kwoty 2 \$ jest więc strategią dominującą. Jedyna RN to para $(2, 2)$ \$.

Ćwiczenie 1.6. Gra Banacha (Stanisław Mazur, 1935)
2 graczy, $A \subseteq [0, 1]$ -ustalony. Gracz 1-y wybiera cyfrę a_1, 2-i a_2, 1-y a_3 itd w nieskończoność. Powstaje rozwinięcie dziesiętne $x = 0.a_1a_2a_3....$ jeśli $x \in A$ to wygrywa 1-y, wpp 2-i. Podaj przykłady strategii wygrywających dla różnych A.
Nazwijmy $A \subseteq [0, 1]$ zbiorem zdeterminowanym jeżeli 1-y lub 2-i gracz ma strategię wygrywającą. Wiele "spotykanych na codzień" podzbiorów $[0, 1]$ jest zdeterminowanych. Pewnik wyboru implikuje istnienie zbiorów niezdeterminowanych. Jest to gra ekstensywna z nieskończonym horyzontem czasowym. Szerzej o pewnych związkach pomiędzy teorią mnogości a TG - patrz np. rozdz. 40 w [14].

2. Gry w postaci strategicznej

2.1. Gra strategiczna

Wprowadzamy oznaczenia
$N = \{1, 2, ...n\}$ – zbiór graczy
$A_i, i = 1, 2, ...n$ – niepusty zbiór akcji (strategii czystych) gracza i
$A = \times A_i, i \in N$.
$u_i : A \to \Re$ – wypłata (funkcja wypłat) gracza i, $i = 1, ...n$

Definicja (ważna) 2.1. Gra strategiczna jest to trójka $GS = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$

Używa się też terminów: gra w postaci strategicznej, gra w postaci normalnej, gra niekooperacyjna.
Oznaczamy
$a = (a_1, a_2, ...a_n) = (a_i)_{i \in N}$ – profil (strategii czystych) gry, $a_i \in A_i$.
$u_i(a)$ – wypłata gracza i z profilu a
Niekiedy, chcąc wyróżnić gracza i, np. by porównywać wartości funkcji wypłat w profilach w których zmieniamy jedną współrzędna, będziemy profil zapisywali w postaci (a_i, a_{-i}), gdzie a_{-i} oznacza ciąg wyrazów profilu (a_j) dla wszystkich graczy poza i: $a_{-i} = (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$. Konsekwentnie oznaczamy $A_{-i} = \times A_k$, $k \in N \setminus \{i\}$

Uwaga 2.1. Tam gdzie nie będzie wątpliwości, będziemy utożsamiać akcję ze strategią. W ogólności, dla wielu typów gier strategia to scenariusz, plan działań, akcji na wszystkie możliwe sytuacje. Odpowiednie formalne definicje będą podane w dalszych rozdziałach.

Uwaga 2.2. Ogólniejsza definicja gry strategicznej wprowadza pojęcie wynikow gry i zastepuje funkcje wypłat graczy przez relacje preferencji na zbiorze wyników gry. W tym wykładzie relacje preferencji specyfikujemy przez podanie funkcji użyteczności - funkcji wypłat, które te relacje określają. Więcej na ten temat - patrz np. [13, 16, 20, 14].

Przykład 2.1. $N = \{1, 2\}$, $A_1 = \{1, 2, ...m_1\}$, $A_2 = \{1, 2, ...m_2\}$. Niech $a = (a_1, a_2) \in A = A_1 \times A_2$ - profil strategii czystych, $u_i(a)$ - wyplata gracza i z profilu a, $i = 1, 2$. W ogólności zbiory A_i mogą być zbiorami różnych strategii. Zbiory $\{u_i(a), a \in A\}$ mają po $m_1 \times m_2$ elementów, które tworzą $m_1 \times m_2$ elementowe macierze - macierze wypłat graczy. Niech E oznacza macierz wypłat gracza 1, F–gracza 2:

$$E = (e_{hk}),\ e_{hk} = u_1(h, k),\ F = (f_{hk}),\ f_{hk} = u_2(h, k)\ \forall h \in A_1, \forall k \in A_2.$$

Numer wiersza odpowiada numerowi strategii gracza 1, numer kolumny - numerowi strategii gracza 2.

Przykład 2.2. Jako szczególny przypadek Przykładu 2.1 przyjmijmy
$N = \{1, 2\}$, $\quad A_1 = A_2 = \{C, D\}$, oraz
$u_1((C, C)) = R$, $u_1((C, D)) = S$, $u_1((D, C)) = T$, $u_1((D, D)) = P$,
$u_2((C, C)) = R$, $u_2((C, D)) = T$, $u_2((D, C)) = S$, $u_2((D, D)) = P$, $T, R, P, S \in \Re$. Macierze E, F wypłat gracza 1 i 2 mają postać odpowiednio

E	C	D
C	R	S
D	T	P

F	C	D
C	R	T
D	S	P

Będziemy używać łącznego zapisu

	C	D
C	R,R	S,T
D	T,S	P,P

W szczególoności dla $T > R > P > S$ otrzymujemy Dylemat Więźnia, z oznaczeniami: C = Cooperation, D = Defection.

2.2. Równowaga Nasha w strategiach czystych

Definicja (ważna) 2.2. Równowaga Nasha w strategiach czystych (**RN**) gry strategicznej

$$GS = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$$

jest to profil akcji (strategii czystych) $a^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*) \in A$ t. że $\forall i \in N$ $\forall a_i \in A_i$

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geqslant u_i(a_i, a_{-i}^*)$$

Okazuje się że wiele gier nie ma RN w strategiach czystych, np. gra Orzeł - Reszka z Przykładu

2.3. Strategie mieszane

Rozważmy grę "W Kotka i Myszkę" z Przykładu 1.5, o macierzy wypłat

	L	P
L	0,2	1,0
P	1,0	0,2

gdzie myszka (M) jest graczem wierszowym, kot (K) - graczem kolumnowym i nie ma RN w strategiach czystych.
Rozważmy **intuicyjny** sposób wprowadzenia strategii mieszanych. Niech M wybiera akcję L z prawdopodobieństwem x, P z $1-x$, K wybiera L z p-stwem y, P z $1-y$. Nazwijmy pary $(x, 1-x)$, $(y, 1-y)$ strategiami mieszanymi odpowiednio M i K. Można pokazać że para strategii $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ ma tę własność że oczekiwana wartość wypłaty M (K) nie podniesie się (w istocie–nie ulegnie zmianie, co będzie wynikało z ogólnej teorii przedstawionej w następnej części) jeżeli dowolnie zmienimy $x(y)$ (patrz Ćwiczenie 3.2, Ćwiczenie 3.3).
Można więc nazwać tę parę równowagą Nasha dla strategii mieszanych.

Definicja 2.3. GS jest skończona jeżeli $m_i \equiv |A_i| < \infty, i = 1, 2, ...n$.

W dalszym ciągu, o ile nie będzie to powiedziane explicite inaczej, będziemy rozważać gry skończone. Definiujemy

Definicja 2.4. Strategia mieszana σ_i gracza i w grze strategiczej $GS = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ jest to rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze jego strategii czystych A_i:

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{im_i})$$

Współrzędna $\sigma_{ih} \geqslant 0$ jest prawdopodobieństwem że gracz i zagra strategią czystą (wybierze akcję) $h \in A_i$. Wprowadzamy oznaczenia:
$\Sigma_i = \{\sigma_i : A_i \to [0,1] : \sum_{k=1}^{m_i} \sigma_{ik} = 1,\ \sigma_{ik} \geqslant 0\}$– zbiór strategii mieszanych gracza i
$\sigma \equiv (\sigma_j)_{j\in N} = (\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_n)$ – profil gry
$\Sigma = \times\Sigma_i,\ i \in N$ – zbiór wszystkich profili gry
$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, ..\breve{\sigma}_i., ., \sigma_N)$ - profil strategii wszystkich graczy poza graczem i.
$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ – wypłata gracza i z profilu σ
W dalszym ciągu zamiast strategia mieszana będziemy mówić strategia. Strategia czysta jest szczególnym przypadkiem strategii mieszanej; czasami gdy będziemy chcieli podkreślić że mamy do czynienia ze strategią czystą będziemy zamiast strategia mówić strategia czysta.
Strategie mieszane opisują sytuacje w których gracze podejmują akcje z pewnym prawdopodobieństwem. Można sobie wyobrażać że każdy gracz posiada urządzenie dające rozkład p-stwa określający jego strategię mieszaną i używaja tego urządzenia do gry. Alternatywna interpretacja strategii mieszanych jest następująca. Każdemu graczowi odpowiada jedna "bardzo duża" populacja graczy. Częstość występowania w niej graczy grających każdą z akcji ze zbioru A_i jest równa p-stwu występowania tej akcji w strategii mieszanej. Gracz i losuje z tej populacji jednego gracza i gra jego strategią.
Każda strategia mieszana σ_i każdego gracza i jest opisana przez wektor pewien wektor $x_i = (x_{i1}, ..., x_{im_i})$ w przestrzeni euklidesowej R^{m_i}. Będziemy używać alternatywnie zapisu: $\sigma_i = (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{im_i})$ oraz, gdy będziemy chcieli podkreślić algebraiczną strukture wprowadzanego formalizmu, powyższej reprezentacji x_i. Profil σ gry będziemy alternatywnie oznaczać przex x, $x = (x_1, ...x_N)$. Z definicji rozkładu p-stwa mamy

$$\sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1,\ x_{ih} \geqslant 0\ \forall i \in N.$$

Współrzędna x_{ih} jest prawdopodobieństwem że gracz i zagra strategią czystą (wybierze akcję) $h \in A_i$.

Definicja 2.5. Niech $\forall i \in N\ A_i = A$, czyli zbiór akcji jest ten sam dla wszystkich graczy. GS jest symetryczna $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ \forall a = (a_1, ...a_n)$ zachodzi

$$u_j(a_1, ..., a_i, ...a_j, ...a_n) = u_i(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n).$$

Mówimy że GS jest symetryczna jeżeli wypłaty każdych dwóch graczy nie ulegają zmianie przy zamianie ról tych graczy.

Uwaga 2.3. Dla n=2 i gry symetrycznej $u_2(a_1, a_2) = u_1(a_2, a_1)$, macierze wypłat graczy są transponowane. Ogólniej, dla n=2 symetria sprowadza sie do stwierdzenia że macierze wypłat są kwadratowe i jedna powstaje z drugiej przez transpozycję.

Wypłaty graczy z profili strategii mieszanych.

Dla każdego gracza i definiujemy Δ_i - sympleks jednostkowy gracza i (sympleks strategii mieszanych gracza i) oraz Δ - sympleks strategii mieszanych GS:

Definicja 2.6.

$$\Delta_i = \{x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{m_i}) \in R^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1,\ x_{ih} \geqslant 0\ \forall\ h \in A_i\}.$$

$$\Delta = \times_i \Delta_i.$$

Tak więc elementy sympleksu jednostkowego gracza utożsamiamy z jego strategiami mieszanymi. Zbiory $\Delta_i,\ i = 1, ...n,\ \Delta$ są zwarte i wypukłe, co bedzie w szczegolności odgrywało rolę w dowodzie istnienia równowagi Nasha.

Przykład 2.3. Dla $N = \{1, 2\},\ m_1 = m_2 = 2,\ x_1 = (x_{11}, x_{12}),\ x_2 = (x_{21}, x_{22})$, sympleksy obu graczy są odcinkami o długości $\sqrt{2}$. Dla $N = \{1, 2\},\ m_1 = m_2 = 3$ sympleksy obu graczy są trójkątami równobocznymi.

Strategia czysta jest szczególnym przypadkiem strategii mieszanej. Oznaczając

$$e_i^k = (0, ...0, 1, 0, ...0) \tag{2.1}$$

- k-ty wersor w $\Re^{m_i}$, możemy zapisać wektorową reprezentację profilu $x_i = (x_{i1}, ..., x_{im_i})$ w nastepujący sposób:

$$x_i = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} e_i^k \in \Delta_i. \tag{2.2}$$

Można powiedzieć że wektor e_i^k jest strategią (mieszaną) gracza i przypisującą akcji o numerze k ze zbioru A_i prawdopodobieństwo 1, e_i^k jest k-tą strategią czystą gracza i. Dla każdego gracza i wierzchołki sympleksu Δ_i są to elementy bazy kanonicznej $\{e_i^1, ..., e_i^{m_i}\}$ przestrzeni wektorowej R^{m_i}.
Rozważmy $GS = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$. Założenie że każdy gracz podejmuje decyzję o wyborze akcji "niezależnie", bez wiedzy o wyborze innych graczy, formalizujemy w postaci tzw. *postulatu niezależności stochastycznej.*

Definicja 2.7. Niech $a = (a_1, ...a_n),\ a_i \in A_i$ - profil strategii czystych GS. Postulat niezależności statystycznej mówi że (łączne) p-stwo że 1-y gracz wybierze akcję (zagra) a_1, ..., n-ty zagra a_n jest dane wyrażeniem

$$x(a) = x_{1a_1} x_{2a_2} ... x_{na_n}$$

gdzie x_{ia_i} jest p-stwem że gracz i zagra $a_i,\ i = 1, ...n$.
W ten sposób każdemu profilowi strategii czystych $a \in A$ gry GS przyporządkowaliśmy liczbę $x(a) \geqslant 0$. Zachodzi przy tym

$$\sum_{a \in A} x(a) = 1 \tag{2.3}$$

Dla każdego gracza i procedura ta definiuje na zbiorze $A = \times A_i,\ i = 1, ...n$ profili strategii czystych gry pewną zmienna losową U_i o rozkładzie

$$(u_i(a), x(a)),\ a \in A \tag{2.4}$$

gdzie $u_i(a)$ jest wypłatą gracza i z profilu a, natomiast $x(a)$ jest zdefiniowanym wyżej prawdopodobieństwem zagrania tego profilu.

Definicja 2.8. Wypłata gracza i z profilu strategii mieszanych $x = (x_1, ...x_n)$ jest to wartość oczekiwana zmiennej losowej U_i:

$$\tilde{u}_i(x) = \sum_{a \in A} u_i(a) x(a)$$

W dalszym ciagu będziemy na ogół zastępować $\tilde{u}_i(x)$ przez $u_i(x)$, oraz pomijać jedną parę nawiasów tam gdzie nie budzi to wątpliwości. Np. zamiast $u_i((x_1, x_2))$ będziemy pisać $u_i(x_1, x_2)$. Funkcje wypłat są liniowe względem poszczególnych współrzędnych profilu gry (w dalszym ciagu będziemy używali zwrotu: wypłaty są liniowe). Mówi o tym

Stwierdzenie 2.1. *O liniowości wypłat względem każdej współrzednej pofilu*

$$\forall i \in N \quad \forall j \in N \quad u_i(x_1, ..., \sum_{k=1}^{m_j} x_{jk} e_j^k, ...x_n) = \sum_{k=1}^{m_j} x_{jk} u_i(x_1, ..., e_j^k, ..., x_n) \tag{2.5}$$

Dowód. Wykorzystując postulat niezależności statystycznej $[x(a) = x_{1a_1}...x_{ja_j}...x_{na_n}]$ prawą stronę przepisujemy w postaci

$$\sum_{k=1}^{m_j} x_{jk} \sum_{(a_1,...,\breve{a}_j,...a_n)} u_i(a_1, ..., k, ..., a_n) x_{1a_1}...1...x_{na_n}.$$

Lewa strona ma postać

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \sum_{a_j} \sum_{(a_1,...,\breve{a}_j,...a_n)} x(a) u_i(a),$$

Wyciągając x_{ja_j} z $x(a)$ przed "wewnętrzną" sumę i pamiętając że $\sum_{a_j \in A_j} x_{ja_j} = \sum_{k=1}^{m_j} x_{jk}$ otrzymujemy tezę. □

W szczególności dla $j = i$ otrzymujemy wykorzystywana w dalszych rozważaniach równość

$$\forall i \in N \quad u_i(\sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} e_i^k, x_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} u_i(e_i^k, x_{-i}).$$

Przykład 2.4. N=2. Oznaczmy A, B - macierze wypłat odpowiednio gracza 1,2. Wypłata gracza 1 z profilu $x = (x_1, x_2)$:

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{(a_1,a_2) \in A} x_{1a_1} x_{2a_2} u_1(a_1, a_2) = x_1 A x_2^T.$$

Analogicznie dla drugiego gracza $u_2(x_1, x_2) = x_1 B x_2^T$. W szczególności dla gry symetrycznej, tzn. gdy $u_1(x_1, x_2) = u_2(x_2, x_1)$, czyli $A = B^T$.

> Uwaga: (x_i, x_{-i}) oznacza profil $(x_1, x_2, ...x_n)$, a nie profil $(x_i, x_1, ...\breve{x}_i, ..., x_n)$. W szczególności, dla $n = 2, i = 2$ mamy $x_{-i} = x_1$, ale formalny zapis $u_i(x_i, x_{-i}) \equiv u_2(x_2, x_1)$ jest to wartość funkcji wypłat u_2 na profilu (w punkcie) (x_1, x_2), a nie na (x_2, x_1).

Definicja 2.9. Rozszerzenie mieszane skończonej gry strategicznej GS $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ jest to trójka

$$\tilde{GS} = \langle N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (\tilde{u}_i)_{i \in N} \rangle .$$

W dalszym ciągu rozszerzenie mieszane także oznaczamy skrótem GS.

2.4. Dominacje strategii

Definicja 2.10. Strategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ ściśle dominuje strategię $\eta_i \in \Sigma_i$ jeżeli

$$\forall \ \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\eta_i, \sigma_{-i})$$

Definicja 2.11. Strategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ słabo dominuje strategię $\eta_i \in \Sigma_i$ jeżeli

$$\forall \ \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\eta_i, \sigma_{-i})$$

oraz istnieje podprofil $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ dla którego powyższa nierówność jest ostra.

Mówimy że odpowiednie strategie η_i sa ściśle (słabo) zdominowane przez powyższe strategie σ_i. Strategia jest słabo zdominowana jeżeli istnieje inna która ją słabo dominuje.

Przykład 2.5. W DW (czysta) strategia D (i.e. $\sigma_i = (0,1), \ i = 1,2$) ściśle dominuje każdą inną strategię gracza i.

Przykład 2.6. W Słabym DW

	C	D
C	R,R	S,T
D	T,S	S,S

$T > R > S$, strategia D nie dominuje ściśle strategii C gracza. Mamy bowiem np. dla $i = 1$–ego gracza, oznaczając $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$:
$u_1(D, \sigma_2) = \beta T + (1-\beta)S$,
$u_1(C, \sigma_2) = \beta R + (1-\beta)S$,
a zatem dla $\beta = 0$, czyli dla $\sigma_2 = (0,1)$, zachodzi równość $u_1(D, \sigma_2) = u_1(C, \sigma_2)$.

Przykład 2.7. W Słabym DW (czysta) strategia $\sigma_1 = D$ słabo dominuje strategię $\eta_1 = C$ 1–go gracza. Mamy bowiem, dla $i = 1, \ \ \sigma_{-i} \equiv \sigma_2 := (\beta, 1-\beta)$, z liniowości,

$$u_1(D, \sigma_2) \geqslant u_1(C, \sigma_2),$$

oraz $\forall \sigma_2 \neq (1,0)$:

$$u_1(D, \sigma_2) > u_1(C, \sigma_2)$$

Uwaga 2.4. Scisła dominacja implikuje słabą dominację.

Definicja 2.12. Strategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ dominuje strategię $\eta_i \in \Sigma_i$ jeżeli

$$\forall \ \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\eta_i, \sigma_{-i})$$

Stwierdzenie 2.2. *Strategia mieszana która dominuje każdą strategię czystą danego gracza, dominuje każdą strategię nieszaną tego gracza.*

W szczególności strategia czysta która dominuje każdą inną strategię czystą danego gracza, dominuje każdą strategię nieszaną tego gracza. Dowód wynikający z liniowości wypłat, pomijamy.

Uwaga 2.5. Strategia ściśle zdominowana nie może wystepować w profilu równowagowym ("nie może być grana w równowadze"), gdyż gracz grający tą strategią mógłby podwyższyć swą wypłatę zmieniając ją na ścisle dominującą.
Usuwając ze zbioru strategii gracza strategię ściśle zdominowaną nie zmieniamy zbioru równowag Nasha. Jeżeli metoda eliminacji strategii ściśle zdominowanych prowadzi do jednego profilu gry, to jest on RN. Nie jest to prawda w przeciwną stronę - w wielu GS istnieją jednoznaczne RN które nie mogą być uzyskane tą metodą.

Uwaga 2.6. Algorytm usuwania strategii ściśle zdominowanych (wynik nie zależy od kolejności usuwania):
1. Jeśli nie istnieje gracz który ma strategię ściśle zdominowaną, to stop. W przeciwnym razie przejdź do p. 2.
2. Usuń tę strategię i powróć do punktu 1.

Przykład 2.8.

	L	S	R
U	4,3	5,1	6,2
M	2,1	8,4	3,6
D	3,0	9,6	2,8

Strategia R ściśle dominuje S, po usunięciu S strategia U ściśle dominuje M i D, po ich usunięciu L ściśle dominuje R. RN to profil (U,L).

Strategia czysta, jeśli nawet nie jest ścisle zdominowana przez żadną inną czystą, może być ściśle zdominowana przez mieszana, jak pokazuje

Przykład 2.9.

	L	R
U	2,0	-1,0
M	0,0	0,0
D	-1,0	2,0

M nie jest ściśle zdominowana ani przez R ani D, natomiast jest ściśle zdominowana przez strategię $\sigma = (1/2, 0, 1/2)$.

Stwierdzenie 2.3. *Strategia która nie jest strategią czystą nie może być strategią ściśle dominującą.*

Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Ćwiczenie 2.1. Znaleźć wszystkie strategie słabo zdominowane i ściśle zdominowane w Słabym Dylemacie Więźnia.

3. Równowaga Nasha

3.1. Definicje

Równowaga Nasha (RN) jest centralnym pojęciem teorii gier strategicznych.

Definicja (ważna) 3.1. Profil (strategii mieszanych) gry strategicznej σ^* jest równowagą Nasha wtedy i tylko wtedy jeżeli

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall i = 1, ...n, \ \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

Słownie: żaden z graczy nie może podwyższyć swojej wypłaty przez jednostronną (to znaczy bez zmiany strategii wszystkich innych graczy) zmianę swojej strategii.
W dalszym ciągu udowodnimy ważne twierdzenia charakteryzujące RN.

3.2. Własności RN

Definicja 3.2. Nośnik strategii mieszanej $\sigma_i = (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{im_i})$ jest to zbiór $supp\sigma_i \subset A_i$ akcji (strategii czystych gracza i) taki że akcja o numerze k z A_i należy do $supp\sigma_i \ \Leftrightarrow \sigma_{ik} > 0$.

INaczej mówiąc nosnik strategii σ_i jest to zbiór strategii czystych które sa grane z dodatnimi prawdopodobieństwami w danej strategii mieszanej σ_i.
Jeżeli używamy dla strategii mieszanej notacji x_i, to jej nośnik oznaczmy $suppx_i$. Nośnik strategii czystej jest singletonem. Można wprowadzić dodatkowe charakterystyki strategii: strategie istotnie mieszane (te które nie są czyste) i całkowicie mieszane (te których nośniki pokrywają się ze odpowiednim zbiorem strategii czystych).

Twierdzenie 3.1 (O wypłatach strategii czystych w RN)**.** *Niech*

$$x = (x_1, ...x_n), \ x_i = \sum_{k=1}^{m_i} e_i^k x_{ik}, \ i = 1, ...n$$

- profil strategii mieszanych GS. Ustalmy gracza i. Niech $e_i^{k_1}, e_i^{k_2}$ - dwie różne strategie w $suppx_i$ czyli $p_1 := x_{ik_1} > 0, \ p_2 := x_{ik_2} > 0$. Wtedy

$$x \text{ jest RN} \Rightarrow \forall i \in N \quad u_i(e_i^{k_1}, x_{-i}) = u_i(e_i^{k_2}, x_{-i}) \tag{3.1}$$

Tak więc w RN każdy gracz ma jednakowe wypłaty ze wszystkich strategii czystych z nośnika swojej strategii mieszanej którą gra w RN.

Uwaga 3.1. $u_i(e_i^{k_1}, x_{-i})$ oznacza $u_i(x_1, x_2, ..., e_i^{k_1}, ..., , x_n)$.

Dowód. ad absurdum. Niech $x = (x_1, ..., x_n)$ - RN, oraz

$$u_i(e_i^{k_1}, x_{-i}) > u_i(e_i^{k_2}, x_{-i}) \tag{3.2}$$

Definiujemy profil

$$\tilde{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, ..., x_N)$$

taki że

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{m_i} e_i^{k_i} \tilde{x}_{ik},$$

gdzie

$$\tilde{x}_{ik_1} = p_1 + p_2,$$

$$\tilde{x}_{ik_2} = 0,$$

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} \quad dla \quad j \neq k_1, j \neq k_2.$$

Pokażemy że

$$u_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) > u_i(x_i, x_{-i}) \tag{3.3}$$

czyli sprzeczność z definicją RN. Lewa strona tej nierówności ma postać:

$$L = u_i(\sum_{k=1}^{m_i} e_i^k \tilde{x}_{ik}, x_{-i}) = (p_1 + p_2) u_i(e_i^{k_1}, x_{-i}) \tag{3.4}$$

$$+ 0 \cdot u_i(e_i^{k_2}, x_{-i}) + u_i(\sum_{k \neq k_1, k \neq k_2} e_i^k x_{ik}, x_{-i}). \tag{3.5}$$

Prawa strona nierówności

$$P = u_i(\sum_{k=1}^{m_i} e_i^k x_{ik}, x_{-i}) = p_1 u_i(e_i^{k_1}, x_{-i}) + p_2 u_i(e_i^{k_2}, x_{-i}) \tag{3.6}$$

$$+ u_i(\sum_{k \neq k_1, k \neq k_2} e_i^k x_{ik}, x_{-i}), \tag{3.7}$$

a zatem z (3.2) otrzymujemy $L > P$, czyli (3.3), i.e. sprzeczność z definicją RN. □

Wniosek 3.1. *Wypłata każdego gracza w RN jest równa jego wypłacie z profilu w którym gracz ten gra dowolną strategią czystą z nośnika swojej strategii w RN, a pozostali gracze grają swoimi strategiami z RN. Mowi o tym*

Stwierdzenie 3.1 (O wypłatach w RN). *Niech*

$$x^* = (x_1^*, ...x_N^*), \ x_i^* = \sum_{k=1}^{m_i} e_i^k x_{ik}^*, \ i \in N$$

- profil strategii mieszanych GS w RN. Wypłata każdego gracza $i \in N$ z profilu x^* jest równa jego wypłacie z profilu w którym gra (dowolną) strategię czystą z $suppx_i^*$ a wszyscy inni nie zmieniają swych strategii. Formalnie:

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) = u_i(e_i^k, x_{-i}^*) \quad \forall e_i^k \in suppx_i^* \tag{3.8}$$

Mówimy, że w RN wypłata gracza jest równa wypłacie z dowolnej granej przez niego w RN strategii czystej.

Dowód. Gracz i gra w RN pewną strategią $x_i^* = \sum_{k \in suppx_i^*} x_{ik}^* e_i^k$.
Korzystając z liniowości u_i otrzymujemy

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \sum_{k \in suppx_i^*} x_{ik}^* u_i(e_i^k, x_{-i}^*) =$$

(z Twierdzenia 3.1), oznaczając s–numer dowolnej ustalonej strategii z $suppx_i^*$:

$$= \sum_{k \in suppx_i^*} x_{ik}^* u_i(e_i^s, x_{-i}^*) = u_i(e_i^s, x_{-i}^*) \sum_{k \in suppx_i^*} x_{ik}^* =$$

$$= \left(\sum_{k \in suppx_i^*} x_{ik}^* = 1 \right) u_i(e_i^s, x_{-i}^*).$$

□

Poniżej udowodnimy twierdzenie które pozwala znaleźć RN jeśli jest spełniony warunek dostateczny, oraz daje charakterystykę RN jako warunek konieczny.

Twierdzenie (ważne) 3.2 (Warunek konieczny i dostateczny RN). *Profil* $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*$ *jest RN* $\Leftrightarrow$ *dla każdego* $i \in N$
1. $u_i(s', x_{-i}^*) = u_i(s'', x_{-i}^*)$ *gdy* $s', s'' \in suppx_i^*$
2. $u_i(s', x_{-i}^*) \leqslant u_i(s'', x_{-i}^*)$ *gdy* $s' \notin suppx_i^*,\ s'' \in suppx_i^*$

Dowód.
$\Rightarrow$:
Warunek 1. jest identyczny z Twierdzeniem 3.1.
Warunek 2.: ad absurdum: w przeciwnym razie mielibyśmy

$$u_i(s', x_{-i}^*) > u_i(s'', x_{-i}^*) \ \ dla \ \ s' \notin suppx_i^*, s'' \in suppx_i^*.$$

Z Wniosku (3.1), w RN dla $s'' \in suppx_i^*$

$$u_i(s'', x_{-i}^*) = u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \equiv u_i(x^*),$$

a zatem otrzymujemy $u_i(s', x_{-i}^*) > u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$, sprzeczność z definicją RN.
$\Leftarrow$:
Ustalmy gracza i. Niech x_i^* będzie jego strategią mieszaną spełniającą warunki 1. i 2. Należy wykazać że

$$u_i(x_i, x_{-i}^*) \leqslant u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \ \ \forall x_i \in \Sigma_i.$$

Oznaczmy, pomijając dla uproszczenia notacji w obu symbolach indeks i: $S := suppx_i^*,\ a_k \equiv e_i^k$ - k-ta strategia czysta gracza i. Rozkładając $u_i(x_i, x_{-i}^*)$ względem nośnika strategii x_i^* i jego dopełnienia otrzymujemy, korzystając z liniowości u_i:

$$u_i(x_i, x_{-i}^*) = \sum_{a_k \in S} x_{ik} u_i(a_k, x_{-i}^*) + \sum_{a_k \notin S} x_{ik} u_i(a_k, x_{-i}^*),$$

gdzie zastosowaliśmy zapis $x_i = \sum_k a_k x_{ik}$.
Pierwsza suma po prawej stronie ma (z warunku 1.) postać:

$$\sum_{a_k \in S} x_{ik} u_i(a_s, x_{-i}^*) = u_i(a_s, x_{-i}^*) \sum_{a_k \in S} x_{ik},$$

gdzie a_s jest jedną ze strategii czystych z nośnika S. Druga suma spełnia (z warunku 2.) nierówność:

$$\sum_{a_k \notin S} x_{ik} u_i(a_k, x^*_{-i}) \leqslant \sum_{a_k \notin S} x_{ik} u_i(a_s, x^*_{-i}) = u_i(a_s, x^*_{-i}) \sum_{a_k \notin S} x_{ik}$$

gdzie a_s jest ustaloną strategią czystą z nośnika S. Zatem, ponieważ $A_i = S \cup \bar{S}$,

$$u_i(x_i, x^*_{-i}) \leqslant u_i(a_s, x^*_{-i}) \sum_{a_k \in A_i} x_{ik},$$

Zauważmy że dla obu profili x_i oraz x_i^* (każdy profil należy do sympleksu jednostkowego Δ_i)

$$\sum_{a_k \in A_i} x_{ik} = \sum_{a_k \in A_i} x^*_{ik} = 1,$$

a więc

$$u_i(x_i, x^*_{-i}) \leqslant u_i(a_s, x^*_{-i}) \sum_{a_k \in A_i} x^*_{ik} = \sum_{a_k \in S} u_i(a_s, x^*_{-i}) x^*_{ik} + \sum_{a_k \notin S} u_i(a_s, x^*_{-i}) x^*_{ik}.$$

Wykorzystując warunek 1. (do zamiany a_s na a_k), reprezentację $x_i^* = \sum_{a_k \in A_i} a_k x^*_{ik}$ i liniowość funkcji wypłat względem odpowiednich argunentów, przepisujemy wyrażenie po ostatnim znaku równości w postaci

$$\sum_{a_k \in S} u_i(a_k, x^*_{-i}) x^*_{ik} + \sum_{a_k \notin S} u_i(a_s, x^*_{-i}) x^*_{ik} = \sum_{a_k \in A_i} u_i(a_k, x^*_{-i}) x^*_{ik} = u_i(x^*_i, x^*_{-i}),$$

gdzie ostatnia równość wynika z liniowości wypłat. Otrzymaliśmy więc

$$u_i(x_i, x^*_{-i}) \leqslant u_i(x^*_i, x^*_{-i}).$$

Powyższe rozumowanie przeprowadzamy $\forall i \in N$. □

Pokażemy przykład zastosowania Twierdzenia 3.2.

Przykład 3.1.

	L	C	R
T	a,2	3,3	1,1
M	0,0	0,0	2,b
B	c,4	5,1	0, 7

$a, b, c \in \Re$. Nastepująca para (profil) strategii mieszanych jest RN:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = ((3/4, 0, 1/4), (0, 1/3, 2/3))$$

Dowód. Porównamy wypłaty ze strategii czystych i zastosujemy Twierdzenie 3.2. Obliczamy wypłaty ze strategii czystych gdy profil przeciwnika jest z RN. Dla gracza $i = 1$:
Wypłata z $T : 0 \cdot a + 1/3 \cdot 3 + 2/3 \cdot 1 = 5/3$
Wypłata z $M : 0 \cdot b + 1/3 \cdot 0 + 2/3 \cdot 2 = 4/3$
Wypłata z $B : 0 \cdot c + 1/3 \cdot 5 + 2/3 \cdot 0 = 5/3$
Wypłaty ze strategii czystych z $suppx_1 = \{T, B\}$ są jednakowe, wypłata z M jest niższa. Dla gracza $i = 2$ analogiczny rachunek pokazuje że wypłaty ze wszystkich strategii czystych: $u_2(x_1^*, \cdot)$ są równe 5/2, np:

$$u_2(x_1^*, L) = 2 \cdot 3/4 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1/4 = 5/2.$$

Warunki dostateczne na RN (dla drugiego gracza jest potrzebny tylko warunek 1) są więc spełnione. □

Uwaga: Jeśli w drugim wierszu zamienimy 2 na 3 to powyższy profil nie będzie RN bo $u_1((M, x_2^*)) = u_1((0,1,0),(0,1/3,2/3)) = 6/3 > 5/3$.

A oto jeszcze jedna charakterystyka RN dająca w szczególności warunek dostateczny istnienia RN.

Stwierdzenie 3.2. *Profil x^* jest RN* $\Leftrightarrow$

$$\forall i \in N, \forall e_i^k \in A_i \quad u_i(e_i^k, x_{-i}^*) \leqslant u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$$

Dowód.
$\Rightarrow$: Z definicji RN.
$\Leftarrow$: Ustalmy i. Niech $x_i = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} e_i^k$ - dowolna strategia mieszana gracza i. Obliczamy: z liniowości

$$u_i(x_i, x_{-i}^*) = \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} u_i(e_i^k, x_{-i}^*) \leqslant \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \tag{3.9}$$

$$= u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} = u_i(x_i^*, x_{-i}^*). \tag{3.10}$$

□

Istotną rolę w teorii gier strategicznych odgrywa *ścisła RN*.

Definicja 3.3. Profil $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*)$ jest ścisłą RN (SRN) $\Leftrightarrow \forall i \quad \forall x_i \neq x_i^*$

$$u_i(x_i, x_{-i}^*) < u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$$

Uwaga 3.2. RN jest SRN gdy strategia każdego gracza w RN jest JEDYNĄ najlepszą odpowiedzią na strategie wszystkich innych graczy w RN (definicja najlepszej odpowiedzi będzie podana w następnym rozdziale).
Mówimy że skończona GS jest generyczna jeśli $\forall i \in N$ funkcja wypłat u_i jest różnowartościowa.
Zachodzi:

Stwierdzenie 3.3. *SRN jest RN w strategiach czystych*

Dowód. Wsk. W przeciwnym razie w RN nośnik strategii x_i pewnego gracza i nie jest singletonem. Z Twierdzenia 3.1 wynika istnienie co najmniej dwóch różnych najlepszych odpowiedzi na x_i. □

Uwaga 3.3. SRN nie musi istnieć. Przykład: Gra Orzeł-Reszka.
RN w strategiach czystych nie musi być SRN. Przykład: W grze

	A	B
A	1,1	0,0
B	0,0	0,0

(A,A) jest SRN, (B,B) nie.
Nawet gdy GS ma dokładnie jedną RN, to ta RN nie musi być SRN. Przykład: w grze

	A	B	C
D	1,1	1,0	0,1
E	1,0	0,1	1,0

(D, A) jest (jedyną) RN, ale nie jest SRN.

Przykład 3.2. W Słabym Dylemacie Więźnia nie ma SRN. To że mieszane strategie nie są SRN wynika ze Stwierdzeniaq 3.3. Bezpośredni rachunek pokazuje że żadna z 3 czystych Rn nie jest SRN.

Definicja 3.4. Profil $\sigma^* = (\sigma_j^*)_{j \in N}$ w GS w której wszyscy gracze mają ten sam zbiór akcji (czyli $A_j = A,\ \forall j \in N$) jest symetryczną RN jeśli jest RN oraz $\sigma_i^* = \sigma_j^* \ \ \forall i, j \in A$.

Uwaga 3.4. "Większość" gier skończonych ma nieparzystą liczbę RN. Przykładem sa gry 2–osobowe dla których $\forall i \in N$ funkcja $u_i : A \to \Re$ jest różnowartościowa (gry generyczne).
Oto "kontrprzykład": GS z czterema RN ([33]):

	A	B	C
D	0,0	-1,-1	-1,-1
E	-1,-1	-1,-1	-1,-1
E	-1,-1	-1,-1	0,0

(poza trzema czystymi RN jest "częściowo mieszana" RN $(1/2, 0, 1/2)$.
Innym "kontrprzykładem" jest gra "Słaby Dylemat Więźnia", która jest modyfikacją DW z wypłatą $P = S$:

	C	D
C	R,R	S,T
D	T,S	S,S

dla $T > R > S$. Wypłata każdego gracza nie jest funkcją różnowartośiowa. Gra ma continuum RN (w tym 3 RN w strategiach czystych), patrz Cwiczenie 4.1.

W ekonomicznych zastosowaniach teorii gier istotną rolę odgrywa pojęcie Pareto-optymalności.

Definicja 3.5. Profil gry strategicznej jest Pareto-optymalny (PO) jeżeli nie istnieje profil dający conajmniej jednemu graczowi wyższą, a wszystkim innym conajmniej taką samą wypłatę. Profil gry jest Pareto-nieoptymalny jeżeli istnieje inny, lepszy dla conajmniej jednego gracza i nie gorszy dla żadnego (czyli gdy nie jest PO).

Przykład 3.3.

	L	S	R
U	4,3	5,1	6,2
M	2,1	8,4	3,6
D	3,0	9,6	2,8

(U, L) jest RN ale nie jest PO. (D, S) jest PO, ale nie jest RN.

Przykład 3.4. Gra koordynacyjna

	A	B
A	2,2	-10^{-5},0
B	-10^{-5},0	1,1

ma 2 RN w strategiach czystych. RN (A,A) jest PO, ale, zakładając wypłaty np. w PLN, nie jest to "przekonywujący" wybór w praktycznej realizacji.

Przykład 3.5. W 2-osobowym DW profil (C,C) jest PO gdyż gdy jeden z graczy sobie podwyższy wypłatę to wypłata drugiego się obniży. (C,C) jest PO, ale nie jest RN. Profil (D,D) jest RN ale nie jest PO.
W "Dylemacie Wspólnych Zasobów" (Tragedy of Commons) tzw. minimalna efektywna kooperacja (czyli profil w którym jest dokładnie tylu kooperantów ile wynosi "próg" - minimalna liczba kooperantów przy której pula jest rozdzielana między wszystkich graczy) jest jedynym profilem PO.

Dla gier o sumie stałej (patrz część 5) każdy profil jest PO (bo nie istnieje profil dający conajmniej jednemu graczowi wyższą, a wszystkim innym conajmniej taką samą wypłatę).

Ćwiczenie 3.1. Pokazać że DW nie ma innych równowag poza (D,D).
W strategiach czystych nie ma innych RN poza (D,D). Gdyby miał równowagę ściśle mieszaną (σ_1, σ_2), to dla $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$ mamy, z twierdzenia podstawowego $u_1(C, \sigma_2) = u_1(D, \sigma_2)$, czyli $R\beta + S(1-\beta) = T\beta + P(1-\beta)$, czyli $(S-P)(1-\beta) = (T-R)\beta$, sprzeczność dla DW. Dla profili w których jeden gracz gra strategią ściśle mieszaną a drugi czystą z twierdzenia–warunku koniecznego na wypłaty z obu strategii czystych pierwszego gracza byłyby jednakowe, co nie jest możliwe dla DW.

Ćwiczenie 3.2. Pokaż że w grze w Kota i Myszkę $u_M((1/2,1/2),(1/2,1/2)) \geqslant u_M((x, 1-x),(1/2,1/2))$ $\forall x \in [0,1]$, oraz $u_M((1/2,1/2),(1/2,1/2)) \geqslant u_M((1/2,1/2),(y,1-y))$ $\forall y \in [0,1]$, a zatem para strategii $((1/2,1/2),(1/2,1/2))$ jest RN (w istocie zachodzą równości).

Ćwiczenie 3.3. Ogólniejsza postać gry "W Kota i Myszkę"

	L	P
L	0,K	M,0
P	M,0	0,K

Obliczyć średnie wypłaty przy stosowaniu strategii mieszanych i znaleźć RN.

Ćwiczenie 3.4. W grze

	L	S	R
U	0,1	0,1	2,4
M	5,1	2,2	1,0
D	4,3	1,4	1,0

znaleźć RN i profile PO w strategiach czystych.
Odp.: (U,R): RN, PO. (M,S):RN ale nie PO. (D,L):PO ale nie RN.

Ćwiczenie 3.5. Znaleźć RN w grze

	L	S	R
U	1,3	1,3	1,3
M	0,0	2,2	2,2
D	0,0	0,0	3,1

Ćwiczenie 3.6. GS jest o sumie zerowej jeżeli $\forall (a_1, ..., a_n) \in A$ $\sum_{i=1}^{n} u_i(a_1, ..., a_n) = 0$. Wykaż że dla GS o sumie zerowej każdy profil jest PO.

4. Twierdzenia o istnieniu Równowagi Nasha

4.1. Preliminaria matematyczne

Odwzorowania (funkcje wielowartościowe) ze zbioru X w Y, czyli funkcje

$$\gamma : X \to 2^Y$$

będziemy oznaczać $\gamma : X \Longrightarrow Y$.

Definicja 4.1. Wykres odwzorowania $\gamma : E \Longrightarrow F,\ E, F \subset \Re^m$ jest to zbiór

$$Gr\ \gamma := \{(x, y) \in E \times F : y \in \gamma(x)\}$$

Definicja 4.2. Odwzorowanie $\gamma : E \Longrightarrow F,\ E, F \subset \Re^m$ jest domknięte w x jeżeli

$$(x^n \to x,\ y^n \to y,\ y^n \in \gamma(x^n)) \Rightarrow y \in \gamma(x).$$

Odwzorowanie γ jest domknięte jeżeli jest domknięte w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli jeżeli jego wykres, $Gr\ \gamma$ jest domknięty.

Przykład 4.1. Odwzorowanie $\gamma(x) := (0, 1),\ x \in \Re$ nie jest domknięte w $x_0 = 1$. Weźmy bowiem ciąg x^n taki że $x^n \to 1$, oraz ciąg $y^n \in \gamma(x^n) = (0, 1)$ taki że $y^n \to y := 1$. Mamy więc $y \notin \gamma(x_0)$.
Odwzorowanie $\gamma(x) := \{0\}$ dla $x = 0$, $\{1/x\}$ dla $x \in \Re \backslash \{0\}$ jest domknięte.

Twierdzenie 4.1 (Brouwer, 1905)**.** *Niech C - niepusty, zwarty i wypukły podzbiór m-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\Re^m$, $f : C \to C$ - funkcja ciągła. Wtedy funkcja f ma punkt stały, tzn.*

$$\exists x \in C : f(x) = x.$$

Przykład 4.2. Nieciągła funkcja $f : [0, 1] \to [0, 1] : f(x) = x + 1/4\ dla\ x \in [0, 1/3),\ f(x) = x - 1/4\ dla\ x \in [1/3, 1]$ nie ma punktu stałego. Jeżeli przyjmiemy jednak że wartościami f są zbiory, definiując np.

$$\tilde{f}(1/3) = [2/12, 7/12],\ \tilde{f}(x) = \{f(x)\},\ x \in [0, 1] \backslash \{1/3\},$$

to dla tak określonego odwzorowania $\tilde{f}$ istnieje $x \in [0, 1] : x \in \tilde{f}(x)$. W naszym przykładzie oczywiście $x = 1/3$.

Do dowodu twierdzenia o istnieniu RN będzie nam potrzebne uogólnienie twierdzenia Brouwera na odwzorowania. Ogólnie, niech K - dowolny zbiór.

Definicja 4.3. Odwzorowanie $\Psi : K \Longrightarrow K$ ma punkt stały $x \in K$ jeśli $x \in \Psi(x)$

Twierdzenie 4.2 (Kakutani, 1941)**.** *Niech X - niepusty, zwarty, wypukły podzbiór n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\Re^n$, $f : X \Longrightarrow X$ -odwzorowanie t. że*

1. $\forall x \in X$ zbiór $f(x)$ jest niepusty i wypukły (mówimy że odwzorowanie f jest wypukłe).

2. Wykres f jest domknięty [i.e. dla wszystkich ciągów x^n, y^n takich że $x^n \to x,\ y^n \to y,\ y^n \in f(x^n)$, zachodzi $y \in f(x)$].

Wtedy odwzorowanie f ma punkt stały (i.e. $\exists x \in X : x \in f(x)$.)

Twierdzenie Kakutaniego jest uogólnieniem na odwzorowania twierdzenia Brouwera o punkcie stałym.

4.2. Odwzorowania najlepszej odpowiedzi

W dalszych rozważaniach istotną rolę będą grały zbiory i odwzorowania najlepszych odpowiedzi. W ogólności zbiory takie mogą być puste lub zawierać wiele elementów. Podamy wpierw odpowiednie definicje dla strategii czystych, a nastepnie uogólnimy powyższe pojęcia dla strategii mieszanych.

Definicja 4.4. Dla każdego podprofilu $a_{-i} \in A_{-i},\ i \in N$ zbiór

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geqslant u_i(\tilde{a}_i, a_{-i})\ \forall \tilde{a}_i \in A_i\}$$

nazywamy zbiorem najlepszych odpowiedzi gracza i na podprofil a_{-i}.
Odwzorowanie $B_i : A_{-i} \to 2^{A_i}$ nazywamy odwzorowaniem najlepszej odpowiedzi (*best reply correspondence*) gracza i. Jego wartościami są podzbiory zbioru A_i strategii czystych gracza i.
Odwzorowanie $B : A \to \times 2^{A_i}, i \in N$ zdefiniowane wzorem

$$B(a) = \times B_i(a_{-i}),\ i \in N$$

nazywamy odwzorowaniem najlepszej odpowiedzi gry strategicznej GS.

Za pomocą odwzorowań $B_i,\ i = 1, ...n$ oraz B uzyskujemy równowane z wyjściową definicje RN.

Definicja 4.5. RN (w strategiach czystych) jest to profil $a^* = (a_1^*, ..., a_N^*)$ taki że

$$\forall i \in N \quad a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$$

lub krócej

$$a^* \in B(a^*)$$

Przykład 4.3. W grze o macierzy wypłat

	L	M
T	1,1	1,0
B	1,0	0,1

mamy

$$B_1(L) = \{T, B\},\ B_1(M) = \{T\},\ B_2(T) = \{L\},\ B_2(B) = \{M\},$$
$$B(a^*) = B((a_1^*, a_2^*)) = B_1(a_2^*) \times B_2(a_1^*)$$

Zbiór RN (w strategiach czystych) to zbiór

$$\{(a_1^*, a_2^*) : a_1^* \in B_1(a_2^*) \wedge a_2^* \in B_2(a_1^*)\} = \{(T, L)\}.$$

Dla strategii mieszanych odpowiednie definicje mają postać:

Definicja 4.6. Dla każdego podprofilu $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i},\ i \in N$ zbiór

$$B_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i})\ \forall \tilde{\sigma}_i \in \Sigma_i\}$$

nazywamy zbiorem najlepszych odpowiedzi gracza i na podprofil σ_{-i}.
Odwzorowanie $B_i : \Sigma_{-i} \to 2^{\Sigma_i}$ nazywamy odwzorowaniem najlepszej odpowiedzi gracza i. *Jego wartościami są podzbiory zbioru* Σ_i.
Odwzorowanie $B : \Sigma \to \times 2^{\Sigma_i}, i \in N$ zdefiniowane wzorem

$$B(\sigma) = \times B_i(\sigma_{-i}),\ i \in N$$

nazywamy odwzorowaniem najlepszej odpowiedzi gry strategicznej GS.

Za pomocą odwzorowań $B_i,\ i = 1, ...n$ oraz B uzyskujemy równoważną z wyjściową definicję RN.

Definicja (ważna) 4.7. RN gry strategicznej GS jest to profil $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$ taki że

$$\forall i \in N \quad \sigma_i^* \in B_i(\sigma_{-i}^*)$$

lub krócej

$$\sigma^* \in B(\sigma^*)$$

Inaczej mówiąc, RN gry strategicznej GS jest punktem stałym (wielowartościowego) odwzorowania najlepszej odpowiedzi B tej gry. W RN gracze grają wzajemnie najlepsze odpowiedzi.

Uwaga 4.1. Powyższa definicja RN jest równoważna definicji 3.1. Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

4.3. Twierdzenie Nasha

Twierdzenie (ważne) 4.3. *Twierdzenie Nasha, J. Nash, 1950*
Każda skończona $GS = < N, (\Sigma_i), (u_i) >$ *ma równowagę Nasha w strategiach mieszanych.*

Dowód. Fakt 1.
Zbiór Σ jest niepustym, zwartym i wypukłym podzbiorem skończeniewymiarowej przestrzeni euklidesowej.
Wynika to z faktu że Σ_i jest $|A_i| - 1$ - wymiarowym sympleksem, a $\Sigma = \times \Sigma_i,\ i \in N$.
Fakt 2.

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad B(\sigma) \neq \emptyset$$

By to wykazać ustalmy i. u_i jest liniowa w argumencie odpowiadającym strategii mieszanej σ_i:

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad u_i(\lambda \sigma_i' + (1 - \lambda)\sigma_i^{''}, \sigma_{-i}) = \lambda u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + (1 - \lambda) u_i(\sigma_i^{''}, \sigma_{-i})$$

i jest określona na zwartym sympleksie jednostkowym Σ_i, więc u_i, jako funkcja ciągła, osiąga maksimum na sympleksie gry Σ.
Fakt 3.
$\forall \sigma \in \Sigma$ zbiór $B(\sigma)$ jest wypukły.

By to wykazać ustalmy gracza i. Weźmy $\sigma_i^{'}, \sigma_i^{''} \in B_i(\sigma_i)$. Mamy, z definicji odwzorowania najlepszej odpowiedzi:

$$u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \text{ oraz } u_i(\sigma_i^{''}, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Stąd

$$\forall\lambda \in [0,1], \ \forall\sigma_i \in \Sigma_i \ u_i(\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i^{''}, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),$$

a zatem $\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i^{''} \in B_i(\sigma_{-i})$, czyli $B_i(\sigma_{-i})$ jest wypukły. $B(\sigma)$ jest wypukły jako iloczyn $\times B_i(\sigma_{-i})$ zbiorów wypukłych.
Fakt 4.
Odwzorowanie $B : \Sigma \to 2^\Sigma$ ma wykres domknięty.
Weźmy dwa ciągi $(\sigma^n), (\hat{\sigma}^n)$ takie, że

$$\sigma^n \longrightarrow \sigma, \quad \hat{\sigma}^n \longrightarrow \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma}^n \in B(\sigma^n).$$

Pokażemy że

$$\hat{\sigma} \in B(\sigma).$$

Pamiętajmy że zbieżność jest w odpowiedniej przestrzeni euklidesowej, a zatem zbiegają współrzędne profili, czyli strategie mieszane graczy, oraz podprofili, co będziemy wykorzystywali w dalszej części dowodu.
Załóżmy że $\hat{\sigma} \notin B(\sigma) := \times B_i(a_{-i})$.
Wtedy dla pewnego i

$$\hat{\sigma}_i \notin B_i(\sigma_i),$$

a zatem

$$\exists\epsilon > 0 \ \ \exists\sigma_i^{'} : \ u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) > u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\epsilon$$

Ponieważ u_i jest ciągła we wszystkich argumentach, więc dla dostatecznie dużych n

$$u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}^n) > u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) - \epsilon > u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\epsilon > u_i(\hat{\sigma}_i^n, \sigma_{-i}^n) + \epsilon > u_i(\hat{\sigma}_i^n, \sigma_{-i}^n).$$

W pierwszej nierówności wykorzystujemy fakt że $\sigma_{-i}^n \to \sigma_{-i}$ gdyż $\sigma^n \to \sigma$, w drugiej nierówność otrzymaną powyżej, trzecia zachodzi ponieważ założyliśmy że $(\sigma^n, \hat{\sigma}^n) \longrightarrow (\sigma, \hat{\sigma})$, czyli w szczególności zbieżność po współrzędnych: $\sigma_{-i}^n \to \sigma_{-i}, \ \ \hat{\sigma}_i^n \to \hat{\sigma}_i$. Tak więc $u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}^n) > u_i(\hat{\sigma}_i^n, \sigma_{-i}^n)$, sprzeczność z faktem że $\hat{\sigma}_i^n \in B_i(\sigma^n)$.
Konkludując, odwzorowanie $B : \Sigma \to 2^\Sigma$ jest wypukłym, domkniętym (posiadającym wykres domknięty) odwzorowaniem niepustego, zwartego i wypukłego podzbioru Σ skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej w niepusty zbiór podzbiorów Σ. Z twierdzenia Kakutaniego 4.2 o punkcie stałym

$$\exists\sigma^* \in \Sigma : \sigma^* \in B(\sigma^*),$$

a zatem σ^* jest RN. □

Uwaga 4.2. Pojęcie RN jest centralnym pojęciem teorii gier. Na ogół interesujące gry posiadają wiele równowag Nasha. Teoria gier nie posiada zadowalającego aparatu formalnego prowadzącego do wyboru takiej a nie innej RN. Problem niejednoznaczności RN jest szeroko omawiany w cytowanej w Wykładzie 1 literaturze. Problemem też jest jak "dojść" do równowagi Nasha. Pewne formalne procedury w pewnych sytuacjach daje teoria gier ewolucyjnych. Okazuje się też że (co zostało potwierdzone m. in. przez eksperymenty laboratoryjne), że ludzie często nie "grają" RN. Implikuje to konieczność dalszych badań i wprowadzenie bardziej ogólnego aparatu formalnego teorii gier, który dawałby wyniki lepiej zgadzające się z rzeczywistością.

4.4. Uogólnienia Twierdzenia Nasha

Definicja 4.8. Niech $E \subset \Re^m$ - zbiór wypukły, $f : E \to \Re$. Powiemy że
1. f jest quasi-wklęsła $\Leftrightarrow \forall\alpha \in \Re \;\; \{x \in E : f(x) \geqslant \alpha\}$ jest wypukły.
2. f jest quasi-wypukła $\Leftrightarrow \forall\alpha \in \Re \;\; \{x \in E : f(x) \leqslant \alpha\}$ jest wypukly.

Twierdzenie 4.4. *Debreu, 1952, Fan, 1952, Glicksberg, 1952 Rozważmy GS taka że $\forall i \in N \quad A_i \subset \Re^m$ są to niepuste, zwarte i wypukłe podzbiory przestrzeni euklidesowej $\Re^n$, a u_i sa ciągłe w a i quasi-wklęsłe w a_i. Wtedy istnieje RN w strategiach CZYSTYCH.*

Uwaga 4.3. Idea dowodu: ciągłość u_i implikuje że odwzorowanie B ma wykres domknięty i zbiór B jest niepusty. Quasi-wklęsłość w a_i implikuje że wartościami B_i są zbiory wypukłe.

Uwaga 4.4. f jest quasi-wypukła $\Leftrightarrow$ (-f) jest quasi-wklęsła.

Uwaga 4.5. Dasgupta, Maskin (1986) udowodnili twierdzenie o istnieniu odrzucając założenia o ciągłości wypłat (np. niespełnianego dla ważnego w ekonomii matematycznej oligopolu Bertranda). Ich słabsze założenia są spełniane w większości modeli ważnych dla zastosowań.

Ćwiczenie 4.1. Wykaż że Słaby Dylemat Więźnia ma continuum RN.

5. Gry o sumie zerowej

Dwuosobowe gry o sumie zerowej (ogólniej: o sumie stałej) byly–chronologicznie–pierwszym typem gier rozważanym przez natematyków, w szczególności w pracach J. von Neumanna w latach 20ych i 30ych XX wieku. Gry o sumie zerowej były podstawą opracowanej przez J. von Neumanna i O. Morgensterna matematycznej teorii gier [16].

5.1. Definicje

Definicja 5.1. GS jest grą o sumie stałej jeżeli

$$\exists c \in \Re: \ \forall a \in A \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(a) = c.$$

Jeśli $c = 0$ to GS nazywamy grą o zumie zerowej i oznaczamy GS0.

Gry dwuosobowe (n=2) o sumie zero nazywa się też grami ściśle konkurencyjnymi. Nazwa gry ściśle konkurencyjne wynika stąd że w takich grach interesy graczy są ”ściśle przeciwstawne”: aby uzyskać maksymalną wypłatę gracz dąży do tego by zminimalizować sumę wypłat przeciwników. W takich grach gracze mają przeciwne wypłaty:

$$u_1(a) = -u_2(a), a \in A.$$

Do takich gier można zaklasyfikować (pomijając remisy) gry towarzyskie (*parlor games*): szachy, GO, warcaby, klasyczne dwuosobowe gry karciane. ”Teoriogrowe” przykłady ściśle konkurencyjnych GS to: gra Kamień-Papier-Nożyczki, Orzeł-Reszka.
Skończone gry dwuosobowe o sumie zerowej nazywa się też grami macierzowymi.

Uwaga 5.1. Możemy sformułować równoważną definicję GS o sumie stałej używając strategii mieszanych: GS jest grą o sumie stałej jeżeli

$$\exists c \in \Re: \ \forall \sigma \in \Sigma \quad \sum_{i=1}^{n} u_i(\sigma) = c.$$

Równoważność wynika z liniowości funkcji wypłat względem poszczególnych argumentów profilu GS0.

> Wszystkie poniższe definicje, o ile nie zostanie napisane inaczej, odnoszą sie do GS0.

Uwaga 5.2. Wypłaty w takich grach możeny zapisać w formie macierzowej:

$$u_1(\sigma) = u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 A \sigma_2^T, \quad u_2(\sigma) = -u_1(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

gdzie profil σ_1 jest wektorem wierszowym, σ_2^T - wektorem kolumnowym.

Zdefiniujemy dwie liczby: v_1: maximin, oraz v_2: minimax.

Definicja 5.2.

$$v_1 := max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$v_2 := min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

v_1, v_2 nazywamy też odpowiednio dolną i górna wartością GS0.

Uwaga 5.3. Gdy zastąpimy w tej definicji Σ_i przez A_i, czyli weźmiemy pod uwagę tylko strategie czyste, to w celu obliczenia v_1 bierzemy minimum z każdego wiersza macierzy wypłat gracza 1 i z tak uzyskanej kolumny znajdujemy maksimum.

Heurystycznie, maximin v_1 jest maksymalną wypłatą gracza 1 gdy gracz 2 minimalizuje wypłaty u_1 gracza 1. Dokładniej: dla każdego profilu σ_1 gracz 1 znajduje profil σ_2 który minimalizuje u_1 a "następnie" 1 swoimi profilami σ_1 maksymalizuje u_1. Otrzymana wartość u_1 to maximin; minimax v_2 jest wynikiem procedury optymalizacyjnej gracza 2, który wpierw maksymalizuje u_1 profilami σ_1 przy ustalonym σ_2, a następnie minimalizuje u_1 swoimi profilami σ_2.
Zauważmy że v_1, v_2 można zdefiniować dla dowolnych (niekoniecznie o sumie zero) dwuosobowych GS.

Definicja 5.3. Profil (σ_1^*, σ_2^*) jest punktem siodłowym jeżeli

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leqslant u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \leqslant u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \ i = 1, 2.)$$

Wypłatę $u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ nazwiemy wartością gry (w punkcie siodłowym, *saddle point value of the game*).

Uwaga 5.4. Ponieważ

$$-u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geqslant -u_1(\sigma_1^*, \sigma_2),$$

więc, z uwagi na $u_2 = -u_1$, mamy

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geqslant u_2(\sigma_1^*, \sigma_2),$$

a zatem punkt siodłowy GS0 jest RN GS0.

5.2. Własności. Podstawowe twierdzenia

Sformułujemy podstawowe twierdzenie dla rozważanych gier.

Twierdzenie 5.1 ("O minimaksie", J. von Neumann, 1928)**.** *Dla każdej 2-osobowej skończonej GS o sumie zerowej*

1. *Istnieje punkt siodłowy.*
2. *Istnieje* $v^* \in \Re$ *taka że* $v_1 = v_2 = v^*$, *patrz Definicja 5.2.*
3. *Jeżeli* (σ_1^*, σ_2^*) *jest punktem siodłowym to* $u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v^*$.
4. (σ_1^*, σ_2^*) *jest punktem siodłowym wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sigma_1^* \in argmax_{\sigma_1} min_{\sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

oraz

$$\sigma_2^* \in argmin_{\sigma_2} max_{\sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

Punkt 1 jest szczególnym ptzypadkiem Twieredzenia Nasha.
Punkt 2. mówi że w dwuosobowych GS0 maximin i minimaks są sobie równe.
Punkt 3. mówi że v^* jest taka sama we wszystkich punktach siodłowych. W każdym punkcie siodłowym są *jednocześnie* spełnione najbardziej pesymistyczne przewidywania obu graczy. Gracz 1 otrzymuje wypłatę $u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) = v^*$, gracz 2 otrzymuje wypłatę $-u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) = -v^*$.
Punkt 4 mówi że w punkcie siodłowym gracz 1 gra strategią maximinową, gracz 2-i minimaksową.

Dowód. 1. Jest to szczególny przypadek twierdenia Nasha o istnieniu. Oryginalny dowód von Neumanna korzystał z innych technik matematycznych.
2. Wykażemy wpierw że $v_2 \geqslant v_1$. Niech $\sigma_i \in \Sigma_i, i = 1, 2$. Zachodzi

$$min_{\sigma_2' \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2') \leqslant u_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{5.1}$$

Działając na powyższą nierówność operatorem $max_{\sigma_1 \in \Sigma_1}$ otzymujemy

$$v_1 = max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} min_{\sigma_2' \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2') \leqslant max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{5.2}$$

Nierówność ta zachodzi dla każdego $\sigma_2 \in \Sigma_2$. Działając na powyższą nierówność operatorem $min_{\sigma_2 \in \Sigma_2}$ otzymujemy

$$v_1 \leqslant min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = v_2. \tag{5.3}$$

co dowodzi nierowności $v_2 \geqslant v_1$.
Pokażemy teraz że $v_1 \geqslant v_2$. Wykorzystamy fakt istnienia RN. Niech (σ_1^*, σ_2^*) będzie RN, czyli

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geqslant u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \forall \sigma_1 \in \Sigma_1, \tag{5.4}$$

oraz

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \leqslant u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \forall \sigma_1 \in \Sigma_1. \tag{5.5}$$

Zachodzi też

$$v_1 = max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1^*, \sigma_2). \tag{5.6}$$

Ponieważ, na mocy (5.5)

$$min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1^*, \sigma_2) = u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*), \tag{5.7}$$

więc

$$v_1 \geqslant u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*). \tag{5.8}$$

Z uwagi na (5.4) mamy

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \tag{5.9}$$

a więc

$$v_1 \geqslant max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \geqslant min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = v_2. \tag{5.10}$$

Wykazaliśmy $v_1 \geqslant v_2$ i $v_1 \leqslant v_2$, a zatem równość $v_1 = v_2 = v^*$.
3. Punkt 3 jest bezpośrednia konsekwencją powyższej równości. W każdej równowadze mamy więc:
Dla gracza 1:

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = v^*, \tag{5.11}$$

a dla gracza 2

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = -min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = -v^*. \tag{5.12}$$

Punkt 4 zostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

□

Definicja 5.4. Liczbę v^* nazywamy wartością (*value*) dwuosobowej GS o sumie zerowej. Wartość ściśle konkurencyjnej GS0 jest to więc wypłata gracza 1 w punkcie siodłowym.

Definicja 5.5. Strategia σ_i gracza i rozwiązująca problem

$$max_{\sigma_i} min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \quad i = 1, 2,$$

nazywa sie strategią maksyminową gracza i.

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli $v_1 = v_2$ to (każdy) profil (σ_1^*, σ_2^*), gdzie σ_i^* jest strategią maksyminową gracza i, $i = 1, 2$ jest punktem siodłowym.*

Przykład 5.1. Znajdziemy strategię maksyminową i wypłatę ze strategii maksyminowej gracza 1 (wierszowego) w grze Orzeł – Reszka.

	B	S
B	1,-1	-1,1
S	-1,1	1,-1

Niech $\sigma_1 = (p, 1-p)$, $\sigma_2 = (y, 1-y)$. Obliczamy

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = (1-2p)(1-2y).$$

Przy ustalonym p: dla $p < 1/2$ u_1 przyjmuje minimum dla $y = 1$, wynosi ono $2p - 1 < 0$. Dla $p = 1/2$ minimum u_1 wynosi 0. Dla $p > 1/2$ minimum u_1 jest dla $y = 0$ i jest mniejsze od zera. Tak więc $max_p min u_1 = 0$, strategia maksyminowa to profil $(1/2, 1/2)$ z wypłatą 0. Analogicznie postępujemy dla gracza 2.

W każdej RN GS0 gracze otrzymują takie same (przeciwne co do znaku) wypłaty. Zachodzi też interesująca własność "wymienności równowag" (*equilibrium interchangeability*). W 2-osobowych GS o sumie zerowej jeżeli gracz 1 wybierze swój profil z pewnej RN a drugi gracz wybierze swój z innej RN, to para tych profili też jest RN. Mówi o tym

Twierdzenie 5.3 (O wymienności równowag)**.** *Niech $(a, b) \in \Sigma$, $(c, d) \in \Sigma$ - dwie RN dwuosobowej GS o sumie zerowej. Wtedy profile $(a, d), (c, b)$ też są RN.*

Dowód. Niech v^* - wartość gry. W RN (a, b), ponieważ suma wypłat graczy jest zero oraz

$$u_2(a, b) \geqslant u_2(a, \tilde{b}) \;\forall\; \tilde{b} \in \Sigma_2$$

(a zatem $-u_2(a, b) \leqslant -u_2(a, \tilde{b}) \;\forall\; \tilde{b} \in \Sigma_2$), więc otrzymujemy

$$v^* = u_1(a, b) = -u_2(a, b) \leqslant -u_2(a, \tilde{b}) \;\forall\; \tilde{b} \in \Sigma_2.$$

Podstawiając $\tilde{b} = d$ otrzymujemy obustronne oszacowanie

$$v^* \leqslant -u_2(a, d) = u_1(a, d) \leqslant u_1(c, d) = v^*,$$

gdzie równość wynika z faktu że gra jest o sumie zerowej, a ostatnia nierówność z tego że (c, d) jest RN. Wypłata $u_1(a, d)$ została obustronnie oszacowana przez v^*, a zatem zachodzi równość $u_1(a, d) = v^*$. Otrzymujemy

$$u_1(a, d) = v^* = u_1(a, b) \geqslant u_1(\sigma_1, d) \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1,$$

gdzie nierówność z faktu że (a, b) jest RN. Mamy też

$$u_1(a, d) = u_1(a, b) = -u_2(a, b) \leqslant -u_2(a, \sigma_2) = u_1(a, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2,$$

nierówność wynika z faktu że (a, b) jesr RN. Mnożąc przez -1 otrzymujemy stąd

$$-u_1(a, d) \geqslant -u_1(a, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2,$$

a zatem

$$u_2(a, d) = -u_1(a, d) \geqslant -u_1(a, \sigma_2) = u_2(a, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

Profil (a, d) jest więc RN. Analogicznie dowodzimy że profil (c, b) jest RN. □

Uwaga 5.5. Dla GS0 można podać efektywne algorytmy szukanie wartości gry za pomocą programowania liniowego, patrz np. monografia Luce, Reiffa [13].

Ćwiczenie 5.1. W symetrycznej GS0 $A_1 = A_2$, $u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$ $\forall a_i \in A_i, i = 1, 2$ w mieszanej RN (jeżeli istnieje) zachodzi $u_i = 0$, $i = 1, 2$.

6. Gry Bayesa

6.1. Uwagi wstępne

W dotychchas rozpatrywanym modelu gry strategicznej gracze którzy podejmowali decyzje mieli pełną informację dotyczącą gry, w szczególności znali macierze wypłat wszystkich graczy. W wielu rzeczywistych sytuacjach w ekonomii, w polityce, w konfliktach militarnych, w relacjach społecznych gracze mają zróznicowaną informację o pewnych aspektach gry, istotnych dla podjęcia decyzji o wyborze akcji. Gry w których przynajmniej jeden gracz posiada taka informację, tzn. nieznana conajmniej jednemu innemu graczowi, będziemy nazywać grami Bayesa (*Bayesian games*), albo grami z niepełną informacją. Używa się też terminu: gry z asymetryczną informacją. W dotychczasowych rozważaniach dla GS gracze znali w szczególności akcje i wypłaty swoje i przeciwników. W rzeczywistych konfliktach często tak nie jest, walczący nie znaja siły przeciwników, firmy nie znaja kosztów produkcji konkurentów, uczestnicy aukcji nie znają waluacji obiektu aukcji przez innych uczestników aukcji. W grach opisujących takie sytuacje dochodzi więc element ryzyka związany z niepełną informacją.
W grach Bayesa definicja równowagi Nasha musi zostać zmieniona tak aby uwzględnić zróżnicowaną informację graczy o grze. Odpowiednie uogólnienie pojęcia równowagi będziemy nazywali równowagą Nasha–Bayesa, lub po prostu równowagą Bayesa. W takiej równowadze akcje graczy będa optymalne (będą najlepszymi odpowiedziami) przy ich określonych przekonaniach (*beliefs*) dotyczących innych graczy.
W formalnym modelu gry strategicznej uwzględniającym niepełną informację dojda dodatkowe obiekty–stany świata, i subiektywne, zależne od gracza prawdopodobieństwa wystąpienia różnych stanów świata. Odpowiednim modyfikacjom ulegną wypłaty, które będą wartościami oczekiwanymi odpowiednich zmiennych losowych, i w konsekwencji pojęcia najlepszej odpowiedzi.

Uwaga 6.1. Innym rodzajem niepełnej informacji o grze może być brak informacji gracza co inni gracze wiedzą o tym co wie dany gracz na temat gry. W grach ekstensywnych, będących tematem kolejnych rozdziałów, rozważa się jeszcze inny rodzaj niepewności w grze: brak pewności jaka akcję grał ostatnio przeciwnik (przeciwnicy). Gry tego typu nazwiemy grami z niedoskonałą informacją (*imperfect information*).

W poniższych przykładach (por. [17]) rozważymy gry dwuosobowe w których przynajmniej jeden gracz nie będzie miał pewności na temat wypłat swojego przeciwnika czy też partnera gry.

Przykład 6.1 (Duopol Cournota z asymetryczną informacją)**.** Niech $C_1(q_1) = cq_1$ jest funkcja kosztów 1-ej firmy. Funkcja kosztów 2-ej jest równa $C_2(q_2) = c_L q_2$ z prawdopodobieństwem p, $C_2(q_2) = c_H q_2$ z prawdopodobieństwem $1 - p$. Informacja graczy o grze jest asymetryczna w nastepującym sensie: 2 zna C_2 and C_1, 1 zna C_1 i wie że koszt koszt wyprodukowania jednostki towaru przez firmę 2 wynosi c_L z prawdopodobieństwem p, c_H z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przykładowo, firma 2 może dopiero wchodzić na rynek lub wprowadzać nową technologię produkcji rozważanego towaru. Zakładamy "common knowledge": 1 wie co 2 wie o grze, 2 wie że 1 wie co 2 wie o grze itd.

Przykład 6.2. Walka Płci (przy niepełnej informacji)

Rozważmy symetryczną GS: $N = \{1, 2\}, A_1 = A_2 = \{B, S\}$. 1-y gracz to Mężczyzna, 2-i gracz to Kobieta. B oznacza Boks, S–Siatkówkę. 1 and 2 muszą zdecydować jednocześnie: wybrać B czy S.
Gracz 1 ma macierz wypłat

	B	S
B	2	0
S	0	1

Gracz 2 może być jednym z dwóch typów: l i h (od ang.: love, hate). Gdy jest typu l to jego macierz wypłat ma postać

	B	S
B	1	0
S	0	2

a gdy typu h, to

	B	S
B	0	2
S	1	0

W tym przykładzie gracz 1 ma tylko jeden typ. Zakładamy że przy realizacji gry każdy gracz wie jakiego jest typu.
Gracz 1 nie wie z jakim typem gracza 2 będzie grał. Zakładając prawdopodobieństwo każdego typu równe (w naszym przykładzie) 0.5 i wiedząc jaką akcję wybierze (z prawdopodobieństwem 1) gracz 2 gdy jest każdego z typów, gracz 1 może obliczyć wypłaty ze swoich strategii czystych jako wartości oczekiwane zmiennej losowej "typ gracza 2".
Niech para (A,B) oznacza: gracz 2 gra A gdy jest typu l, B gdy jest typu h. Otrzymujemy macierz wartości oczekiwanych wypłat gracza 1 przy danych założeniach o graczu 2:

	(B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
B	2	1	1	0
S	0	1/2	1/2	1

Zauważmy że macierz tę można traktować jako macierz wypłat pewnej gry trzyosobowej.
Za profil strategii czystych gry przyjmiemy trójkę

$$(X, A, B) \equiv (X, (A, B)),\ \ X, A, B \in \{B, S\}.$$

Za profil rówowagowy (strategii czystych) przyjmiemy taki profil $(X, (A, B))$ dla którego:
1. Przy ustalonych akcjach (A,B) 2-ego gracza gdy jest typu odpowiednio l, h (i przy znanym graczowi 1 prawdopodobieństwie każdego typu gracza 2 (w maszym przykładzie 0.5) akcja X daje graczowi 1 maksymalna wypłatę
2. Przy ustalonej akcji X 1-ego: gdy 2-i jest typu l (typu h) to akcja A (akcja B) daje 2-emu maksymalna wypłatę.
Jak łatwo sprawdzić, w naszym przykładzie warunki te spełnia trójka $(B, (B, S))$.

6.2. Definicje

Definicja 6.1. Przekonanie (*belief*) μ_i gracza i (o akcjach pozostałych graczy) jest to rozkład prawdopodobieństwa na A_{-i}.
Gracz i jest racjonalny jeżeli wybiera strategię a_i taką że

$$a_i \in argmax_{\tilde{a}_i} E_{\mu_i(a_{-i})} u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}),$$

czyli taką która maksymalizuje wyrażenie

$$\sum_{\tilde{a}_i} u_i(\tilde{a}_i, a_{-i})\mu_i(a_{-i}).$$

Przykładowo $\{(C, 0.6), (D, 0.4)\}$ jest przekonaniem gracza 1 w grze koordynacyjnej

	C	D
C	1	0
D	0	1

Gracz 1 jest racjonalny jeżeli wybiera C.

Definicja 6.2. Niech Ω będzie zbiorem skończonym. Elementy Ω bedziemy nazywać stanami świata. Przekonanie μ_i gracza i o stanach świata jest to rozkład prawdopodobieństwa na Ω.

Definicja 6.3. Gra Bayesowska

$$GB = \langle N, \Omega, (A_i, T_i, \tau_i, p_i, u_i)_{i\in N}\rangle\,,$$

składa się z następujących elementów:
$N = \{1, ...n\}$ – skończony zbiór graczy.
Ω – skończony zbiór stanów świata.
Dla każdego gracza $i \in N$ określamy

— A_i – zbiór akcji gracza i.
— $T_i = \{t_i^1, ..., t_i^{k_i}\}$ – skończony zbiór k_i typów gracza i (sygnałów które może otrzymać). W dalszym ciągu dla uproszczenia górny wskaźnik numerujący typ będziemy pomijać.
— $\tau_i : \Omega \to T_i$ – funkcja sygnału gracza i. Przyporządkowuje ona stanom świata typ gracza i.
  Moc zbioru stanów które generują ryp t_i opisuje stopień pewności gracza i o stanie świata. Na przykład jeżeli $\tau_i(\omega_1) \neq \tau_i(\omega_2)\ \ \forall\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ to gracz i wie, po otrzymaniu sygnału, jaki jest stan świata (jaki stan "zaszedł"), a zatem zna typy wszystkich graczy.
  Jeżeli natomiast $\tau_i(\omega_1) = \tau_i(\omega_2)\ \ \forall\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ to sygnął który otrzymuje gracz (a zatem jego typ) nie daje mu żadnej informacji o stanie świata.
  W pozostałych przypadkach informacja ma charakter częściowy. Niech np. świat ma trzy stany: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\tau_i(\omega_1) \neq \tau_i(\omega_2) = \tau_i(\omega_3)$. Jeżeli świat jest w stanie ω_1, to gracz i wie że świat jest w stanie ω_1, jesli ω_2 lub ω_3 to gracz i nie wie w którym z tych stanów.
— Dla każdego typu t_i $P_i = Pr(\omega|t_i)$ jest prawdopodobieństwem apriori (*prior belief*) jakie typ t_i assigns stanowi ω.
  Funkcja sygnału τ_i wraz ze zbiorem prawdopodobieństw apriori opisują wiedzę i o stanie świata.
— $u_i : A \times \Omega \to \Re$, $A = \times A_i$, $i \in N$ – funkcja wypłat gracza i.

Gra odbywa się w następstwie realizacji pewnego stanu świata $\omega \in \Omega$.
Gracz i otrzymuje sygnał (dla uproszczenia oznaczeń pomijamy numer sygnału) $t_i = \tau_i(\omega)$, czyli jest typu t_i. Typ t_i definiuje podzbiór stanów świata $\tau_i^{-1}(t_i)$ (które implikują typ t_i). Dla każdego takiego stanu $\omega \in \tau_i^{-1}(t_i)$ otrzymujemy $Pr(\omega|t_i)$ - aprioryczne prawdobodobieństwa gracza i w stanie t_i że stan świata jest ω. Mając te prawdopodobieństwa obliczamy wypłaty gracza i.

Przykład 6.3. W rozpatrywanej grze Walka Płci (przy niepełnej informacji):
$N = \{1, 2\}$
$\Omega = \{razem, osobno\}$

$A_i = \{B, S\}, \quad i = 1, 2$
Funkcje sygnału: gracza 1: $\tau_1(razem) = \tau_1(osobno) = t_1^1,\ T_1 = \{t_1^1\}$ – gracz 1 może otrzymać tylko jeden sygnał, jest tylko jednego typu.
gracza 2: $\tau_2(razem) = l = t_2^1,\ \tau_2(osobno) = h = t_2^2,\ T = \{l, h\}$ – gracz 2 może być typu l lub typu h.
Prawdopodobieństwa aprioryczne gracza 1:

$$Pr(razem|t_1^1) = Pr(osobno|t_1^1) = 1/2.$$

Mówimy że gracz 1 przypisuje każdemu stanowi świata prawdopodobieństwo 1/2 po otrzymaniu sygnału t_1^1.
Prawdopodobieństwa aprioryczne gracza 2:

$$P(razem|t_2^1) = 1 = P(osobno|t_2^2), \quad P(osobno|(t_2^1) = P(razem|t_2^2) = 0.$$

Gracz 2 przypisuje prawdopodobieństwo 1 stanowi *razem* po otrzymaniu synału t_2^1 i stanowi *osobno* po otrzymaniu sygnału t_2^2.
Wypłaty: dla $a = (a_1, a_2),\ a_i \in \{B, S\}$:
Liczby $u_i(a, razem)$ są elementami macierzy wypłat gdy 2 jest typu l,
Liczby $u_i(a, osobno)$ są elementami macierzy wypłat gdy 2 jest typu h.

Definicja 6.4. Równowaga Nasha Gry Bayesowskiej GB jest to RN następującej GS:
Gracze: pary (i, t_i), gdzie $i \in N, \quad t_i \in T_i$
Zbiór akcji gracza (i, t_i) jest to zbiór akcji A_i gracza i w GS
Wypłaty gracza (i, t_i) definiujemy następująco:
Oznaczmy: $a_i(j, t_i) =: \hat{a}_i(\omega)$ –akcja typu t_i gracza $i,\ i \in N$.
Wypłata gracza (i, t_i) wybierającego akcję a_i jest równa

$$u_i^{t_i}(a_i, \cdot) = \sum_{\omega \in \Omega} u_i(a_i, \hat{a}_{-i}(\omega)), \omega) Pr(\omega|t_i).$$

$(a_i, \hat{a}_{-i}(\omega))$ jest profilem GS w której gracz i typu t_i gra a_i, a pozostali grają $\hat{a}_j(\omega),\ j = 1, ..., i-1, i+1, ...n$, $\hat{a}_j(\omega)$ jest wprowadzonym wyżej oznaczeniem akcji gracz j typu $\tau_j(\omega)$ gdy stan świata jest ω.
Zauważmy że $u_i^{t_i}(a_i, \cdot)$ zależy od akcji wszystkich typów wszystkich pozostałych graczy, a nie zależy od akcji żadnego z typów gracza i.

6.3. Przykłady

Przykład 6.4. W rozważanym wyżej Przykładzie 6.3 policzymy oczekiwaną wypłatę (jedynego) typu t_1^1 gracza 1 z akcji $a_1 = B$, gdy $\hat{a}_2(\omega_1) = B,\ \hat{a}_2(\omega_2) = S$:

$$u_1^{t_1}(B, \cdot) = u_1((B, B), \omega_1) Pr(\omega_1|t_1^1) + u_1((B, S), \omega_2) Pr(\omega_2|t_1^1) = 2 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1.$$

Przykład 6.5 (Battle of the Sexes (with incomplete information))**.** Niech obaj gracze mogą być jednego z dwóch typów: $l,\ h$, i że nie wiedzą jakiego typu jest przeciwnik: 1 przypisuje typowi 2-go prawdopodobieństwo 1/2, 2-i przypisuje 1-mu typ l z prawdopodobieństwem 2/3, h z prawdopodobieństwem 1/3. Gracze znają swoje typy.
Tę sytuację modelujemy jako następującą GB:
$\Omega = \{yy, yn, ny, nn\}$
$A_i = \{B, S\}, \quad i = 1, 2$
Funkcja sygnału gracza 1: $\tau_1(yy) = \tau_1(yn) =: y_1, \quad \tau_1(ny) = \tau_1(nn) =: n_1, \quad T_1 = \{y_1, n_1\}$

Funkcja sygnału gracza 2: $\tau_2(yy) = \tau_2(ny) = y_2$, $\tau_2(yn) = \tau_2(nn) =: n_2$, $T_2 = \{y_2, n_2\}$
Prawdopodobieństwa aprioryczne (beliefs) gracza 1:

$$Pr(yy|y_1) = Pr(yn|y_1) = 1/2 = Pr(ny|n_1) = Pr(nn|n_1) = 1/2$$

Prawdopodobieństwa aprioryczne (beliefs) gracza 2:

$$Pr(yy|y_2) = Pr(yn|n_2) = 2/3, \quad Pr(ny|y_2) = Pr(nn|n_2) = 1/3$$

Wypłaty: dla $a = (a_1, a_2)$, $a_i \in \{B, S\}$: liczby $u_i(a, \omega)$, $\omega \in \{yy, yn, ny, nn\}$ są elementami macierzy $M_1, ...M_4$.
M_1:

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

M_2:

	B	S
B	2,0	0,2
S	0,1	1,0

M_3:

	B	S
B	0,1	2,0
S	1,0	0,2

M_4:

	B	S
B	0,0	2,2
S	1,1	0,1

Przykład 6.6 (Duopol Cournota z asymetryczną informacją).
W Przykładzie 6.1 gra Bayesa ma postać:
$N = \{1, 2\}$, $\Omega = \{L, H\}$, $A_i = \Re_+$, $i = 1, 2$.
Funkcje sygnału: $\tau_1(H) = \tau_1(L)$, $\tau_2(L) \neq \tau_2(H)$.
Prawdopodobieństwa aprioryczne: jedyny typ gracza 1 przypisuje prwadopodobieństwo p stanowi L, $1-p$ stanowi H. Każdy typ gracza 2 przypisuje prawdopodobieństwo 1 każdemu stanowi konsystentnemu ze swoim sygnałem $Pr_2(L., t_2^1) = 1 = Pr_2(H, t_2^2)$, natomiast prawdopodobieństwo 0 w przeciwnym przypadku.
Funkcje wypłaty: $u_1(q_1, q_2) = q_1 P(Q) - cq_1$, $u_2(q_1, q_2) = q_2 P(Q) - c_I q_2$, gdzie $Q = q_1 + q_2$, $I \in \Omega$, a $P(Q)$ jest rynkową ceną jednostki towaru którego całkowita produkcja wynosi Q.

Ćwiczenie 6.1.
W duopolu Cournota z Przykładu 9.7 dla c_L, c_H dostatecznie bliskich by istniała RN z dodatnimi produkcjami znaleźć tę RN i porównać z RN gier w których 1 zna c_L i c_H.
Niech $P(Q) = \alpha - Q$ dla $Q \leqslant \alpha$, $P(Q) = 0$ dla $Q > \alpha$. Niech $(q_1^*, (q^*L, q_H^*))$ – RN. Wtedy

$$q_1^* = B_1(q_L^*, q_H^*) = max_{q_1}[pP(q_1 + q_L^*) - c)q_1 + (1-p)(P(q_1 + q_H^*) - c)q_1],$$

$q_L^* = B_L(q_1^*) = max_{q_L}[(P(q_1^* + q_L) - c_L)q_L]$
$q_H^* = B_H(q_1^*) = max_{q_H}[(P(q_1^* + q_H) - c_H)q_H]$.

Obliczając pierwsze pochodne otrzymujemy 3 równania algebraiczne na $(q_1^*, (q^*L, q_H^*))$. Ich rozwiązanie:

$$q_1^* = \frac{\alpha - 2c + pc_L + (1-p)c_H}{3}$$

$$q_L^* = (\alpha - 2c_L + c)/3 - (1-p)(c_H - c_L)/6$$

$$q_H^* = (\alpha - 2c_H + c)/3 + p(c_H - c_L)/6$$

Przypomnijmy że dla duopolu Cournota z pełną informacją gdy koszt produkcji firmy i wynosi c_i, $i = 1, 2$, to zakładając dodatniość odpowiednich wielkości produkcji, w RN wielkości te wynoszą

$$q_1^* = (\alpha - 2c_i + c_j)/3.$$

W szczególoności otrzymujemy więc

$$q_H^* > (\alpha - 2c_H + c)/3, \quad q_L^* < (\alpha - 2c_L + c)/3.$$

Przykład 6.7 (Nadmiar informacji może obniżyć wypłatę)**.**
I. Rozważmy wpierw 2-osobową GB z dwoma stanami: ω_1, ω_2, w której żaden z graczy nie zna stanu świata i każdy przypisuje prawdopodobieńtwo 1/2 każdemu z 2 stanów. Macierze wypłat odpowiadające obu stanom mają postać: M_1:

	L	M	R
T	1,2a	1,0	1,3a
B	2,2	0,0	0,3

M_2:

	L	M	R
T	1,2a	1,3a	1,0
B	2,2	0,3	0,0

gdzie $a \in (0, 1/2)$.
Najlepsza odpowiedź gracza 2 na każdą akcję 1-go to L:
jeśli 1 wybierze T, to L da 2a, M i R dadzą po 3a/2 każda.
jeśli 1 wybierze B, to L da 2, M i R dadzą po 3/2 każda.
Co więcej, najlepsza odpowiedź 1 na L to B. Ponieważ jest to jedyna najlepsza odpowiedź, więc para (par) $(B, B), (L, L))$ jest jedyną RN (także w strategiach mieszanych). W Rn każdy gracz otrzymuje 2.
II. Rozważmy teraz nastepującą modyfikację tej gry. Gracz 2 zna stan świata: $\tau_2(\omega_1) \neq \tau_2(\omega_2$. Mamy sytuację taką jak w pierwszej wersji gry Wojna Płci z niepełną informacja. Gracz 2 ma więc więcej informacji. Zakładamy że gracz 1 jest o tym poinformowany.
W tej grze $(T, (R, M))$ jest jedyną RN: każdy typ gracza 2 ma strategię ścisle dominującą, wprzy której jedyną najlepszą odpowiedzią gracza 1 jest T. W tej RN gracz 2 otrzymuje $3a$ w każdym ze stanów, a więc wypłatę niższą niż w przypadku I!

7. Gry ewolucyjne

7.1. Wprowadzenie

Początki teorii gier ewolucyjnych (TGE) sięgają lat 60ych XX wieku. Pierwotnie TGE rozwijała się w oparciu o idee i przykłady wzięte z biologii. Zasadniczym jej elementem bylo spostrzeżenie że biologiczne przystosowanie (*fitness*) gatunków zależy od interakcji które można opisać językiem teorii gier. Gracze (osobniki, geny) nie zmieniali swych strategii (np. cech w jakie geny wyposażają organizm, przykładowo gresywna, pokojowa), nie musieli wiedziec że graja w grę, a zmiana udziału strategii w populacji brała się z różnego tempa reprodukcji graczy używajacych poszczególonych strategii. W tym kontekście TGE jest związana z darwinowska teoria ewolucji, której jednym z podstawowych postulatów jest założenie że udział procentowy osobników o lepszym przystosowaniu rośnie w populacji.
J. Maynard Smith jako pierwszy w latach 60ych zaproponował wyjaśnianie zachowań zwierząt za pomocą teorii gier. O ile w interakcjach międzyludzkich gracze, agenci, to ludzie, zespoły, instytucje, mający świadomośc uczestniczenia w grze, o tyle w przypadku świata zwierzęcego, ogólniej w biologii, opisywane obiekty nie mają świadomości uczestnictwa w interakcjach które nazywamy teoriogrowymi, nie mają świadomości podejmowania decyzji, i idea opisu takich interakcji za pomocą formalizmu teorii gier miała w owym czasie charakter rewolucyjny. Jedną z inspiracji leżących u źródeł TGE były obserwacje konfliktów w świecie zwierzęcym, np. walk rytualnych, walk o terytorium, o samicę, czy o przewodnictwo w stadzie.
W naukach biologicznych powstały odrębne działy wykozystujące formalizm teorii gier, takie jak biologia ewolucyjna, ekologia ewolucyjna, patrz np. [3]. Rozwijają sie zastosowania TGE w ekonomii, patrz np. [15, 33, 25], w psychologii i w naukach społecznych. W ekonomii gracze to podmioty gospodarcze, wypłaty to zyski, a strategie to np. sposoby działania na rynku. W naukach społecznych stosuje się TGE w szczegolności do opisu, powstawania i utrzymywania się postaw kooperacyjnych i altruistycznych w społeczeństwach (ludzi, zwierzat), do opisu powstawania i ewolucji norm społecznych.
O ile w biologii czestości strategii zależą od temp reprodukcji, a mutacje mają podłoże genetyczne, to w naukach społecznych i w ekonomii zależą od możliwości imitacji jednych graczy przez drugich, oraz od możliwości indywidualnego i grupowego uczenia się (*learning*), a mutacje to np. eksperymenty, innowacje, przypadkowe błędy czy zachowania idiosynkratyczne. W ekonomii, naukach behawioralnych, stosujemy równania dynamiki imitacji, dynamiki najlepszej odpowiedzi, dynamiki wielokrotnego testowania i inne. Będzie to tematem wykładu XV.
Podstawowym pojęciem klasycznej TG jest równowaga Nasha. TG w zasadzie nie precyzuje czy, i która (gdy jest więcej niż jedna) RN jest grana, osiągana, i jeżeli gracze grają RN, to jak do niej doszli. Teoria Gier Ewolucyjnych (TGE) próbuje odpowiedzieć na te pytania. Podejście ewolucyjne polega na opisie jak zachodzą zmiany składu takich układów, jakie są stany asymptotyczne procesów ewolucyjnych, jaka jest ich stabilność itp.

Równania rozpadu promieniotwórczego i reprodukcji
Niech $N(t)$ oznacza liczbę obiektów pewnego typu w układzie w chwili t. Dla małych przyrostów czasu δ postulujemy równanie reprodukcji:

$$N(t+\delta) = N(t) + a\delta N(t), \quad N(0) = N_0.$$

Dla $\delta \to 0$ otrzymujemy równanie ewolucji

$$N'(t) = aN(t) ==> N(t) = N_0 \exp(at)$$

$a > 0$ - stała wzrostu, tempo wzrostu, wyraża sie więc wzorem

$$a = N'(t)/N(t)$$

W fizyce cząstek elementarnych rozważa sie analogiczne równanie rozpadu promieniotwórczego. Niech $N(t)$ oznacza masę cząstek elementarnych które nie uległy rozpadowi do czasu t. Załóżmy że dla bardzo małych czasów δ

$$N(t+\delta) = N(t) - \lambda\delta N(t), \quad N(0) = N_0,$$

gdzie $\lambda > 0$ - stała rozpadu promieniotwórczego. Dla $\delta \to 0$ otrzymujemy różniczkowe równanie rozpadu promieniotwórczego

$$N'(t) = -\lambda N(t) ==> N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

7.2. Scenariusz ewolucyjny. Gra Jastrząb-Gołąb

Podstawowy scenariusz ewolucyjny:
Podstawowy scenariusz ewolucyjny jest to eksperyment myślowy, wywód teoretyczny:
1. rozpatrujemy dużą populacja jednakowych graczy
2. każdy posiada jedną, niezmienną strategię
3. zakładamy łączenie losowe w pary, w parach jest jednorazowo rozgrywana 2-osobowa gra symetryczna
4. każdy gracz rodzi potomstwo (reprodukcja aseksualna), wypłata z gry jest to liczebność potomstwa.
5. potomstwo dziedziczy strategię rodzica.
6. wracamy do p. 1.

Uwaga 7.1. Bardziej skomplikowane scenariusze ewolucyjne uwzględniaja np. gry wieloosobowe, zmiany strategii przez graczy, błędy w wyborze optymalnych strategii, wprowadzają nielosowe oddziaływania (selekcja grupowa, dobór krewniaczy, sygnalny itp.)

Gra ewolucyjna jest to gra strategiczna rozgrywana w populacji osobników zgodnie z scenariuszem ewolucyjnym.

Przykład 7.1. Rozważmy dużą populację składajacą się z osobników 2 typów: A i B. Załóżmy dla uproszczenia że osobniki nie wymierają, liczba osobników każdego typu rośnie w wyniku pewnego procesu, które nazwiemy reprodukcją, procesem urodzin. Niech będzie w danej chwili t $N_A > 0$ osobników A i N_B osobników B, $N := N_A + N_B$.
Zakładamy że liczba nowych osobników typu A która powstaje w czasie pomiędzy t a $t + \Delta t$, $\Delta t << 1$ jest wprost proporcjonalna do $N_A(t)$ oraz do Δt. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy a i nazywamy tempem urodzin (*birth rate*) osobników typu A. Tempo urodzin a

osobników typu A jest więc liczbą nowych osobników typu A powstających w jednostce czasu Δt przypadających na jednego "starego" A, analogicznie b - liczba nowych osobników typu B na jednego "starego" B w Δt. Formalnie $N_A(t+\Delta t) - N_A(t) = aN_A(t)\Delta t$, a zatem w granicy

$$a = \frac{N_A'}{N_A}.$$

Wzór ten możemy przyjąć za definicję tempa urodzin dla odpowiednio gładkich funkcji (w dużych populacjach zamiast liczby osobników danego typu rozważamy ich masę). Niech $f_A(t) := N_A/N$ oznacza ułamek (częstość, proporcję, udział) osobników A w populacji w chwili t. W czasie Δt powstaje $aN_A\Delta t$ osobników typu A i $bN_B\Delta t$ osobników typu B. Po upływie Δt w populacji będzie więc $N_A + aN_A\Delta t$ osobników A oraz $N_B + bN_B\Delta t$ osobników B. Częstość osobników A będzie równa:

$$f_A(t+\Delta t) = \frac{N_A + aN_A\Delta t}{N + aN_A\Delta t + bN_B\Delta t}$$

Jak łatwo obliczyć,

$$f_A(t+\Delta t) > f_A(t) \Leftrightarrow a > b.$$

Otrzymaliśmy intuicyjnie oczywisty

Wniosek 7.1. *Częstość graczy A rośnie gdy tempo urodzin osobników A jest większe od tempa urodzin B.*

Podstawową rolę w prezentacji podstaw ewolucyjnej teorii gier będzie miala gra Jastrząb–Gołąb.

Gra Jastrząb–Gołąb. n=2 identyczne osobniki wchodzą w konflikt o pewne dobro, np. terytorium, o wartości $v > 0$. Niech $c > v$ będzie kosztem walki. Każdy gracz ma do wyboru 2 strategie czyste (akcje): strategia Jastrzębia (J) i strategia Gołębia (G). Macierz wypłat:

	J	G
J	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
G	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

Gra ma 2 "czyste" RN: $(J,G), (G,J)$ i mieszaną RN $((v/c, 1-v/c), (v/c, 1-v/c))$.

Rozważamy scenariusz ewolucyjny z grą Jastrząb–Gołąb. Mamy dużą populację składającą się z osobników A=J, i B=G, o częstościach odpowiednio p i 1-p, których losowo łączymy w pary w każdej jednostce czasu. Każda para rozgrywa jedną grę Jastrząb-Gołąb. Chcemy opisać jak będzie ewoluował skład procentowy Jastrzębi i Gołębi w populacji. Niech $p = p(t)$ oznacza częstość Jastrzębi w chwili t.
Średnie wypłata osobników grających J i G w chwili t wynoszą odpowiednio

$$W_J = p(v-c)/2 + (1-p)v, \quad W_G = p \cdot 0 + (1-p)v/2.$$

Założenie ze scenariusza ewolucyjnego, że wynikiem gry sa wypłaty w grze są mierzone liczebnością potomstwa, (dziedziczącego strategię rodzica) odpowiada paradygmatowi teorii Darwina: przystosowanie (*fitness*) jest mierzone liczebnością potomstwa. Teoriogrowym odpowiednikiem przystosowania jest wypłata. Założenie to formalnie formułujemy jako postulat:
Tempa urodzin a, b są liniowymi funkcjami średnich wypłat osobników J, G:

$$a = W_0 + W_J, \quad b = W_0 + W_G,$$

gdzie W_0 jest stałym, niezależnym od interakcji tempem urodzin (*baseline fitness*), który dodajemy by uniknąć ujemnych temp urodzin. Zauważmy że w przeciwieństwie np. do rozpadu promieniotwórczego, tempa urodzin są (przez zależność od składu populacji) zależne od czasu. Otrzymujemy

$$a - b = W_J - W_G = \frac{c}{2}(p^* - p), \quad p^* := \frac{v}{c}.$$

W szczególności, jeżeli p – częstość J w danej chwili jest niższa od p^* (i różna od zera), to częstość J rośnie w procesie ewolucyjnym. Analogicznie, jeżeli $p > p^*, \quad p \neq 1$, to częstość J maleje. dla $p = p^*$ nie zmienia się. Oznacza to że skład procentowy populacji dąży do $p^* = \frac{v}{c}$ niezależnie od składu początkowego [o ile $p(0) \in (0, 1)$, wpp. populacja składa się cały czas tylko z graczy G lub tylko z graczy J]. Wartość p^* można więc nazwać stanem równowagi. Populacja J-G o równowagowym składzie $p^* = v/c$ nie zmienia składu w scenariuszu ewolucyjnym. Odchyłka procentowego udziału każdego typu od składu równowagowego uruchamia ewolucję do składu równowagowego.

Powyższy model ewolucyjny przestawimy w języku rownań różniczkowych. Niech $N(t)$ - liczebność układu w t, $p = p(t)$–częstość strategii J, $a = a(t), b = b(t)$ - tempa urodzin odpowiednio graczy J, G. W czasie $\Delta t << 1$ urodzi się w przybliżeniu $a\Delta tp(t)N(t)$ Jastrzębi, $b\Delta t(1 - p(t))N(t)$ Gołębi. Tempo zmiany p:

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \frac{cp(1 - p)(p^* - p)}{2[1 + ap\Delta t + b(1 - p)\Delta t]}, \tag{7.1}$$

gdzie $p^* := v/c$. Dla $\Delta t \to 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe ewolucji częstości Jastrzębi

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{c}{2}p(1 - p)(p^* - p). \tag{7.2}$$

Punkty $p = p^*$, $p = 0$ i $p = 1$ są punktami stałymi (punktami równowagowymi) powyższej dynamiki w omawianym scenariuszu ewolucyjnym. Pierwszy z nich jest atraktorem, dwa pozostałe to repellery.

Uwaga 7.2. Do liczenia średnich wypłat są równoważne scenariusze:
1. Duża populacja graczy: x: częstość grających J, $1 - x$: częstość G, każdy gra stale swoja strategią
2. Duża populacja graczy, każdy gra z prawdopodobieństwem x strategię J, a z prawdopodobieństwem $1 - x$ strategię G.
3. Duża populacja graczy, osobniki grają różne strategie mieszane, ale średnio w każdej chwili czasu w x wszystkich gier jest grana strategia J, w $1 - x$ gier–strategia G.

7.3. Dynamika replikatorowa

Model dynamiki replikatorowej jest podstawowym i najbardziej znanym różniczkowym modelem TGE.
Rozważamy scenariusz ewolucyjny: GS: $< \{1, 2\}, A_i, u_i >, \quad i = 1, ...n$, n - liczba strategii czystych,
$N_i(t)$ - liczba (masa) graczy grających strategią i (masa podpopulacji i),
$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$ - liczebność populacji (masa całej populacji),
$x_i = x_i(t) = N_i/N$–częstość graczy grających i, częstość strategii i,
$x = (x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{k=1}^{n} e^k x_k \in \Delta$, - stan populacji w chwili t, e^k - k-ty wersor w $\Re^n$, Δ - sympleks jednostkowy. Gracze są nierozróżnialni, więc wersor ma tylko jeden indeks (ogólnie mieliśmy e_i^k - k-ty wersor gracza i-tego).

$u(e^i, x)$–wypłata strategii i gdy populacja jest w w stanie x. Jest to z definicji wartość oczekiwana zmiennej losowej–wypłaty gracza grającego strategią i z losowym partnerem z populacji w stanie x (i.e. x jest rozkładem tej zmiennej losowej); x_k jest prawdopodobieństwem wylosowania gracza grającego strategią k, $k = 1, ...n$). Równoważnie można powiedzieć że jest to wypłata gracza grającego i z losowo wybranym partnerem grającym strategią mieszaną x.
$u(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e^i, x)$ - średnia wypłata w populacji (średnia wypłata losowego gracza).

Uwaga 7.3. W ogólniejszym przypadku gier k-osobowych $u(e^i, x)$ jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej–wypłaty gracza grającego strategią i z $k - 1$ losowo wybranymi partnerami z populacji w stanie x.

> K. Darwin: udział procentowy osobników (czyli strategii) o lepszej adaptacji rośnie w wyniku doboru naturalnego (”lepsza adaptacja” $\equiv$ wyższe tempo urodzin $\equiv$ wyższa średnia wypłata).

W rozważanym scenariuszu ewolucyjnym postulat ten formalizujemy w następujący sposób: Tempo wzrostu liczby osobników grających strategię i w populacji w stanie x jest proporcjonalne (u nas–dla uproszczenia–równe) do wypłaty strategii i gdy populacja jest w stanie x.

$$\frac{\dot{N}_i}{N_i} = u(e^i, x), \quad i = 1, ...n$$

Obliczamy

$$N_i = x_i N, \quad \dot{N}_i = \dot{x}_i N + x_i \dot{N}, \quad N\dot{x}_i = \dot{N}_i - x_i \dot{N},$$
$$N\dot{x}_i = u(e^i, x)N_i - x_i \sum_j u(e^j, x)N_j =$$
$$= u(e^i, x)N_i - x_i \sum_j u(e^j, x)x_j N = u(e^i, x)x_i N - x_i N u(x, x).$$

Dzieląc przez N otrzymujemy

> Równania Dynamiki Replikatorowej (RDR)
>
> $$\dot{x}_i(t) = x_i[u(e^i, x) - u(x, x)], \quad i = 1, ...n.$$
>
> Słownie: tempo zmiany $\dot{x}_i/x_i$ udziału (częstości) i-tej strategii w populacji jest różnicą między wypłatą strategii i a średnią wypłatą w stanie populacji x. Częstości strategii o wypłatach powyżej (poniżej) średniej rosną (maleją).

Przypomnijmy że w podstawowym scenariuszu ewolucyjnym gracze grają w symetryczną grę dwuosobową o macierzy wypłat A. Mamy więc

$$u(e^i, x) = (Ax)_i, \quad u(x, x) = \sum x_i (Ax)_i \equiv xAx, \tag{7.3}$$

RDR przyjmuja postać

$$\dot{x}_i(t) = x_i[(Ax)_i - xAx], \quad i = 1, 2, ...n,$$

gdzie A jest macierzą wypłat rozważanej symetrycznej GS.

Uwaga 7.4.
— Udział strategii o wyższej wypłacie rośnie, patrz Ćwiczenie 7.1.

— Sympleks jednostkowy Δ jest inwariantny względem RDR, patrz Ćwiczenie 7.2.
— Jeżeli do tempa wzrostu $u(e^i, x)$ dodamy jednakową dla wszystkich strategii stałą, którą interpretujemy jako różnicę między stałym tempem urodzin i śmierci, to RDR nie ulegną zmianie, patrz Ćwiczenie 7.3.
— Strategia nieobecna pozostaje nieobecna: $x_i(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_i(t) = 0$.
— Dla n strategii otrzymujemy $n-1$ niezależnych równań różniczkowych z prawymi stronami będącymi wielomianami których stopień zależy od rzędu gry. Dla gier wieloosobowych stosujemy zamiast (7.3) definicję wypłaty jako wartości oczekiwanej. Wypłata danej strategii jest wielomianem wyższego stopnia. Dla gier k-osobowych jest to w ogólności wielomian stopnia $k+1$.
— RDR otrzymuje się też w modelach w których zmiana strategii następuje w wyniku imitacji strategii o lepszym przystosowaniu, patrz np. [11, 39] i literatura cytowana w tych monografiach.

Przykład 7.2. Gra ewolucyjna z dwiema strategiami: $x = (x_1, x_2), x_2 = 1 - x_1$. Dla gry wieloosobowej z dwiema strategiami mamy

$$\dot{x}_1(t) = x_i(1 - x_i)[u(e^1, x) - u(e^2, x)].$$

W szczególnym przypadku gry dwuosobowej z macierzą wypłat A otrzymujemy

$$\dot{x}_1(t) = x_1[(Ax)_1 - xAx] = x_1[(Ax)_1 - (x_1, x_2)((Ax)_1, (Ax)_2)]$$

$$= x_1[(Ax)_1 - x_1(Ax)_1 - x_2(Ax)_2] = x_1(1 - x_1)[(Ax)_1 - (Ax)_2].$$

Dla HD: $A = [(v-c)/2, v, 0, v/2], \quad (Ax)_1 = x_1(v-c)/2 + v(1-x_1),\ (Ax)_2 = (1-x_1)v/2,$

$$\dot{x}_1(t) = cx_1(1 - x_1)(v/c - x_1)/2$$

Dla PD: $A = [3, 1, 4, 2], \quad (Ax)_1 = 3x_1 + 1(1 - x_1),\ (Ax)_2 = 4x_1 + 2(1 - x_1),$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(1 - x_1)(0 \cdot x - 1).$$

RDR mają ciekawe własności matematyczne. Udowodnimy interesujące twierdzenie łączące "statyczne" pojęcie równowagi Nasha z "dynamicznym" pojęciem punktu krytycznego (punktu stałego) RDR.

Definicja 7.1. W grach symetrycznych 2-osobowych profil $\hat{x}$ gracza jest strategią Nasha jeżeli $(\hat{x}, \hat{x})$ jest RN.

Twierdzenie 7.1 (Strategia Nasha–punktem stałym RDR)**.** *Jeżeli* $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$ *jest strategią Nasha w dwuosobowej symetrycznej GS o* $n \times n$ *macierzy wypłat* A*, to* $\hat{x}$ *jest punktem stałym RDR*

$$\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - xAx], \quad i = 1, ...n.$$

Dowód. Niech $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$ będzie strategią Nasha. Dla $\hat{x}_i = 0$ mamy $\dot{\hat{x}}_i = 0$. Dla $\hat{x}_i \neq 0$ z Twierdzenia 3.1 (o wypłatach strategii czystych w RN) wynika istnienie stałej c takiej że

$$\forall i: \ \hat{x}_i \neq 0 \quad u(e^i, \hat{x}) = c.$$

Zauważmy że $u(e^i, \hat{x}) = (A\hat{x})_i$, a zatem

$$\hat{x}A\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i(A\hat{x})_i = \sum_{i:x_i\neq 0} x_i \cdot c = c \sum_{i:x_i\neq 0} x_i = c \cdot 1 = c,$$

a zatem $\dot{x}_i = x_i(c - c) = 0$. □

Oto kilka innych interesujących zależności między powyższymi pojęciami. Scisłe sformułowania i dowody tych i innych ciekawych faktów wiążących strategie Nasha i punkty krytyczne RDR można znaleźć np. w monografiach [11, 39].

Twierdzenie 7.2. *Dla gier symetrycznych*

Stabilne w sensie Liapunowa (neutralnie stabilne) punkty krytyczne RDR są strategiami Nasha.

Strategie Nasha będące ESS (patrz kolejny podrozdział) są lokalnie asymptotycznie stabilnymi punktami krytycznymi RDR.

Udział strategii ściśle zdominowanej maleje do zera w dynamice replikatorowej.

7.4. Strategia ewolucyjnie stabilna

John Maynard Smith w latach 1970-ych wprowadził pojęcie strategii ewolucyjnie stabilnej (ESS), uzupełniając warunek rownowagi Nasha o dodatkowy warunek stabilności. ESS odgrywa w TGE porównywalną rolę do Równowagi Nasha w klasycznej TG. Nieformalnie ESS jest to taki profil populacji, który jest odporny na inwazję (dostatecznie) małej grupy mutantów o odmiennym fenotypie. Fenotyp to np. cecha budowy ciała (wielkość osobnika, kolor skóry), agresja, altruizm, sygnał wysyłany innym zwierzęciom itp. Fenotypy są dziedziczone.

Uwaga 7.5. Do istotnych osiągnięć ESS należy wytłumaczenie dlaczego na ogół rodzi się mniej więcej tyle samo samców co samic. Okazuje się że strategia rodzenia samców i samic z jednakowym prawdopodobieństwem jest–w odpowiednim formaliźmie teoriogrowym–jedyną strategią ewolucyjnie stabilną.

Definicja (ważna) 7.2 (Maynard Smith, Price, 1973)**.** W symetrycznej 2–osobowej grze ewolucyjnej strategia $\hat{\sigma}$ jest ewolucyjnie stabilna (*ESS–Evolutionarily Stable Strategy*) jeżeli $\forall\sigma \neq \hat{\sigma}\ \exists\epsilon_0 > 0$ takiego że dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ zachodzi

$$\hat{\sigma}A[(1-\epsilon)\hat{\sigma} + \epsilon\sigma] > \sigma A[(1-\epsilon)\hat{\sigma} + \epsilon\sigma].$$

ϵ_0 nazywamy barierą inwazyjną.

Uwaga 7.6. $\sigma_1 A\sigma_2 \equiv u_1(\sigma_1, \sigma_2)$.

Twierdzenie 7.3 (Maynard Smith, 1982)**.** *Strategia $\hat{\sigma}$ jest ESS w populacji graczy łączonych losowo w pary rozgrywające symetryczną grę 2-osobową* $\Leftrightarrow$

$$(i)\quad \forall\sigma \in \Sigma,\ \hat{\sigma}A\hat{\sigma} \geqslant \sigma A\hat{\sigma};$$

$$(ii)\quad \forall\sigma \in \Sigma : \sigma \neq \hat{\sigma},\ \hat{\sigma}A\hat{\sigma} = \sigma A\hat{\sigma} \Rightarrow \hat{\sigma}A\sigma > \sigma A\sigma.$$

(i) to warunek RN, (ii)–warunek "stabilności". Gdyby (ii) nie było spełnione, strategia σ mogłaby "opanować" populację $\hat{\sigma}$ w wyniku neutralnego dryfu.
Tak więc strategia $\hat{\sigma}$ jest ewolucyjnie stabilna jeżeli 1. $\hat{\sigma}$ jest najlepszą odpowiedzią na siebie [a zatem profil $(\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$ jest RN]. 2. jeżeli inna strategia σ jest najlepszą odpowiedzią na $\hat{\sigma}$ to $u(\hat{\sigma}, \sigma) > u(\sigma, \sigma)$, czyli granie $\hat{\sigma}$ przeciwko σ daje wyższą wypłatę niż σ przeciwko σ. Jeżeli śladowe ilości mutantów grają σ w populacji grającej $\hat{\sigma}$, to ich udział w populacji maleje do zera.

Dowód. Przepiszmy definicję ESS w postaci

$$(1-\epsilon)(\hat{\sigma}A\hat{\sigma} - \sigma A\hat{\sigma}) + \epsilon(\hat{\sigma}A\sigma - \sigma A\sigma) > 0. \tag{7.4}$$

$\Leftarrow$:
Jeśli $\hat{\sigma}A\hat{\sigma} > \sigma A\hat{\sigma}$, to 7.4 zachodzi dla ϵ dostatecznie małych.
Jeśli $\hat{\sigma}A\hat{\sigma} = \sigma A\hat{\sigma}$, to 7.4 wynika z (ii).
$\Rightarrow$
Ad abs. Niech $\hat{\sigma}$ nie spełnia (i), i.e. $\exists\sigma : \hat{\sigma}A\hat{\sigma} < \sigma A\hat{\sigma}$. Wtedy

$$\forall\epsilon \in (0,1) \quad (1-\epsilon)(\hat{\sigma}A\hat{\sigma} - \sigma A\hat{\sigma}) < 0.$$

Dla dostatecznie małego ϵ wyrażenie po lewej stronie nierówności (7.4) jest więc ujemne, sprzeczność.
Niech $\hat{\sigma}$ nie spełnia (ii). Wtedy $\exists\sigma \neq \hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma}A\hat{\sigma} = \sigma A\hat{\sigma} \ \text{ i } \ \hat{\sigma}A\sigma \leqslant \sigma A\sigma.$$

Wtedy lewa strona (7.4) jest mniejsza lub równa zero, sprzeczność. □

Natychmiastową konsekwencją tego twierdzenia jest

Wniosek 7.2. *Jeżeli $\hat{\sigma}$ jest ESS to profil $(\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$ jest (symetryczną) RN.*

Wniosek 7.3. *Jeżeli profil $(\hat{\sigma}, \hat{\sigma})$ jest ścisłą RN, to $\hat{\sigma}$ jest ESS.*

Przykład 7.3. Pokażemy że $\hat{p} := (v/c, 1 - v/c)$ jest ESS w grze HD z macierzą wypłat A:

	J	G
J	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
G	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

Dla uproszczenia przyjmiemy $v = 2, c = 4$, a zatem $\hat{p} = (1/2, 1/2)$. Niech $p = (x, 1-x) \neq \hat{p}$–dowolna inna strategia. Obliczamy

$$\hat{p}A\hat{p} = pA\hat{p},$$

a zatem warunek równowagi (i) jest spełniony. Warunek stabilności sprowadza się do wykazania że $\hat{p}Ap > pAp$. Obliczamy:

$$\hat{p}Ap - pAp = (\hat{p} - p)Ap = 2(x^2 - x + \frac{1}{4}) > 0 \ dla \ x \neq \frac{1}{2}.$$

Uwaga 7.7. Powyższy rezultat wynika też z twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie 7.4. *Strategia $\hat{\sigma}$ jest ESS $\Leftrightarrow$ dla wszystkich $\sigma \neq \hat{\sigma}$ z pewnego jej otoczenia zachodzi nierówność*

$$\hat{\sigma}A\sigma > \sigma A\sigma.$$

Dla gry HD (7.4) i strategii $\hat{\sigma} = (v/c, 1 - v/c)$ obliczamy $\hat{\sigma}A\sigma - \sigma A\sigma = \frac{1}{2c}(v - cx)^2 > 0$ dla $x \neq \frac{v}{c}$.
Jedną z wad pojęcia ESS jest fakt że nie dla wszystkich klas gier ważnych w teorii i w zastosowaniach ESS istnieje.

Przykład 7.4. W grze Kamień-Papier-Nożyczki, z macierzą wypłat

	K	P	N
K	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
N	-1,1	1,-1	0,0

jedyna RN jest strategia mieszana $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$. Jest to więc jedyny kandydat na ESS. Niech $\sigma = (1, 0, 0)$ będzie czystą strategią (Kamień). Mamy

$$\sigma^* A\sigma^* = \sigma A\sigma^* (= 0).$$

$$\sigma^* A\sigma = \sigma A\sigma = 0,$$

Warunki te są sprzeczne z częścią (ii) Twierdzenia 7.3, a zatem σ^* nie jest ESS, a ponieważ σ^* była jedynym kandydatem, więc ESS nie istnieje.

Ćwiczenie 7.1. Pokaż że jeżeli $u(e^j, x) > u(e^i, x)$, to $\frac{d}{dt}\frac{x_j}{x_i} > 0$

Ćwiczenie 7.2. Pokaż inwariantność sympleksu jednostkowego względem RDR. Wsk.: wysumuj RDR po wszystkich strategiach i skorzystaj z jednoznaczności rozwiązania odpowiedniego zagadnienia Cauchy'ego.

Ćwiczenie 7.3. Niech tempo urodzin graczy o strategii i wynosi $\beta + u(e^i, x)$, gdzie β jest stała. Pokaż że RDR nie ulegają zmianie.

Ćwiczenie 7.4. RDR dla SD:

$$A = [3, 2, 4, 1] \quad (Ax)_1 = 3x_1 + 2(1 - x_1),\ (Ax)_2 = 4x_1 + 1(1 - x_1),$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1).$$

Ćwiczenie 7.5. Rozważmy grę

	A	B
A	2,2	0,0
B	0,0	0,0

w scenariuszu ewolucyjnym. Pokazać że z dwóch strategii Nasha A jest ESS, B nie.

Ćwiczenie 7.6. Omówić Twierdzenie 7.1 dla słabego Dylematu Więźnia (napisać RDR, strategie Nasha itp.).

8. Równowagi skorelowane

8.1. Wprowadzenie

Równowaga skorelowana (RS), wprowadzona przez R. Aumanna w 1974 r. jest uogólnieniem RN dla gier w których występują korelacje w odbiorze sygnałów (o stanie świata) przez graczy. Pojęcie to wymaga wprowadzenia zewnętrznego informatora (”koordynatora”, ”choreografa”), przysyłającego sygnały wpływające na decyzje graczy o wyborze strategii. Model który pozwoli na zdefiniowanie RS dopuszcza aby gracze podejmowali swoje decyzje stosując pewien stochastyczny mechanizm koordynacji wyboru akcji. W szczególności jeżeli taki mechanizm będzie asymetryczny, czyli będzie dawał inne sygnały różnym graczom, to uzyskiwane przez graczy wypłaty mogą być wyższe niż osiągalne w jakiejkolwiek istniejacej w danej grze RN.

8.2. Przykłady

Przykład 8.1.
Rozważmy dwuosobową GS o macierzy wypłat

	L	R
U	5,1	0,0
D	4,4	1,5

Gra ma 3 RN: $(U, L), (D, R), ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)$. Wypłata każdego gracza z mieszanej RN wynosi $2\frac{1}{2}$.
Załóżmy że gracze obserwują jednoczesnie ciąg realizacji zmiennej losowej: rzut monetą symetryczną, i że grają po każdej realizacji w nastepujący sposób:
Gracz 1: U jeśli wypadnie orzeł, D jeśli reszka.
Gracz 2: L jeśli wypadnie orzeł, R jeśli reszka.
Wtedy każdy ma średnią wypłatę 3.

Uwaga 8.1. Rozważmy wypukłą kombinację liniową wypłat w czysrych RN:

$$\lambda(5, 1) + (1 - \lambda)(1, 5) = (4\lambda + 1, 5 - 4\lambda) \tag{8.1}$$

Wartość λ możemy interpretować jako stopień symetrii monety–prawdopodobieństwa że wypadnie orzeł. Dla odpowiednio niesymetrycznej monety gracze mogą mieć każdą wypłatę z wypukłej kombinacji liniowej czystych RN.

Okazuje się że mając do dyspozycji pewne ”urządzenie” generujące określone sygnały (”urządzenie korelujące”) i różnicując w odpowiedni sposób informację otrzymywaną z tego urządzenia obaj gracze moga otrzymać wyższe wypłaty niż 3. Niech urządzenie generuje z jednakowym prawdopodobieństwem 3 sygnały: A, B, C. Załóżmy że jeśli zaszło A to gracz 1 wie że zaszło A, jeśli B lub C to przypisuje każdemu z nich prawdopodobieństwo 1/2. Załóżmy że jeśli zaszło C to 2 wie że zaszło C, a jeśli A lub B to przypisuje każdemu z nich prawdopodobieństwo 1/2. Niech 1 gra U gdy zaszło A, D gdy B lub C. Niech 2 gra R gdy zaszło C, L gdy A lub B. Jeżeli zaszlo A to 1 wie że 2 wie że zaszło A lub B, więc wie że 2 zagra L. U jest najlepszą odpowiedzią gracza 1.

Jesli zaszło B lub C to 1 wie tylko że zaszło jedno z nich z prawdopodobieństwem $1/2$, czyli wie że 2 zagra L z prawdopodobieństwem $1/2$ i R z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponieważ wypłata 1 jest wtedy równa 2.5 zarówno z D jak i z U, więc jest tez najlepszą odpowiedzią.
Dla gracza 2 rozumowanie jest analogiczne.
Skonstruowaliśmy nową grę, w której strategie to ciągi trzyelementowe o wyrazach: U, D dla gracza 1, R, L dla gracza 2. Para strategii: 1 gra U gdy zaszło A, D gdy B lub C. Niech 2 gra R gdy zaszło C, L gdy A lub B jest równowaga Nasha.
Mówimy że w tej równowadze akcje graczy są skorelowane. Ponieważ A, B, C zachodzą z prawdopodobieństwem $1/3$ każde, więc w tej równowadze pary akcji (U,L), (D,L) i (D,R) sa grane z prawdopodobieństwem $1/3$ każda, a para (U,R) nigdy. W tej nowej równowadze średnia wypłata każdego gracza jest równa 3 1/3, gdyż:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{3}(u_1(U,L) + u_1(D,L) + u_1(D,R)) = \frac{10}{3},$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{3}(u_2(U,L) + u_2(D,L) + u_2(D,R)) = \frac{10}{3},$$

Uwaga 8.2. Para $s^* = (s_1^*, s_2^*) = ((D,D,D),(L,L,L))$ nie jest równowagą Nasha. Mamy $u_1(s^*) = 1/3(4+4+4) = 4$, ale gdy 1 zmieni strategię na $s_1 = (U,U,U)$, to $u_1((s_1, s_2^*)) = 1/3(5+5+5) = 5$.

Uwaga 8.3. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, zmieniając rozkład prawdopodobieństwa zdarzeń: $p(A) = \alpha, p(B) = \beta, p(C) = 1 - \alpha - \beta$ możemy uzyskać dowolna wypłatę z wypukłej kombinacji $\alpha(5,1) + \beta(1,5) + (1 - \alpha - \beta)(4,4)$.

Przykład 8.2 (”Niekiedy jest lepiej wiedzieć mniej”)**.** Podamy przykład w którym jeden z graczy (trzeci) ograniczy swoją informację, a pozostali gracze będąc o tym poinformowani będa zmuszeni do zagrania w pożądany przez trzeciego gracza sposób, podwyższając wypłate wzystkich graczy w stosunku do wypłaty z RN.
Rozważmy grę trzyosobowa, w której gracz 1 gra wierszami, 2 kolumnami a 3 macierzami. Macierze wypłat graczy 1,2,3 mają postać odpowiednio:

	L	R
U	0,1,3	0,0,0
D	1,1,1	1,0,0

	L	R
U	2,2,2	0,0,0
D	2,2,0	2,2,2

	L	R
U	0,1,0	0,0,0
D	1,1,0	1,0,2

Jedyną RN jest (D, L, A), w której każdy gracz otrzymuje wypłatę 1. Niech urządzeniem korelującym będzie symetryczna moneta z wunikami O, R. Niech 1 i 2 znają wynik rzutu, a 3 nie. Otrzymujemy nową grę w której strategie graczy to odpowiednie pary akcji: np. dla gracza 1 są 4 strategie: pary (U,U), (U,D), (D,U), (D,D); dla gracza 3 strategie to pary macierzy. Pierwszy element pary to macierz którą gra 3 gdy wypadnie O, drugi–gdy R. Gracz 3 ma 8 strategii.

Stwierdzenie 8.1. *RN to trójka strategii* (s_1, s_2, s_3)*:*
s_1*: graj U jeśli O, D jeśli R*
s_2*: graj L jeśli O, R jeśli R.*
s_3*: graj drugą macierzą jeśli O, drugą macierzą jeśli R (czli graj zawsze drugą macierzą).*

Dowód. Pokażemy że strategia każdego gracza to najlepsza odpowiedż.
Gracz 1:
jeśli O to 1 wie że 2 wie że O i że 2 gra L, 3 gra drugą macierzą, a więc U daje najwyższą wypłatę.
jeśli R to 1 wie że 2 wie że R i że 2 gra R, 3 gra drugą macierzą, a więc D daje najwyższą wypłatę.
Tak więc strategia s_1 jest najlepszą odpowiedzią.
Gracz 2: analogicznie. Najwyższe wypłaty dają odpowiednio L przy O i R przy R.
Gracz 3:
wie że para graczy (1,2) gra (U,L) z prawdopodobieństwem 1/2, (D,R) z prawdopodobieństwem 1/2. Najwyższą wypłatę, równą 2, daje mu gra drugą macierzą (gracze 1 i 2 otrzymuja też po 2). □

Uwaga 8.4. Ważne jest że 1 i 2 wiedzą że 3 ma ograniczoną informację, tzn. że wiedzą że 3 nie wie czy wypadł O czy R. Gdyby 3 wiedział, czyli miał taką samą informację jak 1 i 2, to grałby nastepującą strategią $\tilde{s}_3$: graj pierwszą macierza jeśli O, trzecią jeśli R. Wtedy $(s_1, s_2, \tilde{s}_3)$ nie byłaby RN, gracze wróciliby wtedy do RN (s_1, s_2, s_3) z wypłatami po 1 dla każdego.

8.3. Definicja równowagi skorelowanej

Rozważmy $GS : \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$. Zdefiniujemy "rozszerzoną" gre, strategie i RN dla gry rozszerzonej. Wpierw zdefiniujemy

Definicja 8.1. Urządzenie korelujące jest to trójka $(\Omega, \{H_i\}, i \in N, p)$, gdzie:
Ω–skończony zbiór (stanów świata). W powyższych przykładach odpowiada realizacjom odpowiedniej zmiennej losowej.
$\{H_i\}$–podział Ω dla gracza $i \in N$. Podział $\{H_i\}$ opisuje informację gracza i o realizacji zmiennej losowej ("zajściu stanu"). Jeśli zaszedł $\omega \in \Omega$ to gracz i wie że stan który zaszedł leży w H_i, gdzie H_i jest elementem podziały H_i takim że $\omega \in H_i$.
Podział $\{H_i\}$ przyporządkowuje każdemu $\omega \in \Omega$ zbiór H_i t. że $\omega \in H_i$.

Uwaga 8.5. W Przykładzie 8.1 $\Omega = \{A, B, C\}, H_1 = \{\{A\}, \{B, C\}\}, H_2 = \{\{A, B\}, \{C\}\}$.
W Przykładzie 8.2 $\Omega = \{O, R\}, H_1 = H_2 = \{\{O\}, \{R\}\}, H_3 = \Omega$.

p–miara probabilistyczna na Ω.

Zdefiniujemy strategie czyste graczy:

Definicja 8.2. Strategia gracza i jest to funkcja $s_i : \Omega \to A_i$: jeżeli $\omega, \omega' \in h_i(\omega)$ dla pewnego $h_i \in H_i$, to $s_i(\omega) = s_i(\omega')$.
Tak więc jeżeli $\omega, \omega' \in h_i(\omega)$, to strategia s_i implikuje tę samą akcję gracza i zarówno jeżeli zaszło ω, jak i jeżeli zaszło ω'. Mówimy że strategie gracza i są adoptowane do jego zbioru informacyjnego (czyli do podziału H_i).

Definicja 8.3. $(s_1, ..., s_N)$ jest równowagą skorelowana gdy $\forall j \forall \tilde{s}_i$ (dla każdej strategii adaptowanej)

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i(\tilde{s}_i(\omega, s_{-i}(\omega)) \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u_i(s_i(\omega), s_{-i}(\omega)).$$

Uwaga 8.6. 1. W tej definicji p jest takie same dla każdego gracza i. Taką RS nazywamy obiektywną. Jeżeli dla każdego gracza mielibyśmy określona miarę p_i, to taką RS nazwiemy subiektywna.
2. p, p_i nazywamy przekonaniami (*beliefs*) graczy.

Powyższa definicja RS zależy od urządzenia korelacyjnego. Podamy definicje równoważną.

Definicja 8.4. Równowagą skorelowaną nazywamy (każdy) rozkład prawdopodobieństwa na $A := \prod A_i$ t. że $\forall i$ oraz dla każdej funkcji $d_i : A_i \to A_i$

$$\sum_{a \in A} p(a) u_i(d_i(a_i), a_{-i}) \leqslant \sum_{a \in A} p(a) u_i(a_i, a_{-i}). \tag{8.2}$$

Przykład 8.3. W grze walka płci o macierzy wypłat

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

niech $\Omega = \{x, y\}, p(x) = p(y) = 1/2, H_1 = H_2 = \{\{x\}, \{y\}\}$. RS stanowi para strategii adaptowanych $s_i(x) = B, s_i(y) = S,\ i = 1, 2$ Tę RS można interpretować tak że gracze obserwują wynik rzutu monetą symetryczna który wyznacza która z RN będzie grana.

Przykład 8.4 (RS a programowanie liniowe)**.** Rozważmy dwuosobową GS o macierzy wypłat (patrz Przykład 8.1)

	L	R
U	5,1	0,0
D	4,4	1,5

Zdefiniujemy rodzinę urządzeń korelujących. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$,
$H_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}, H_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$,
$p(\omega_1) = \alpha, p(\omega_2) = \beta, p(\omega_3) = 1 - \alpha - \beta : \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta \leqslant 1$.
Znajdziemy odpowiednie równowagi skorelowane. Rozważmy parę strategii adaptowanych
s_1: graj U gdy $\omega \in \{\omega_1\}$ (czyli $\omega = \omega_1$), D gdy $\omega \in \{\omega_2, \omega_3\}$,
s_1: graj L gdy $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$, R gdy $\omega \in \{\omega_3\}$.
Znajdziemy α, β dla których (s_1, s_2) jest Rn w grze rozszerzonej.
Rozważmy wpierw gracza 1. Jeśli $\omega = \omega_1$ to 1 wie że 2 zagra L, więc U daje najwyższą wypłatę, a zatem s_1 jest najlepszą odpowiedzią. Jeśli $\omega = \omega_2$ to 1 wie tylko że $\omega \in \{\omega_2, \omega_3\}$. Gracz 1 nie wie czy zaszło ω_2 czy ω_3 (a zatem czy 2 zagra L czy R) i oblicza te prawdopodobieństwa z wzoru Bayesa : $p(\omega_2|\omega_2 \vee \omega_3) = \frac{\beta}{\beta+1-\alpha-\beta} = \frac{\beta}{1-\alpha}$,
$p(\omega_3|\omega_2 \vee \omega_3) = \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$.
Inaczej mówiąc, gracz 1 gra przeciw strategii mieszanej gracza 2: $(p(\omega_2|\omega_2 \vee \omega_3), p(\omega_3|\omega_2 \vee \omega_3))$ i jego wypłata wynosi:
z U: $5\frac{\beta}{1-\alpha} + 0$,
z D: $4\frac{\beta}{1-\alpha} + 1\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$.
Aby para strategii adaptowanych (s_1, s_2) była RN, wypłata gracza 1 z D musi być nie mniejsza niż z U, co daje warunek

$$1 \geqslant \alpha + 2\beta. \tag{8.3}$$

Jeśli $\omega = \omega_3$ to dla gracza 1 otrzymujemy ten sam warunek.
Gracz 2:
Jeśli zaszło ω_1 to gracz 2 wie tylko, że zaszło ω_1 lub ω_2, a więc wie że gracz 1 gra:
U z prawdopodobieństwem $p(\omega_1|\omega_1 \vee \omega_2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$,
D z prawdopodobieństwem $p(\omega_2|\omega_1 \vee \omega_2) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.
Wypłaty gracza 2 przeciwko tej strategii mieszanej to:
z L: $1\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 4\frac{\beta}{\alpha+\beta}$,
z R: $0 + 5\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.
Aby s_2 było najlepszą odpowiedzią, wypłata z l musi być nie mniejsza niż z R, co implikuje nierówność:

$$1 \geqslant \alpha + 2\beta. \tag{8.4}$$

Jeśli zaszło ω_2 to otrzymujemy identyczny warunek.
Jeśli zaszło ω_3 to gracz 2 wie że zaszło ω_3, czyli że gracz 1 gra D, a więc gracz 2 zagra R. Tak więc s_2 jest najlepszą odpowiedzią.

Wniosek 8.1. *Dla każdej pary liczb $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 : \alpha + \beta \leqslant 1$: spełniającej warunki 8.3, 8.4 określona powyżej para strategii adaptowanych (s_1, s_2) jest RS.*
Srednie wypłaty graczy w tych równowagach:
Pamiętając że $p(\omega_1) = p(U, L) = \alpha, p(\omega_2 = p(D, L) = \beta, p(\omega_3) = p(D, R) = 1 - \alpha - \beta$, znajdujemy średnie wypłaty obu graczy:

$$(u_1, u_2) = (5, 1)p(\omega_1) + (1, 5)p(\omega_2) + (4, 4)p(\omega_3) = (4\alpha + 3\beta + 1, 5 - 4\alpha - \beta), \tag{8.5}$$

przy warunkach 8.3, 8.4. Jest to zagadnienie programowania liniowego. Rozwiązaniem są, w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych o osiach u_1, u_2, odcinki łączące punkty (1,5) z (10/3,10/3) oraz (10/3,10/3) z (5,1). Każdy punkt obu odcinkow odpowiada pewnej równowadze Pareto-optymalnej. W szczególności punkt (10/3,0/3) odpowiada wyborowi $\alpha = \beta = 1/3$.

Zachodzi interesujące twierdzenie, które podamy bez dowodu (patrz [19]):

Twierdzenie 8.1. *Każda wypukła kombinacja liniowa profili wypłat w RS jest profilem wypłat pewnej RS.*

Ćwiczenie 8.1. Znajdź urządzenie korelacyjne i RS w grze trzyosobowej (patrz podobny przykład 8.2) w której gracz 1 gra wierszami, 2 kolumnami a 3 macierzami. Macierze A, B, C wypłat graczy 1,2,3 mają postać odpowiednio:

A	L	R
T	0,0,3	0,0,0
B	1,0,0	0,0,0

B	L	R
T	2,2,2	0,0,0
B	0,0,0	2,2,2

C	L	R
T	0,0,0	0,0,0
B	0,1,0	0,0,3

Pokaż że RN w wyjściowej GS to $(B, L, A), (B, L, C), (T, R, A), ((T, R, C)$. Pokaż że istnieje RS w której gracz 3 gra B, gracze 1 i 2 graja (T,L) i (B,R) z prawdopodobieństwami 1/2. Wyjaśnij w jakim sensie gracz 3 woli nie wiedzieć że gracze 1 i 2 koordynują swoje akcje.
Rozwiązanie. Urządzenie korelujące: $\Omega = \{x, y\}, H_1 = H_2 = \{\{x\}, \{y\}\}, H_3 = \Omega, p(x) = p(y) = 1/2$.
RS: Trójka strategii: (s_1, s_2, s_3) :
$s_1(\{x\}) = T,\ s_1(\{y\}) = B,$
$s_2(\{x\}) = L,\ s_1(\{y\}) = R,$
$s_3(\Omega) = L.$

Uwaga 8.7. Gracz 3 wie że pary akcji gracza 1 i 2: (T,L) i (B,R) zachodzą z jednakowymi prawdopodobieństwami, więc jesli zmieni akcję na A lub C to otrzyma $3/2 < 2$.

Niech urządzeniem korelującym będzie symetryczna moneta z wynikami O, R. Niech 1 i 2 znają wynik rzutu, a 3 nie. Otrzymujemy nową gre w której strategie graczy to odpowiednie pary akcji: np. dla gracza 1 są 4 strategie: pary (U,U), (U,D), (D,U), (D,D); dla gracza 3 strategie to pary macierzy. Pierwszy element pary to macierz która gra 3 gdy wypadnie O, drugi–gdy R. Gracz 3 ma 8 strategii.

Stwierdzenie 8.2. *RN to trójka strategii* (s_1, s_2, s_3)*:*
s_1*: graj U jeśli O, D jeśli R*
s_2*: graj L jeśli O, R jeśli R.*
s_3*: graj drugą macierzą jeśli O, drugą macierzą jeśli R (czli graj zawsze drugą macierzą).*

9. Gry Ekstensywne I

9.1. Wprowadzenie

Inne używane nazwy: Gry w postaci ekstensywnej, Gry w postaci rozwiniętej, Gry Dynamiczne. (*EG: Extensive Games, Games in Extensive Form, Sequential Move(s) Game*). Będziemy używać skrótu GE.
W GS gracze podejmują decyzje jednocześnie, lub nie znając decyzji przeciwników. W GE gracze podejmują decyzje sekwencyjnie, następstwo czasowe odgrywa kluczową rolę.
Wiele sytuacji politycznych, ekonomicznych, społecznych, (np. aukcje, wspołzawodnictwo firm wprowadzających nowe technologie, negocjacje cenowe, jak równiez wiele gier towarzyskich można opisać jako gry ekstensywne.
Jeżeli nie będzie powiedziane inaczej, będziemy zakładać że gracze są w pełni racjonalni, tzn. jedynym kryterium wyboru ich strategii są wypłaty (ogólniej - preferencje) - gracze maksymalizują swoje wypłaty i nie popełniają błędów przy wyborze strategii.
Wpierw zajmiemy się GE z pełną (kompletną) informacja (*EG of (with) Complete Information, EG of (with) Perfect Information*), tzn. GE w których:
1: w każdej chwili (w każdym kroku czasowym) dokładnie jeden gracz podejmuje decyzję (jaką akcję wybiera),
2: każdy gracz zna cały dotychczasowy przebieg gry (wie który gracz jaką decyzję podjął w poprzednich chwilach w których podejmował decyzję).
3. powyższa informacja jest wspólną wiedzą (*common knowledge*).

Przykład 9.1. Ultimatum, Gra w Stonogę patrz Wykład I.

Przykład 9.2. Firma F może wynająć (W) lub nie (N) robotnika (R). Jeśli N to F i P mają wypłaty 0. Jeżeli W, to R może pracować (P) (i wtedy obaj gracze dostaja po 1), lub nie (L), co daje -1 dla F i 2 dla R.

Przykład 9.3 (Gra na Wejście (Odstraszanie) *Entry Deterrence Game*)**.** Firma F (pretendent, intruz) ma podjąć decyzję czy wejść (In) czy nie (Out) na rynek monopolisty M *incumbent* (broniacy, właściciel). F ma wartość 1, M ma wartość 2. Jeśli F wybierze Out to wypłaty graczy są równe ich wartościom. Jeśli F wybierze In to M ma do wyboru dwie akcje: Agree, z wypłatą 2 dla F i 1 dla M, lub Fight, z wypłatą 0 dla F i 0 dla M.

Podstawowe elementy GE to zbiór graczy, kolejność ich ruchów, zbiory akcji każdego gracza gdy jest jego ruch, wyniki gry, preferencje graczy na wynikach. Wszystkie te elementy GE opisuje drzewo (wykres, diagram, graf) gry (*game tree*). Drzewo gry składa się z
— węzłów (wierzchołków).
— gałęzi
— zbiorów informacyjnych.
— indykatorów graczy
— indykatorow akcji
— wypłat

Definicja 9.1. GE w których wszystkie zbiory informacyjne są singletonami i w których gracze znają wszystkie poprzednie grane akcje i graczy którzy je wykonywali nazywamy GE z doskonałą (zupełną, pełną, kompletną) informacją.

Uwaga 9.1. Jeśli gracze znają wszystkie poprzednie grane akcje i graczy którzy je wykonywali to mówimy że mają doskonałą pamięć (*perfect recall*). Na ogół zakłada się że to zachodzi (wpp. trudno o rozsądną koncepcję równowagi, czy też rozwiązania gry–trudno pogodzić racjonalność graczy i ich niedoskonałą pamięć...).

9.2. Definicja GE z Doskonałą Informacją

Pełna nazwa gier omawianych w tym rozdziale: Gry Ekstensywne z Doskonałą Informacją . Bedziemy używali w tym rozdziale skrótu: Gry Ekstensywne. Później omówimy krótko GE z Niedoskonałą Informacją.

Definicja 9.2. Gra Ekstensywna jest to czwórka ([19])

$$GE = \langle N, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle :$$

— I - zbiór graczy
— H - zbiór historii – zbiór ciagów (skończonych lub nieskończonych) t. że
  a) jeżeli ciąg $(a^k)_{k=1}^K \in H$ $(K \leqslant \infty)$ oraz $L < K$ to $(a^k)_{k=1}^L \in H$
  b) jeżeli ciąg $(a^k)_{k=1}^\infty$ spełnia $(a^k)_{k=1}^L \in H$ $\forall L > 0$ to $(a^k)_{k=1}^\infty \in H$
  Dodatkowo H zawiera pewien element, $\emptyset \in H$, nazywany "ciągiem pustym" . Jest on potrzebny by zdefiniować "poczatek gry", patrz niżej.
  Elementy zbioru H oznaczamy h i nazywamy historiami. Wyrazy każdego (niepustego) ciągu (niepustej historii) są elementami pewnego zbioru A, nazywanego zbiorem akcji. Nazywamy je akcjami (graczy).
  Potocznie mówimy: Historia jest ciągiem akcji (lub jest pusta).
  Historia $h = (a^k)_{k=1}^K$ jest zakończona (*terminal*) jeśli jest ciągiem nieskończonym (mówimy: jest nieskończona), lub jeśli nie istnieje akcja a^{K+1} t. że $(a^k)_{k=1}^{K+1} \in H$. Zbiór historii zakończonych oznaczamy Z.
— $P : H \backslash Z \to N$ - indykator gracza, funkcja gracza (*player function*). $P(h)$ zwraca numer gracza który podejmuje decyzję (wykonuje ruch) po historii h.
— $\{\preceq_i\}_{i \in N}$ - zbiór relacji preferencji na zbiorze Z. $\preceq_i$ jest relacją preferencji gracza i na zbiorze Z.
  Na zakończonych historiach definiujemy preferencje graczy przez podanie funkcji wypłat które opisują te preferencje (zgodnych z tymi preferencjami): $u_i : Z \to \Re$.

Uwaga 9.2. Ścisłą definicję GE można też podać używając formalizmu teorii grafów, patrz np. [6, 38].

Definicja 9.3. GE jest skończona jeżeli zbiór H jest skończony. GE ma skończony horyzont jeżeli najdłuższa historia jest skończona. Niekiedy warunek skończoności horyzontu jest częścią definicji gry skończonej.

Uwaga 9.3. Gra która nie jest skończona może mieć skończony horyzont. Przykład - Gra Ultimatum z przeliczalną (lub continuum) liczba ofert.

Uwaga 9.4. Definicja GE nie precyzuje zbioru akcji gracza gdy jest jego ruch (po historii $h \notin Z$). Zbiór ten można odtworzyć ze zbioru Z zakończonych historii i funkcji gracza P w następujący sposób.
Jeśli dla $h \in H$ ciąg $(h, a) \in H$ (tzn. jest historią), to akcja a jest jedną z akcji którą może grać gracz $P(h)$ po historii h. Zbiór takich akcji oznaczamy $A(h)$. Formalnie:

Definicja 9.4 ($A(h)$–zbiór akcji gracza $P(h)$ po historii h)**.** :

$$A(h) = \{a \in A : (h, a) \in H\},$$

gdzie A oznacza zbiór wszystkich wyrazów ciągów występujących w H, identyfikowany ze zbiorem wszystkich akcji wszystkich graczy .

Opis przebiegu gry:

Gra zaczyna sie od historii pustej $\emptyset$. Liczba $P(\emptyset)$ jest numerem gracza który pierwszy wykonuje ruch - wybiera akcję a^0 ze zbioru $A(\emptyset)$, która wyznacza historię $(\emptyset, a^0)$.

Uwaga 9.5. W dalszym ciagu będziemy w historiach niepustych pomijać symbol $\emptyset$, czyli np. historię $(\emptyset, a^0)$ oznaczamy (a^0), lub jeszcze krócej, symbolem a^0.

Jeśli historia $a^0 \in Z$ to gra się kończy, wpp. znajdujemy $P(a^0)$. Gracz $P(a^0)$ wybiera akcję ze zbioru $A(a^0)$. Ten wybór wyznacza następnego gracza. Ogólnie: Niech h - historia o długości k. Jeśli $h \in Z$ to gra się kończy. Wpp. gracz $P(h)$ wybiera akcję ze zbioru $A(h)$, aż uzyskamy historię zakończoną. .

Przykład 9.4. W Grze na Wejście:
$H = \{\emptyset, (\emptyset, Enter), (\emptyset, Out), (\emptyset, Enter, Agree), (\emptyset, Enter, Fight)\}$

Przebieg gry:

$P(\emptyset) = C$ (Firm, player 1)
$A(\emptyset) = \{a : (\emptyset, a) \in H\} = \{EntEnter, Out\}$
Z tego zbioru gracz C wybiera akcję a^0 która wyznacza historię $(\emptyset, a^0) \equiv a^0$. Jeśli $a^0 = Out \in Z$ to gra się kończy (indykator gracza nie jest określony na Out). Jeśli $a^0 = Enter$ to obliczamy $P(Enter) = M$, oraz

$$A(Enter) = \{a : (Enter, a) \in H\} = \{Agree, Fight\}.$$

$$Z = \{Out \equiv h_1,\ (Enter, Agree) \equiv h_2,\ (Enter, Fight) \equiv h_3\}.$$

Preferencje graczy na zakończonych historiach ustalamy w następujący sposób :

$$h_2 \succeq_1 h_1 \succeq_1 h_3, \qquad h_1 \succeq_2 h_2 \succeq_2 h_3.$$

Wprowadzamy funkcje wypłat zgodne z tymi preferencjami:

$$u_C(Out) = 1,\ \ u_C(Enter, Agree) = 2,\ \ u_C(Enter, Fight) = 0,$$

$$u_M(Out) = 2,\ \ u_M(Enter, Agree) = 1,\ \ u_M(Enter, Fight) = 0.$$

9.3. Strategie w GE

W GE podstawową rolę będzie odgrywało pojęcie strategii. Strategia gracza to przepis, algorytm, którą akcję ma wybrać w każdej chwili w której w której przypada jego ruch, czyli kompletny plan akcji "na całą grę", na wszystkie możliwe sytuacje w grze. Akcja gracza (decyzja, wybór, ruch, posunięcie) to element ze zbioru akcji gracza. Strategia gracza w GE określa przede wszystkim akcję gracza po każdej historii po której jest jego ruch.
Formalne definicje będą podane niżej.
.

Przykład 9.5. Pieszy ma 2 akcje: może na światłach przejść przez jezdnię (P) lub nie (N), the światła mogą być C, Ż lub Z. Strategie pieszego to wektory (a_1, a_2, a_3), $a_i \in \{C, N\}$, a_1 jest akcją jeśli R, a_2 - jeśli Ż, a_3 - jeśli Z. Pieszy ma 2^3 strategii. Na przykład (P, P, P) - nieuważanie, (N, N, N) - pasywna, (N, N, P) - postępuj zgodnie z prawem, (P, P, N) - szalona1, (P, N, N) - szalona2 itd.

Przykład 9.6. Jeżeli partia szachów kończyłaby się po pierwszym ruchu czarnych to białe miałyby 20 strategii, a czarne 20^{20} strategii. W "jednoruchowej" grze w GO (bez handicapów) białe mają 361, a czarne 361^{360} strategii.
Gra Kółko i krzyżyk (*noughts and crosses*). Gracz 1 (np. "kółkowy") ma w 1-ym ruchu 9 akcji. Gracz 2 ma w swym 1-ym ruchu 8 akcji. Jeżeli gra kończyłaby się po 1-ym ruchu gracza 2 to ma on 8^9 strategii. Jeżeli po 2-im ruchu gracza 1 to w takiej grze gracz 1 ma $9 \times 7^8 = 518832209$ strategii.

Do formalnej definicji strategii będzie nam potrzebna

Definicja 9.5 (A_i - zbiór (wszystkich) akcji gracza i)**.**

$$A_i := \{a \in A : \exists h \in H \backslash Z \quad P(h) = i \ \wedge \ (h, a) \in H\}$$

Uwaga 9.6. W powyższej definicji zamiast $\exists h \in H \backslash Z$ można napisać $\exists h \in H$.
Dla $h \in H \backslash Z : P(h) = i$ definiujemy

Definicja 9.6 ($A_i(h)$ - zbiór akcji gracza i po historii h)**.**

$$A_i(h) := \{a \in A_i : \ (h, a) \in H\}$$

Definicja (ważna) 9.7. Strategia gracza i w GE jest to funkcja

$$s_i : \{h : P(h) = i\} \to A_i : \quad s_i(h) \in A_i(h).$$

W pewnym sensie definicja strategii jest "nadokreślona" , może specyfikować akcje które nie będą grane jeżeli były grane wcześniej inne akcje determinowane przez daną strategie (Przykład 9.8 poniżej). Taka definicja jest potrzebna do sformułowania pojęcia równowagi (Nasha) w grach ekstensywnych, a następnie równowagi doskonałej ze względu na podgry.

Przykład 9.7. Targ (*Bargaining Game*) Gracz 1 (Klient) ocenia wartość przedmiotu sprzedawanego przez gracza 2 (Sprzedawca) na 600. Przedmiot ma dla gracza 2 wartość 50. Gracz 1 może złożyć dwie oferty: zapłaci 100 (C) lub 500 (D). Gracz 2 może w przypadku każdej z ofert zgodzić się na sprzedaż (E w przypadku oferty C, G w przypadku oferty D) lub nie (F w przypadku oferty C, H w przypadku oferty D). Akcja E implikuje wypłaty ("czyste zyski") graczy: (500, 50), gdzie pierwszy element oznacza wypłatę gracza 1, oferta F implikuje wypłaty (0,0), G: (100, 450), H: (0,0). W tej GE:
$H = \{\emptyset, (C), (D), (C, E), (C, F), (D, G), (D, H)\}$,
$H \backslash Z = \{\emptyset, (C), (D)\}$, gdzie (C), (D) - ciągi jednowyrazowe.
Strategie gracza 2 to funkcje $s_2 : \{h : P(h) = 2\} \to A_2$, takie że

$$s_2(h) \in A_2(h) := \{a \in A_2 : (h, a) \in H \wedge P(h) = 2\},$$

gdzie

$$\{h : P(h) = 2\} = \{C, D\},$$

$$A_2 = \{E, F, G, H\},$$

$$A_2(C) = \{a \in A_2 : (C, a) \in H\} = \{E, F\},$$

$$A_2(D) = \{a \in A_2 : (D, a) \in H\} = \{G, H\},$$

Tak więc $s_2(C) \in \{E, F\}$, $\ s_2(D) \in \{G, H\}$, a zatem gracz 2 ma 4 strategie:

$$s_2^1(C) = E, \quad s_2^1(D) = G \quad \equiv EG,$$

$$s_2^2(C) = E, \quad s_2^2(D) = H \quad \equiv EH,$$

$$s_2^3(C) = F, \quad s_2^3(D) = G \quad \equiv FG,$$

$$s_2^4(C) = F, \quad s_2^4(D) = H \quad \equiv FH.$$

Strategie gracza 1 to funkcje $s_1 : \{h : P(h) = 1\} \to A_1$, takie że

$$s_1(h) \in A_1(h) := \{a \in A_1 : (h, a) \in H \wedge P(h) = 1\},$$

gdzie

$$\{h : P(h) = 1\} = \{\emptyset\},$$

$$A_1(\emptyset) = \{C, D\}.$$

Ma być $s_1(h) \in A_1(\emptyset)$, a zatem gracz 1 ma dwie strategie: $s_1^1,\ s_1^2$:

$$s_1^1(\emptyset) = C, \ s_1^2(\emptyset) = D.$$

Oznaczamy je C, D, w odróżnieniu od niezakończonych historii $(C), (D)$.

W powyższym przykładzie strategia gracza może być opisana jako "plan akcji na wszystkie sytuacje". W ogólności strategia ma ogólniejsze znaczenie.

Przykład 9.8. $N = \{1, 2\}$. Niech $P(\emptyset) = 1$. Jeśli gracz 1 gra D to otrzymujemy historię zakończoną ("gra się kończy"), wypłaty graczy to (2,0), gdzie pierwszy element oznacza wypłatę gracza 1. Jeśli 1 gra C, to określamy $P(C) = 2$, czyli ma ruch gracz 2. Gracz 2-i ma do wyboru dwie akcje: E i F. Jeśli zagra F to gra się kończy i wypłaty są (3,1), jeśli zagra E to otrzymujemy historię niezakończoną (C, E) , z $P((C, E)) = 1$, po której gracz 1-y ma do wyboru dwie akcje: G i H. Jeśli zagra G to wypłaty są (1,2), jeśli H to wypłaty są (0,0). W obu przypadkach gra się kończy.
Gracz 1 ma ruch po historii $h_1 = \emptyset$ i po $h_2 = (C, E)$ (pomijamy w oznaczeniach historii niepustych symbol $\emptyset$).
Każda strategia gracza 1 to funkcja:

$$s_1 : \{h_1, h_2\} \to A_1 = \{C, D, G, H\} : \quad s_1(h) \in A_i(h),$$

czyli, pamiętając że $h_1 = \emptyset, \ h_2 = (C, E)$,

$$s_1(\emptyset) \in A_1(\emptyset) = \{C, D\}, \quad s_1((C, E)) \in A_1((C, E)) = \{G, H\}.$$

Takich funkcji jest 4, więc gracz 1 ma 4 strategie $s_1^i, \ i = 1, ...4$, oznaczane kolejno CG, CH, DG, DH:
CG: wybierz C po historii $\emptyset$ i G po (C,E)
CH: wybierz C po historii $\emptyset$ i H po (C,E)
DG: wybierz D po historii $\emptyset$ i G po (C,E)
DH: wybierz D po historii $\emptyset$ i H po (C,E).
Gracz 2 ma dwie strategie, $s_2^1, s_2^2 : s_2^1(C) = E, s_2^2(C) = F$, które oznaczymy E, F – tak jak jego akcje.
Przedstawiona formalizacja będzie potrzebna do podanej niżej definicji postaci strategicznej gry ekstensywnej i do zdefiniowania, w nastepnym wykładzie, równowagi Nasha w GE.

Definicja 9.8. Profil strategii w GE jest to wektor $s := (s_1, ...s_n)$, gdzie s_i - strategia gracza i.

Definicja 9.9. Wynik $O(s)$ GE z profilu s jest to zakończona historia $h \in Z$ skonstruowana nastepujący sposób.
Gracz $P(\emptyset)$ stosuje strategię $s_{P(\emptyset)}$ z profilu s, grając akcję

$$a^1 := s_{P(\emptyset)}(\emptyset) \quad (a^1 \in A(\emptyset)),$$

która definiuje historię (a^1). Jeżeli $(a^1) \in Z$ to oznaczamy ją $O(s)$ i nazywamy wynikiem $O(s)$ GE z profilu s (*outcome of the profile s*). Jeżeli $(a^1) \notin Z$ to gracz $P((a^1))$ stosując swoją strategię $s_{P((a^1))}$ z profilu s gra akcję

$$a^2 := s_{P((a^1))}((a^1)) \in A((a^1)).$$

Jeśli historia $(a^1, a^2) \notin Z$, to proces kontynuujemy aż do otrzymania historii zakończonej. Oznaczamy ją $O(s)$ i nazywamy wynikiem GE z profilu s. Formalnie:

Definicja 9.10. Wynik $O(s)$ GE z profilu strategii s jest to zakończona historia

$$O(s) = (a^k)_{k=1}^K \in Z, \quad K \leqslant \infty,$$

taka że

$$a^1 = s_{P(\emptyset)}(\emptyset),$$

$$a^{k+1} = s_{P((a^1,...,a^k))}((a^1, ..., a^k)) \ \ dla \ \ 1 \leqslant k < K.$$

Zapis ten oznacza że po "podhistorii" $(a^1, ..., a^k)$ historii $(a^j)_{j=1}^K$ jest grana akcja $a^{k+1} = s_i((a^1, ..., a^k))$ przez gracza $i = P((a^1, ..., a^k))$ który stosuje strategię s_i z profilu s. Akcja a^{k+1} jest wyznaczona jednoznacznie przez strategię s_i z profilu s. Zauważmy że $O(s)$ jest, z konstrukcji, jednoznacznie wyznaczony przez s.

Przykład 9.9. W Przykładzie 9.8

$$O((CH, E)) = (C, E, H) \in Z, \ O((CH, F)) = (C, F) \in Z,$$

$$O((DG, E)) = D \in Z, \ O((DH, E)) = D \in Z.$$

9.4. Postać Strategiczna GE

Rozważmy $GE = \langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$, $N = \{1, ..., n\}$. Każda GE indukuje pewną GS, którą będziemy nazywać Postacią Strategiczną GE (*strategic form, normal form representation of EG*).

Definicja 9.11. Postać Strategiczna GE $< N, H, P, (u_i)_{i \in N} >$ jest to GS: $< N, (S_i)_{i \in N}, (\bar{u}_i)_{i \in N} >$ w której

— N - zbiór graczy GE; $|N| = n$.
— S_i - zbiór akcji gracza i, $i \in N$, jest to zbiór jego strategii w GE.
— $\bar{u}_i$ - funkcja wypłat gracza i, $i \in N$. Wypłata $\bar{u}_i$ z danego profilu akcji $s = (s_1, ..., s_n)$ jest równa wypłacie u_i gracza i z wyniku $O(s)$ GE generowanego przez profil s w GE. Formalnie

$$\bar{u}_i(s) := u_i(O(s))$$

Uwaga 9.7. Uwaga: W dalszym ciągu będziemy dla uproszczenia utożsamiali $\bar{u}_i \equiv u_i$.

Przykład 9.10. W Grze na Wejście:
F ma strategie In, Out, M ma strategie Agree, Fight. Postać strategiczna tej GE to GS o macierzy wypłat:

	Agree	Fight
In	2,1	0,0
Out	1,2	1,2

Przykład 9.11. Macierz wypłat Postaci Strategicznej GE "Targ" z przykładu 9.7:

	EG	EH	FG	FH
C	500,50	500,50	0,0	0,0
D	100,450	0,0	100,450	0,0

Przykład 9.12. Macierz wypłat Postaci Strategicznej GE z przykładu 9.8:

	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

10. Gry Ekstensywne II

10.1. Równowaga Nasha (RN) w GE

Definicja (ważna) 10.1. RN w $GE = \langle N, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ jest to profil

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$$

taki że $\forall i \in N, \ \forall r_i \in S_i$ zachodzi

$$u_i(O(s_i^*, s_{-i}^*)) \geqslant u_i(O(r_i, s_{-i}^*))$$

Uwaga 10.1. Gdy każdy gracz ma skończona liczbę strategii to RN znajdujemy biorąc wszystkie profile strategii, wyniki GE z profili i porównując wypłaty graczy na wynikach, tak jak w GS.

RN Gry Ekstensywnej (ze skończonymi zbiorami strategii graczy) jest to RN Postaci Strategicznej GE, czyli RN Gry Strategicznej: $< N, (S_i)_{i \in N}, (\bar{u}_i)_{i \in N} >$.

Przykład 10.1. W Grze na Wejście (Przykład 9.3) RN to pary: (Enter, Agree), (Out, Fight).

Przykład 10.2. W grze Targ (Przykład 9.7) RN to pary $(C, EG), (D, FG), (C, EG)$.

Przykład 10.3. W grze z Przykładu 9.8, RN to pary $(CH, F), (DG, E), (DH, E)$.

Omówimy je w następnym rozdziale.

10.2. Równowaga Doskonała

Uwaga 10.2. Pełna nazwa: Równowaga doskonała za względu na podgry (*Subgame Perfect Equilibrium, SPE*).

Rozważmy Grę na Wejście. Oznaczamy: E – gracz 1-y (Entrant), M – 2-i (Monopolist), E=Enter, O=Out - strategie 1-go, A=Agree, F=Fight – 2-go. Są dwie RN postaci strategicznej: $(Out, Fight)$ i $(Enter, Agree)$. Niech postać strategiczna tej GE ma macierz wypłat ("wartość monopolu" wynosi 6):

	Agree	Fight
Enter	3,3	-1,-1
Out	0,6	0,6

Rozważmy nastepujący scenariusz "omyłki gracza 1". Jest grana jedna z dwóch RN: Enter(Out,Fight) i (Enter, Agree). Gracz 1 zmienia omyłkowo strategię, gracz 2-i reaguje "racjonalnie": zmienia strategię tylko jeżeli podwyższy sobie wypłatę. Po ruchu gracza 2 gracz 1 reaguje "racjonalnie" (już bez możliwości bez pomyłki). Zastosujmy ten scenariusz do obu RN.
$(Out, Fight)$: 1 zmienia Out na Enter, wtedy 2 zmienia Fight na Agree, 1 pozostaje przy Agree. W efekcie $(Out, Fight) \rightarrow (Enter, Agree)$, czyli jedna równowaga przeszła w drugą.
$(Enter, Agree)$: 1 zmienia Enter na Out, wtedy 2-i pozostaje przy strategii Agree, 1 wraca do Enter. W efekcie $(Enter, Agree) \rightarrow (Enter, Agree)$, a zatem następuje powrót do RN (Enter,Agree).

Rozważmy analogiczny scenariusz "omyłki gracza 2". Daje on $(Out, Fight) \rightarrow (Enter, Agree)$, oraz $(Enter, Agree) \rightarrow (Out, Fight)$.
Można powiedzieć że $(Out, Fight)$ jest "mniej stabilna" ze względu na oba scenariusze łącznie, niż $(Enter, Agree)$ [trzy "przejścia" dają $(Enter, Agree)$, jedno $(Out, Fight)$]. W dalszej części wykładu pokażemy że równowagi różnią się też w aspekcie "wiarygodności" (credibility): pierwsza z nich nie jest "wiarygodna".
Wprowadzimy pojęcie równowagi (Równowaga Doskonała ze względu na podgry) które eliminuje takie "mniej niestabilne" równowagi. Wpierw zdefiniujemy podgry po niezakończonych historiach.

Definicja 10.2. $\forall h \in H \backslash Z$ podgra GE(h) po historii h gry ekstensywnej $GE = \langle N, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ jest to następująca GE:

$$GE(h) := \langle N, H'(h), P'_h, (\gg)_{i \in N} \rangle ,$$

gdzie

— N jest to zbiór graczy, taki sam jak w wyjściowej GE

— $H'(h)$ jest to zbiór złożony z wszystkich ciagów h' akcji t. że $(h, h') \in H$, czyli że jest historią w wyjściowej GE, oraz z dodatkowego elementu który oznaczymy $\bar{\emptyset}_h$

— P'_h–funkcja gracza:
$P'_h : H'(h) \backslash Z'(h) \rightarrow N : \quad P'_h(h') = P((h, h')), \quad P'(\bar{\emptyset}_h) = P(h)$, gdzie
$Z'(h) = \{h' \in H'(h) : \ (h, h') \in Z\}$

— $(\gg_i)_{i \in N}$ preferencje graczy, t. że $h' \gg_i h'' \Leftrightarrow (h, h') \succeq_i (h, h'')$, czyli gracz i preferuje h' od h'' jeśli preferuje (h, h') od (h, h'') w wyjściowej GE.

Zachodzi $GE(\emptyset) = GE$. Każdą inną podgrę nazywamy podgrą właściwą.
Każdej niezakończonej historii odpowiada 1 podgra (a więc liczba niezakończonych historii = liczba podgier).

Przykład 10.4. GE z Przykładu 9.7 ma 3 historie niezakończone: $\emptyset, (C), (D)$, a wiec 3 podgry: $GE, GE((C)) i GE((D))$.

Przykład 10.5. GE z Przykładu 9.8 ma 3 historie niezakończone: $\emptyset, (C), (C, E)$, a wiec 3 podgry: $GE, GE((C))$, oraz $GE((C, E))$.

Stosując powyższą terminologię wprowadzimy wpierw nieformalną definicję równowagi doskonałej GE.

Definicja 10.3 (nieformalna)**.** Równowaga doskonała (RD) w GE jest to profil strategii $(s_1^*, ..., s_n^*)$ t. że $\forall i \in N$, $\forall$ podgry GE strategia s_i^* jest optymalna w tej podgrze, tzn. jej zmiana nie podwyższa wypłaty gracza i.

Przykład 10.6. W Grze na Wejście RN (Out, Fight) nie jest RD, gdyż w podgrze GE(Enter) strategia Fight gracza 2 nie jest optymalna - gracz 2 podwyższy swą wypłatę zmieniając ją na Agree. RN (Enter, Agree) jest RD: strategia każdego gracza jest optymalna zarówno w GE (=GE($\emptyset$)) jak i w GE(Enter).

Wprowadzimy notację potrzebną do formalnej definicji RD.
Niech $h \in H \backslash Z$, s - profil, $GE(h)$ - podgra po h. Profil s jednoznacznie wyznacza w podgrze $GE(h)$ pewną zakończoną historię $h' \in H'$ i w konsekwencji zakończoną historię (h, h') w wyjściowej GE. Oznaczamy ją

$$O_h(s)$$

i nazywamy (zakończoną) historią po h generowaną przez profil s.
Tak więc $O_h(s)$ jest to zakończona historia w GE złożona z h i z ciągu akcji generowanych przez profil s po h. W szczególności $O_\emptyset(s) = O(s)$.

Przykład 10.7. W Grze na Wejście niech $s = (Out, Fight)$, h=$Enter$. Mamy $O_h(s) = (Enter, h')$: h' to ciąg złożony z jednej akcji w GE(Enter), wyznaczony przez s, czyli $h' = Fight$, a zatem $O_h(s) = (Enter, Fight)$.

Definicja (ważna) 10.4. Profil $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ jest Równowagą Doskonałą ze względu na podgry (w skrócie: RD) w GE (*Subgame Perfect Equilibrium, SPE*) jeśli
$\forall i \in N,\ \forall h \in H \backslash Z$ takiej że $P(h) = i$ zachodzi

$$u_i(O_h((s_i^*, s_{-i}^*))) \geqslant u_i(O_h((r_i, s_{-i}^*))) \quad \forall r_i \in S_i$$

(mówimy: strategia s_i^* jest optymalna w podgrze GE(h)).

Zauważmy że w RD strategia każdego gracza ma być optymalna po każdej historii po której jest ruch tego gracza, podczas gdy w RN strategia każdego gracza ma być optymalna jedynie po historii $\emptyset$. Ponieważ $O_\emptyset(s) = O(s)$, więc każda RD jest RN. RD jest ulepszeniem, udoskonaleniem (*refinement*) RN. Znajdowaniu różnych udoskonaleń RN w GS i GE jest poświęcona bogata literatura, patrz np. [5, 10].

Uwaga 10.3. RD nie zawsze jest "optymalnym" wyborem graczy. Przykład: eksperymenty laboratoryjne z grą w stonogę.

Przykład 10.8. W Grze na Wejście strategie 1-go to funkcje: $s_1 : \{h : P(h) = 1\} \to A_1$ takie że

$$s_1(h) \in A_1(h) = \{a : (h, a) \in H \ \wedge \ P(h) = 1\}.$$

U nas

$$h = \emptyset, \quad \{h : P(h) = 1\} = \{\emptyset\}, \quad A_1(\emptyset) = \{Enter, Out\},$$

a zatem gracz 1 ma dwie strategie – odwzorowania $\{\emptyset\} \to \{Enter, Out\}$,

$$\{h : P(h) = 2\} = \{I\},\ A_2(Enter) = \{Agree, Fight\},$$

więc gracz 2 ma dwie strategie – odwzorowania $\{Enter\} \to \{Agree, Fight\}$.
Profil $s^* = (Out, Fight)$ nie jest RD, gdyż w podgrze GE(Enter) mamy:

$$u_2(O_{Enter}(s^*)) = u_2((Enter, Fight)) = 0,$$

i zmiana strategii $Fight$ na $r_2 = Agree$ daje graczowi 2 wypłatę

$$u_2(O_{Enter}(Enter, Agree)) = u_2(Enter, Agree) = 2.$$

Profil $s^* = (Enter, Agree)$ jest RD, gdyż
W $GE(\emptyset)$ profil s^* jest RN, a więc zmiana strategii przez gracza 1 nie podwyższy jego wypłaty;
W GE(Enter) mamy $u_2(O_{Enter}(s^*)) = u_2((Enter, Agree)) = 1$, a zmiana strategii na $Fight$ daje graczowi 2 wypłatę $u_2(O_{Enter}(Enter, Fight)) = u_2(Enter, Fight) = 0$.

10.2.1. Metoda Indukcji Wstecznej (MIW)

Pod pojęciem rozwiązanie (wynik) GE chcielibyśmy rozumieć jej "przebieg", czyli informację, jakie akcje były grane przez graczy we wszystkich krokach GE. Ich znajomość daje nam zakończoną historię i odpowiadające jej wypłaty, czyli to co chvcielibyśmy rozumieć jako wynik gry. Dla pewnych typów GE rozwiązanie daje MIW. Jest to metoda znajdowania rozwiązania skończonych GE o skończonym horyzoncie i z doskonałą informacją (to ostatnie założenie można osłabić, odpowiednio modyfikując metodę). MIW polega na wyborze optymalnych akcji graczy w ich ostatnim ruchu i powtarzaniu tej procedury "w tył" do początku gry. W kolejnych etapach MIW:

1. Znajdujemy optymalne akcje graczy wykonujących ruch w podgrach o długości 1 (długość podgry jest to długość najdłuższej historii w tej podgrze).
2. Powtarzamy to samo w podgrach o długości 2 itd., aż do wyjściowej GE.
3. Otrzymujemy w ten sposób pewną historię zakończoną którą nazwiemy wynikiem GE.

Przykład 10.9. W Grze na Wejście MIM daje RD (Enter, Agree). Gdy zmienimy wypłaty po akcji Fight gracza M z (0,0) na (0,1) to MIW nie można zastosować, bo w podgrze o długości 1 gracz M nie ma jednoznacznego wyboru. Są wtedy dwie RD: (Enter,Agree) oraz (Out,Fight).

Przykład 10.10. W GE Targ (Przykład 9.7) w podgrach o długości 1 jest ruch gracza 2: w GE(C) optymalna akcja 2 to E, w GE(D) - H. W podgrze o długości 2 jest ruch 1-go, jego optymalna akcja to C. RD = (C, EH). Historię $O((C, EH)) = (C, E) \in Z$ łatwo uzyskujemy MIW.

Przykład 10.11. W GE z Przykładu 9.8 w podgrze GE((C,E)) o długości 1, tzn. po historii (C,E) gracz 1-y wybiera G. W podgrze GE(C) o długości 2, tzn po historii C, gracz 2-i wybiera E.W całej GE (o długości 3) gracz 1-y wybiera D. Tak więc RD=(DG,E). MIW daje D jako wynik gry, z wypłatami (2,0).

Podamy przykład GE z dwiema RD.

Przykład 10.12. Gracz 1-y ma akcje L, R. Po L 2-i może grać A z wypłatami (3,2), lub B, z wypłatami (0,0). Po R gracz 2-i może grać C z wypłatami (1,1), lub D z wypłatami (1,1).
RD: $(s_1^*, s_2^*) = (L, AC)$ oraz $(s_1^*, s_2^*) = (L, AD)$: wystarczy sprawdzić optymalność w podgrach GE(L), GE(R).
Dla RD $(s_1^*, s_2^*) = (L, AC)$: W GE(h=L): $u_2(O_h(s_1^*, s_2^*)) = 2 \geqslant$ każda wypłata.
W GE(h=R): $u_2(O_h(s_1^*, s_2^*)) = u_2(R, C) = 1 \geqslant$ każdej wypłaty 2-go w GE(R).
Dla drugiej RD postępujemy analogicznie.
Tak samo pokazujemy że RN: (R, BC), (R, BD) nie są RD. W tym przykładzie nie możemy zastosować MIW.

10.3. Twierdzenia o istnieniu dla GE

Przytoczymy podstawowe twierdzenia o RD.

Definicja 10.5. GE jest GE z doskonałą informacją jeżeli funkcja gracza jest jednowartościowa, każdy gracz zna wszystkie akcje grane do momentu w którym ma pojąć decyzję o wyborze akcji i zna wykonawców tych akcji.

Twierdzenie 10.1 (Kuhn). *Skończona GE z doskonałą informacją posiada RD. W skończonych GE z doskonałą informacją, w których gracze w każdym ruchu mają jednoznaczne preferencje wyboru akcji istnieje dokładnie jedna RD w strategiach czystych.*

Uwaga 10.4. Twierdzenie nie zachodzi np. dla GE z nieskończoną liczbą historii, np. w trywialnej GE w której gracz wybiera liczbę z odcinka (0, 1) i otrzymuje wypłatę równą tej liczbie. Gracz nie ma strategii optymalnej, w szczegolności nie można zastosować MIW.

Jeżeli dla każdej podgry GE MIW wybiera optymalną akcję jednoznacznie, to uzyskany profil strategii jest jedyną RD GE (dowód pomijamy). Jeśli istnieje więcej niż jedna optymalna akcja, to pewna modyfikacja MIW daje wszystkie RD w skończonej GE.

10.4. GE z jednoczesnymi ruchami

Jeżeli w pewnym momencie GE decyzje podejmuje conajmniej dwóch graczy bez wiedzy jaką decyzję podjął każdy z tych graczy, to taką grę będziemy nazywać GE z Jednoczesnymi Ruchami (możemy bowiem wyobrażać sobie taką sytuację gdy gracze podejmują decyzje jednocześnie, w tej samej chwili). Będziemy używali skrótu GEzJR.

Przykład 10.13. n=3 graczy dzieli między siebie tort. Gracz 1 proponuje podział tortu na 3 części, gracze 2 i 3 bez wiedzy o swoich decyzjach (np. jednocześnie) wyrażają zgodę (T) lub nie (N). Jeśli 2 i 3 zagrają T, nastepuje podział, wpp. żaden z trzech graczy nic nie dostaje.

Formalna definicja GEzJR jest taka sama jak GE: GE z JR jest to czwórka

$$GE = \langle N, H, P, (\succeq_i)_{i\in N}\rangle$$

w której $N, H, (\succeq_i)_{i\in N}$ są takie same jak w GE, natomiast wartościami funkcji P są zbiory graczy (podzbiory N) (podejmujących jednocześnie decyzje) a nie, jak w GE, pojedyńczy gracze.
Poza tym, o ile w GE historie są ciągami akcji, w GEzJR historie (poza pustą) to ciągi wektorów; współrzędne każdego wektora a^k to ciągi akcji graczy podejmujących decyzje po historii $(a^l)_{l=1}^{l=k-1}$.
Formalizacja stategii, równowag, postaci strategicznej itp. w GEzJR jest podobna jak w przypadku GE i nie będziemy jej tu przedstawiać.

Uwaga 10.5. GS vs. GEzJR:
Dla każdej GS istnieje GEzJR w której każda historia zakończona $h \in Z$ ma długość 1, zbiór Z jest zbiorem profili akcji w GS: $Z = \times A_j, j \in N,\ P(\emptyset) = N,\ A_j(\emptyset) = A_j \quad \forall j \in N$.

Uwaga 10.6. Każda skończona GE ma dokładnie jedną Postać Strategiczną. Odwrotnie nie, np.

	L	R
T	2,1	0,0
B	1,2	1,2

jest postacią strategiczną GEzJR, w której np. zbiór informacyjny gracza 2 jest dwuelementowy (także gracza 1–go), a także postacią strategiczną GE Na Wejście:

	Agree	Fight
Enter	2,1	0,0
Out	1,2	1,2

Uwaga 10.7. Każda skończona GE z doskonałą informacją ma RD w strategiach czystych. GEzJR nie musi mieć takiej RD. Przykładem może być GE w Orła i Reszkę, traktowana jako GEzJR, która nie ma RN (a więc i RD) w strategiach czystych.

10.5. GE z niedoskonałą informacją

Do tej pory zajmowaliśmy się GE z Doskonałą Informacją i używaliśmy skrótu GE. GE z Niedoskonałą Informacją (*EG with Imperfect Information*) definiujemy analogicznie, specyfikując dodatkowo informację jaką gracz posiada o dotychczasowym przebiegu gry gdy jest jego ruch. Niech H_i oznacza zbiór historii po których jest ruch gracza i. Określamy podział H_i, jego elementy nazywamy zbiorami informacyjnymi. Historie $h,\ h'$ należą do tego samego zbioru informacyjnego tylko wtedy gdy $A_i(h) = A_i(h')$, gdzie $A_i(h)$ – zbiór akcji gracza i po h.
W szczególności definicja ta dopuszcza ruchy określane jako losowe, ruchy Natury, po których zbiory informacyjne gracza który ma ruch po ruchu Natury nie są singletonami. Wtedy wynik gry jest to loteria na zbiorze zakończonych historii i preferencje graczy (utożsamiane u nas z wartościami oczekiwanymi wypłat) muszą być określane na tych loteriach.

Przykład 10.14. Prosty poker dwukartowy.

11. Gry Koalicyjne I

11.1. Podstawowe definicje. Przykłady

Używa się też nazw: Gry w postaci koalicyjnej, Gry kooperacyjne (*Coalitional Games, Games in coalitional form, Cooperative games*). Będziemy używali skrótu GK lub CG.
Są to n-osobowe gry w których gracze mogą tworzyć koalicje–podzbiory zbioru wszystkich n graczy. Każdej koalicji przypiszemy wartość. Będziemy żądać by każdy uczestnik koalicji miał wypłatę nie mniejszą niz gdyby nie brał udziału w koalicji. Podstawowym zagadnieniem będzie podział wypłaty (wartości) tzw. wielkiej koalicji pomiędzy wszystkich jej członków. Taki podział będzie utożsamiany z wynikiem, rozwiązaniem gry. Będziemy w szczególnosci poszukiwać podziałów mających własności równowagi, analogicznie do równowagi w grach strategicznych i ekstensywnych. Będziemy wymagać by równowaga miała pewne własności stabilności, analogicznie jak w przypadku RN, gdzie realizowała się w postaci optymalności wypłat przy ustalonych strategiach przeciwników.
Graczami mogą być osoby, grupy osób, firmy, zwiazki zawodowe, miasta, państwa, elementy projektów gospodarczych, naukowych, składniki produkcji itp.
Okazuje się że jest wiele koncepcji równowagi w grach koalicyjnych, nie ma jednej powszechnie uznanej, tak jak w grach strategicznych. Omówimy podstawowe: rdzeń, wartość Shapley'a, nukleous, a w dalszym rozdziałach rozwiązanie przetargowe Nasha. Krótko wzmiankujemy zbiory stabilne i rozwiązanie przetargu Kalai'a-Smorodinsky'ego.

Definicja 11.1 (Gra koalicyjna z wypłatami ubocznymi)**.** Gra koalicyjna z wypłatami ubocznymi jest to para $< N, v >$, gdzie $N = \{1, ...n\}$ jest zbiorem graczy, a $v : 2^N \to R$, zwana funkcją charakterystyczną gry, spełnia warunek $v(\emptyset) = 0$.

Definicja 11.2. Koalicja jest to dowolny podzbiór $S \in N$. N nazywamy wielką koalicją. Liczbę $v(S)$ nazywamy wartościa lub siłą koalicji S.

Liczba $v(S)$ jest wypłatą jaką może uzyskać S niezależnie od działań, akcji, koalicji pozostałych graczy. Zakładamy że istnieje medium–np. pieniądze, które ma jednakowa wartość dla wszystkich graczy i które gracze moga wymieniać bez ograniczeń między sobą–dopuszczamy wypłaty uboczne (*transferable utilities, side payments*).
Na ogół będziemy rozważać gry superaddytywne, czyli takie w których wartość sumy dwóch rozłącznych koalicji jest nie mniejsza niż suma ich wartości: łączenie się koalicji jest opłacalne (dokładniej–nie jest nieopłacalne). Jeżeli nie będzie explicite powiedziane inaczej, będziemy w dalszym ciągu zakładać superaddytywność GK.

Definicja 11.3. GK jest superaddytywna jeżeli

$$S, T \in 2^N : \ S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T).$$

Przykład 11.1. Zagadnienie bankructwa. Niech N–zbiór wierzycieli (*creditors, obligees*), d_i–wierzytelność (*credibility*) gracza i, $M < \sum_{i \in N} d_i$–masa upadłościowa, $v_1(S) := max\{0, M - \sum_{i \notin S} d_i\}$–funkcja określająca ile zostałoby koalicji S po spłaceniu wszystkich graczy spoza S, $v_2(S) := min\{M, \sum_{i \in S} d_i\}$–funkcja określająca ile może uzyskać koalicja S jeśli pierwsza i bez uwzględniania innych chce zrealizować swoją wierzytelność. $< N, v_1 >$ jest superaddytywna, $< N, v_2 >$ nie.

Liczbę $v(S)$ nazywamy łączną wypłatą wszystkich graczy w S. Poszukujemy formalizacji pytania i odpowiedzi na pytanie jakie koalicje powinny zostać utworzone i jak podzielić $v(S)$ pomiędzy uczestników koalicji S. $v(S)$ jest wypłatą którą może łącznie uzyskać S, bez względu na to co zrobią gracze spoza S.
Na mocy superaddytywności wartość $v(N)$ jest nie mniejsza niż suma wszystkich wartości uzyskanych przez dowolny rozłączny zbiór koalicji które moga utworzyć gracze.

> Będziemy zakładać że gracze utworzą wielką koalicję, a więc łacznie uzyskają $v(N)$.

Przykład 11.2 (Bankructwo (*The Bankruptcy Game*))**.** Firma która zbankrutowała jest dłużna trzem wierzycielom A, B, C nastepujace sumy: A 10, B 20, C 30. Wartość bankruta to 36. Zdefiniujemy wartość każdej koalicji S jako sumę jaką może uzyskać gdy wszyscy gracze z $\bar{S} := N \backslash S$ otrzymają całą sumę która żądają, a zero wpp., i.e. gdy $\bar{S}$ żąda 36 lub więcej. Tak więc (zauważmy że własność superaddytywności jest spełniona):

$$v(A) = v(B) = 0,\ v(C) = 6,\ v(A \cup B) = 6,\ v(A \cup C) = 16,\ v(B \cup C) = 26,\ v(N) = 36 \quad (11.1)$$

Możemy jednakże inaczej zdefiniować wartość każdej koalicji S, jako sumę jaką dostaje przy umowie "pierwszy bierze wszystko" (*"the first takes all"*): koalicja S uzyskuje sumę wszystkich wierzytelności żądań czlonków koalicji S, lub 36 jeśli ta suma jest mie mniejsza niż 36 (superaddytywność nie zachodzi):

$$v(A) = 10,\ v(B) = 20,\ v(C) = 30,\ v(A \cup B) = 30,\ v(A \cup C) = 36,\ v(B \cup C) = 36,\ v(N) = 36. \quad (11.2)$$

Oto inna funkcja charakterystyczna (potrzeba conajmniej dwóch wierzycieli aby odzyskać ich dług):

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0,\ v(A \cup B) = 30,\ v(A \cup C) = 30,\ v(B \cup C) = 36,\ v(N) = 36. \quad (11.3)$$

Przykład 11.3. $N = \{Parlament \equiv P, Senat \equiv S, Prezydent \equiv Pr\}$. Niech $M_S \subset S$ oznacza większość w koalicji S: $|M_S| \geqslant [\frac{1}{2}|S| + 1]$. GK $< N, v >$ zdefiniowana poniżej jest superaddytywna.

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{gdy S ma większość w P, S i Pr, lub conajmniej 2/3 w P i S} \\ 0, & wpp. \end{cases} \quad (11.4)$$

11.2. Podział (Imputacja), Rdzeń

Wprowadzamy w GK dodatkową strukturę, która pozwala na zdefiniowanie rozwiązania i stabilności. GK z taką strukturą to GK z wypłatami ubocznymi (*CG with transfer utilities, CGwTU*). Zakładamy że gracze tworza wielką koalicję. Ma ona wartość $v(N)$. Będziemy chcieli podzielić $v(N)$ pomiędzy n graczy.

Definicja 11.4. Wektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n$ nazywamy wektorem wypłat $< N, v >$. Wektor wypłat x nazywamy racjonalnym grupowo (lub alokacją) jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Wektor wypłat x nazywamy racjonalnym indywidualnie jeżeli

$$x_i \geqslant v(\{i\}) \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Wektor wypłat x nazywamy racjonalnym koalicyjnie jeżeli

$$\forall S \sum_{j \in S} x_j \geqslant v(S).$$

Racjonalność grupowa oznacza efektywność wykorzystania wartości wielkiej koalicji.
Racjonalność indywidualna–że żaden gracz nie zgodzi się na mniej niż gdyby utworzył koalicję jednoosobową.
Racjonalność koalicyjna oznacza stabilność, patrz niżej.

Definicja 11.5 (Podział (Imputacja))**.** Wektor wypłat x nazywamy podziałem (imputacją) jeżeli jest grupowo i indywidualnie racjonalny.

Podział (imputacja) jest więc indywidualnie racjonalną alokacją.

Lemat 11.1. *W superaddytywych GK zbiór podziałów jest niepusty.*

Dowód. Zdefiniujmy wektor wypłat:

$$x_i = \begin{cases} v(\{i\}), & gdy \quad i = 1, ...n-1 \\ v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}), & gdy \quad i = n, \end{cases} \tag{11.5}$$

Jest to podział, gdyż z superaddytywności $x_n \geqslant v(\{n\})$. □

Przykład 11.4. $N = \{1, 2, 3\}, v(N) = 5, v(1) = 1, v(2) = 1, v(3) = 2, v(1 \cup 2) = 2, v(1 \cup 3) = 3, v(2 \cup 3) = 4$. Zbiór podziałów: $\{x : x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1,\ x_3 \geqslant 2\}$.

Definicja 11.6. Mówimy że podział $x = (x_1, ..., x_n)$ jest stabilny jeżeli dla każdej koalicji S

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S).$$

Wpp. mówimy że podział x jest niestabilny.

Stabilność podziału oznacza że jest on koalicyjnie racjonalny.

Definicja 11.7 (Rdzeń)**.** Zbiór $C(v) \equiv C$ stabilnych podziałów nazywamy rdzeniem GK $< N, v >$.

$$C := \{x : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \wedge \quad \forall S \subset N \quad \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)\}$$

Interpretacja: żaden podzbiór graczy z N nie ma powodu aby opuścić wielką koalicję by otrzymać jako koalicja wyższą łączną wypłatę.
Rdzeń może się składać z wielu (w szczególności z continuum) punktów, może być też nieintuicyjny lub pusty. Ta ostatnia "wada" powoduje że rdzeń nie może spełniać takiej roli w GK jak RN w GS. Istnieje jednakże ważna klasa GK, opisująca klasyczny modele rynku, dla której rdzeń jest niepusty. Są to tzw. gry zrównoważone, patrz niżej. W następnej części omówimy inną definicję rozwiązania (wartość Shapley'a) , która będzie zawsze istniała, i to dokładnie jedna. Z drugiej strony rdzeń ma definicyjną własność stabilności, która nie jest rozważana przy omawianiu indeksu Shapley'a.

Uwaga 11.1. Rdzeń, jako zbiór wektorów o współrzędnych spełniających nierówności nieostre, jest domkniety i wypukły.

Przykład 11.5. W grze Bankructwo (11.1) w jej 1–ym wariancie rdzeń ma postać

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 36, x_3 \leqslant 30,\ x_2 \leqslant 20,\ 6 \leqslant x_1 \leqslant 10\}.$$

Zauważmy że "intuicyjnie sprawiedliwa" imputacja: podział proporcjonalny do długu, $(6, 12, 18)$, należy do rdzenia.

Przykład 11.6 (Podział 1 \$). $v(1,2,3) = 1 = v(1,2) = v(1,3) = v(2,3)$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$. $C = \{x : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \geqslant 0,\ \ x_i + x_j \geqslant 1,\ \ i,j = 1,2,3,\ i \neq j\} = \emptyset$

Zauważmy że $C = \emptyset$ także dla $v(i,j) = a > 2/3$. To że rdzeń jest tu zbiorem pustym odpowiada brakowi "stabilnego rozwiązania" gry–gracz który nie należy do koalicji w której są dwaj pozostali, może zawsze złożyć "kontrpropozycję" dla jednego z nich.

Definicja 11.8. GK jest istotna jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(N).$$

W przeciwnym przypadku, czyli gdy $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = v(N)$, GK jest nieistotna. (superaddytywność wyklucza przeciwną (ostrą) nierówność).

Wniosek 11.1. *GK jest nieistotna* $\Rightarrow$ *jedynym podziałem jest* $x_i = v(\{i\})$, $i = 1, ...n$, *oraz* $\forall S \subset N\ v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.

Definicja 11.9. GK jest grą o stałej sumie jeżeli

$$\forall S \subset N \quad v(S) + v(\bar{S}) = v(N).$$

GK jest grą o sumie zero jeżeli $v(N) = 0$.

Twierdzenie 11.1. *Rdzeń $C(v)$ istotnej GK o stałej sumie jest pusty.*

Dowód. Niech x będzie dowolnym podziałem. Mamy $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(N)$ (istotność), a więc $\exists k : x_k > v(\{k\})$ [wpp. $v(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} v(\{i\}) < v(N)$]. Ponieważ GK jest grą o stałej sumie, więc $v(N - \{k\}) + v(\{k\}) = v(N)$. Tak więc dla koalicji $S := N - \{k\}$

$$\sum_{i \neq k} x_i = \sum_{i \in N} x_i - x_k < v(N) - v(\{k\}) = v(N - \{k\}) = v(S),$$

a więc $x \notin C(v)$. □

Przykład 11.7. Gra Właściciel i Pracownicy
Właściciel w i m pracowników: $1 \leqslant m \leqslant p := |P|$ wytwarza $f(m)$ produktu, gdzie P jest zbiorem wszystkich pracowników. Zakładamy że funkcja $f : \Re^+ \to \Re^+$ jest wklęsła, niemalejąca, oraz $f(0) = 0$. Oznaczmy $N = \{w\} \cup P$ - zbiór wszystkich graczy. Definujemy funkcję charakterystyczną

$$v(S) = \begin{cases} f(|S \cap P|), & gdy \ \ w \in S, \\ 0, & wpp. \end{cases} \tag{11.6}$$

Oznaczmy $x = (x_0, x_1, ..., x_p)$–wektor wypłat GK $< N, v >$, gdzie x_0 jest wypłatą właściciela, $x_1, ..., x_p$– wypłatami pracowników.

Stwierdzenie 11.1. *Rdzeń Gry Właściciel i Pracownicy ma postać:*

$$C_1 = \{x \in \Re^{1+p} : \sum_{j=0}^{j=p} x_j = f(p), \quad x_i \leqslant f(p) - f(p-1), \quad i = 1, ...p\}.$$

Dowód. Z definicji rdzeń to zbiór $C = \{(x_0, ..., x_p) \in \Re^{p+1}\}$ takich że:

$$x_0 + x_1 + ... + x_p - \sum_{r=1}^{k} x_{j_r} \geqslant f(p-k) \quad \forall \{j_1, ..., j_k\} \subset P,$$

$$x_0 + x_1 + ... + x_p = f(p),$$

gdzie pierwszy zestaw równań to warunki na rdzeń dla koalicji bez $1 \leqslant k \leqslant p-1$ pracowników. Kombinując je z ostatnim równaniem mamy

$$C = \{x \in \Re^{1+p} : \sum_{j \in N} x_j = f(p), \quad \sum_{r=1}^{k} x_{j_r} \leqslant f(p) - f(p-k), \quad \forall \{j_1, ..., j_k\} \subset P\}.$$

W szczególności dla koalicji bez jednego pracownika:

$$x_0 + x_1 + ... + x_p - x_j \geqslant f(p-1) \quad \forall j = 1, ..., p,$$

co implikuje $x_j \leqslant f(p) - f(p-1), \quad j = 1, ..., p$. Pokażę że $C_1 = C$.
$C \subset C_1$: Niech $x \in C$. Pisząc nierówność z powyższych warunków na C p razy, dla każdego z graczy (czyli za każdym razem dla $k = 1$) otrzymujemy p nierówności

$$x_j \leqslant f(p) - f(p-1), \quad \forall j \in P,$$

a zatem $x \in C_1$.
$C_1 \subset C$: Niech $x \in C_1$. Mamy

$$\forall \{j_1, ..., j_k\} \subset P \quad x_{j_1} \leqslant f(p) - f(p-1), \; ..., \; x_{j_k} \leqslant f(p) - f(p-1)\}.$$

Dodając te nierówności otrzymujemy

$$x_{j_1} + x_{j_2} + ... + x_{j_k} \leqslant k[f(p) - f(p-1)] \leqslant f(p) - f(p-k),$$

czyli $x \in C$. Drugą nierówność dowodzimy indukcyjnie. Dla $k = 1$ mamy tożsamość. Niech nierówność będzie prawdziwa dla k. Do jej obu stron dodajemy $f(p) - f(p-1)$.

$$(k+1)[f(p) - f(p-1)] \leqslant 2f(p) - f(p-k) - f(p-1) \leqslant f(p) - f(p-(k+1)).$$

Druga nierówność wynika z wklęsłości f, co widać przepisując ją w postaci

$$f(p) - f(p-1) \leqslant f(p-k) - f(p-(k+1)).$$

□

Przykład 11.8. Gra Rynek Rękawiczek (*The Glove Market*)
m graczy ma po 1 lewej rękawiczce każdy, n innych graczy – po 1 prawej, $m < n$. Oznaczamy M, N – zbiory tych graczy. Definiujemy funkcję charakterystyczną

$$v(S) = min\{|S \cap M|, |S \cap N|\}.$$

$v(S)$ jest liczbą par (l, p) w koalicji S. W szczególności $v(M \cup N) = m$. Rdzeń GK jest jednoelementowy:

$$C = \{(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}) : x_i = 1 \; if \; i \in M, \; x_i = 0 \; if \; i \in N\}.$$

Dowód.
1. Łatwo sprawdzić że zdefiniowany punkt należy do rdzenia.
2. Niech któryś z "prawych" graczy, np. o numerze $j \geqslant m+1$, ma w C wypłatę $x_j > 0$. Wtedy dla koalicji $S := M \cup N \backslash \{j\}$ mamy

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in M \cup N} x_i - x_j = v(M \cup N) - x_j < v(M \cup N).$$

Ale $v(S) = v(M \cup N)$–liczba par rekawiczek w wielkiej koalicji. Tak więc $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, czyli $x \notin C$.
3. Niech któryś z "lewych" graczy, o numerze $j \leqslant m$, ma w C wypłatę $x_j < 1$. Rozważmy koalicję złożoną z j i jednego z "prawych", o numerze r i wypłacie x_r. Musi więc być $x_j + x_r \geqslant 1$ (bo $v(rl) = 1$). Ponieważ $x_j < 1$ więc $x_r > 0$, sprzeczność, bo poprzednio wykazaliśmy że w rdzeniu wszystkie x_r sa zerami. Tak więc dla "lewych" $x_j \geqslant 1$. Ponieważ $\sum_{j \in M \cup N} x_j = v(M \cup N) = m = \sum_{j \in M} x_j$, więc dla "lewych" zachodzi $x_j = 1$. □

Rdzeń tej gry jest "nieintuicyjny". Strona będąca "nawet w minimalnym nadmiarze" ma w C wypłaty zerowe–wartość rynkowa prawych rękawiczek jest zerowa. Okazuje się że drugie ważne pojęcie rozwiązania GK: wartość Shapley'a, nie ma tego typu "bulwersującej" własności. Suma wartości Shapley'a (patrz następny wykład) dla $m = 10^6, n = 10^6 + 1$ wynosi $0,500428$ dla właścicieli lewych rękawiczek, $0,499572$ dla prawych.

11.3. Rdzeń dla gier zrównoważonych

Istnieje ważna klasa GK, mająca zastosowanie w ekonomii matematycznej (klasyczny model rynku), dla której rdzeń jest niepusty. Są to tzw. gry zrównoważone (*balanced games*).

Definicja 11.10. Zbiór liczb $(\lambda_S)_{S \subset N} : \lambda_S \in [0,1]$ jest zrównoważonym zbiorem wag (*balanced collection of weights*) jeżeli

$$\forall i \in N \quad \sum_{S: i \in S} \lambda_S = 1.$$

Przykład 11.9. N=3. Następujący zbiór wag (λ_S) jest zrównoważonym zbiorem wag:

$$\lambda_S = \begin{cases} 1/2, & if \ |S| = 2 \\ 0, & wpp. \end{cases} \tag{11.7}$$

Definicja 11.11. GK $< N, v >$ jest zrównoważona jeżeli dla każdego zrównoważonego zbioru wag (λ_S) zachodzi

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) \leqslant v(N).$$

Twierdzenie 11.2 (Bondariewa 1963, Shapley 1967)**.** *GK $< N, v >$ ma niepusty rdzeń $\Leftrightarrow$ jest zrównoważona.*

Dowód - patrz [19].

Ćwiczenie 11.1. Gra Właściciel–Związek Zawodowy.
Rozważmy grę Właściciel–Pracownicy przy założeniu że koalicja wszystkich graczy z właścicielem ma wartość $f(p)$, a wszystkie inne zero.
Rdzeń $C = \{x : x_0 + x_1 + x_2 + ... + x(p) = f(p)\}$.

Ćwiczenie 11.2. $M := \{1,2,3\}$, $\forall S \subset M\ v(S) = 1\ gdy\ |S| \geqslant 2,\ v(S) = 0\ wpp.,\ v(N) = 1.5.$
$N := M \cup \{4\}$, $\forall S \subset N\ w(S) = v(S)\ gdyS \subset M,\ w(S) = 0\ wpp.$
Znajdź rdzeń gier $< M, v >$, $< N, w >$.
Odp: $C(v) = \emptyset$, $C(w) = \{(1/2, 1/2, 1/2/0)\}$.

Ćwiczenie 11.3. Gracz i jest nieistotny jeżeli $\forall S\ v(\{i\} \cup S) = v(S)$. Pokaż że
1. jeśli gracz i jest nieistotny to $v(\{i\}) = 0$
2. jeśli gracz i jest nieistotny i jeśli $x = (x_1, ..., x_n) \in C$, to $x_i = 0$.

12. Gry Koalicyjne II

12.1. Wartość Shapley'a

Uwaga 12.1. Ponieważ rdzeń może być pusty, "nieintuicyjny", lub np. składać się z continuum podziałów, więc należy szukać innej koncepcji "rozwiązania" gry.

Dla GK $\langle N, v\rangle$ definiujemy

Definicja 12.1 (Wartość Shapley'a)**.** Wartość Shapley'a $\phi(v)$ GK $\langle N, v\rangle$ jest to wektor n liczb rzeczywistych

$$\phi(v) = [\phi_1(v), ..., \phi_n(v)]$$

spełniających aksjomaty:
a1. Racjonalność grupowa (efektywność): $\sum_{i\in N} \phi_i(v) = v(N)$.
Wektor wypłat $\phi(v)$ jest alokacją.
a2. Symetria: Jeżeli $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$ dla każdej koalicji $S : i \notin S,\ j \notin S$, to $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
Jeżeli v jest symetryczna względem graczy i, j to ich wartości Shapley'a (patrz 12.2) są jednakowe.
a3. Gracz nieistotny: Jeżeli $v(S) = v(S \cup \{i\})$ dla każdej koalicji S, to $\phi_i(v) = 0$.
Jeżeli gracz nie pomaga ani nie szkodzi żadnej koalicji to jego wartość Shapley'a jest zero.
a4. Addytywność: Jeżeli u, v są funkcjami charakterystycznymi, to $\phi_i(u+v) = \phi_i(u)+\phi_i(v),\ i = 1, ..., n$, gdzie $(u + v)(S) := u(S) + v(S)\ \forall S \subset N$.
Jest to najsilniejsze założenie: wartość dwóch gier rozgrywanych "łącznie" jest równa sumie wartości gier rozgrywanych "oddzielnie" ($u + v$ jest także funkcją charakterystyczną !).

Wartość Shapley'a jest imputacją. Daje ona ważny w zastosowaniach "sprawiedliwy" podział wypłat wielkiej koalicji.

Definicja 12.2. Wartość Shapley'a gracza i jest to współrzędna $\phi_i(v)$ wartości Shapley'a GK $< N, v >$. opisuje wartość, siłę gracza w GK $< N, v >$.

Twierdzenie (ważne) 12.1. *Istnieje dokładnie jedna wartość Shapley'a GK* $< N, v >$.

Szkic dowodu: wpierw pokażemy że wartość Shapley'a $\phi(v)$, jeżeli istnieje, jest dana wzorem:

$$\phi_i(v) = \sum_{S:i\in S} c_S/|S|, \quad i = 1, ..., n,$$

gdzie c_S są JEDNOZNACZNIE wyznaczonymi stałymi. Następnie znajdziemy szczególną wartość Shapleya

$$\bar{\phi}_i(v) = \sum_{S:i\in S} \frac{\bar{c}_S}{|S|}, \quad i = 1, ..., n,$$

z explicite wyznaczonymi stałymi $\bar{c}_S$. Ponieważ c_S są jednoznaczne, więc $c_S = \bar{c}_S\ \forall S \subset N$, a zatem $\phi_i(v) \equiv \bar{\phi}_i(v),\ i = 1, ...n$, tzn. każda wartość Shapleya jest dana za pomoca powyższego wzoru, a więc jest dokładnie jedna. Wykażemy wpierw

Lemat 12.1. *Wartość Shapley'a jest dana wzorem*

$$\phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{c_S}{|S|}, \quad i = 1, ..., n,$$

gdzie c_S są wyznaczone JEDNOZNACZNIE wzorem rekurencyjnym (12.6) poniżej.

Dowód. Rozważmy dowolną koalicję $\emptyset \neq S \subset N$. Definiujemy funkcję charakterystyczną

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & jeeli\ S \subset T \\ 0 & wpp. \end{cases} \tag{12.1}$$

Rozważamy GK $< N, w_S >$ (*primitive game*).
Fakt 1: W GK $< N, w_S >$ gracze spoza S sa nieistotni:

$$i \notin S \Rightarrow \phi_i(w_S) = 0$$

Dowód. Wykażemy, że

$$\forall T \subset N : \ i \notin T \Rightarrow w_S(T) = w_S(T \cup \{i\}). \tag{12.2}$$

Na mocy aksjomatu a3, napisanego dla $S \to T$ i $v \to w_S$ będzie to oznaczało że $\phi_i(w_S) = 0$.
Wzór (12.2) zachodzi gdyż:
Jeśli $T \supset S$, to $w_S(T) = 1$, a więc tym bardziej $w_S(T \cup \{i\}) = 1$.
Jeśli $T \not\supset S$, to są możliwe 3 przypadki:

$$S \cap T = T, \quad S \cap T = \emptyset, \quad T \neq S \cap T \neq \emptyset.$$

W każdym z nich $w_S(T) = 0 = w_S(T \cup \{i\})$, co dowodzi (12.2). □

Fakt 2: W GK $< N, w_S >$ "gracze z S są wymienialni" (*interchangeable*):

$$i, j \in S \Rightarrow \phi_i(w_S) = \phi_j(w_S)$$

Dowód. Weźmy dowolną koalicję T dla której $i \notin T,\ j \notin T$. Dla tych i, j stosujemy wzór (12.2): $w_S(T) = w_S(T \cup \{i\}) = w_S(T \cup \{j\})$. Z aksjomatu symetrii a2 otrzymujemy $\phi_i(w_S) = \phi_j(w_S)$. □

Fakt 3: Dla GK $< N, w_S >$ zachodzi

$$\sum_{i \in N} \phi_i(w_S) = w_S(N) = 1.$$

Dowód. Pierwsza równość to aksjomat a1, druga wynika z definicji w_S. □

Fakt 4: Dla GK $< N, w_S >$ zachodzi

$$\phi_i(w_S) = \frac{1}{|S|} \ \ dla \ \ i \in S.$$

Dowód. $\sum_{i \in N} \phi_i(w_S) = 1 = \sum_{i \in S} \phi_i(w_S) + \sum_{i \notin S} \phi_i(w_S) = |S| \phi_i(w_S) + 0$. Pierwsza równość to Fakt 3, trzecia to Fakt 2 i Fakt 1. Dzieląc otrzymujemy tezę. □

Wniosek 12.1.

$$\phi_i(w_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & gdy \quad i \in S \\ 0, & gdy \quad i \notin S, \end{cases} \tag{12.3}$$

gdzie 0 *wynika z Faktu 1.*

Wniosek 12.2.

$$\phi_i(cw_S) = \begin{cases} \frac{c}{|S|}, & gdy \quad i \in S \\ 0, & gdy \quad i \notin S, \end{cases} \tag{12.4}$$

gdyż cw_S *też jest funkcją charakterystyczną.*

Fakt 5: W dowolnej GK $< N, v >$ jej funkcję charakterystyczną v można przedstawić w postaci

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S, \tag{12.5}$$

gdzie c_S - JEDNOZNACZNIE wyznaczone stałe.

Dowód. Definiujemy $c_\emptyset := 0$, a dalsze stałe indukcyjnie (wpierw dla koalicji singlowych etc.):

$$c_S := v(S) - \sum_{T \subset S, T \neq S} c_T \tag{12.6}$$

Dla każdej koalicji $S \subset N$ zachodzi

$$\sum_{T \subset N} c_T w_T(S) = \sum_{T \subset S} c_T \cdot w_T(S) + \sum_{T \not\subset S} c_T \cdot w_T(S) = \sum_{T \subset S} c_T \cdot 1 = \sum_{T \subset S, T \neq S} c_T + c_S = v(S),$$

gdzie druga równość wynika z definicji w_T ($w_T = 0$ dla $T \not\subset S$, $w_T = 1$ dla $T \subset S$), czwarta to definicja c_T. □

Fakt 6: Dla GK $< N, v >$ wartość Shapley'a $\phi(v) = [\phi_1(v), ..., \phi_n(v)]$ musi być postaci (jeśli istnieje)

$$\phi_i(v) = \sum_{S: i \in S} \frac{c_S}{|S|}, \quad i = 1, ..., n.$$

Dowód.

$$\phi_i(v) = \phi_i(\sum_S c_S w_S) = \sum_S \phi_i(c_S w_S) = \sum_{S: i \in S} \phi_i(c_S w_S) + \sum_{S: i \notin S} \phi_i(c_S w_S) = \sum_{S: i \in S} \frac{c_S}{|S|}.$$

Pierwsza równość wynika z Faktu 5, druga z aksjomatu a4, czwarta z Wniosku 12.2. Kończy to dowód Faktu 6, a więc i Lematu 12.1. □

Definicja 12.3. Wyrażenie $\Delta_i(S) := v(S) - v(S \backslash \{i\})$ jest to wkład marginalny gracza i do koalicji $S : i \in S$.

Lemat 12.2. *Wartość Shapley'a jest dana wzorem*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S: i \in S} (|S| - 1)!(n - |S|)! \Delta_i(S) \quad \forall i = 1, ...n. \tag{12.7}$$

Dowód. Sprawdzimy że $\phi(v) = [\phi_1(v), ..., \phi_n(v)]$ jest wartością Shapley'a, tzn. spełnia aksjomaty a1-a4.
a4:

$$\phi_i(u+v) = \sum \cdots [(u+v)(S) - (u+v)(S\backslash\{i\})] =$$

$$= \sum \cdots [u(S) - u(S\backslash\{i\})] + \sum \cdots [v(S) - v(S\backslash\{i\})] = \phi_i(u) + \phi_i(v).$$

a3: Mamy wykazać:

$$\forall S \subset N : i \notin S \text{ zachodzi implikacja } \; v(S) = v(S \cup \{i\}) \Rightarrow \phi_i(v) = 0.$$

Zdefiniujmy $T := S \cup \{i\}$. Mamy z założenia $v(S) = v(S \cup \{i\})$, czyli $v(T\backslash\{i\}) = v(T)$ $\forall T : i \in T$. Tak więc dla każdej koalicji $T : i \in T$ i–ty składnik sumy we wzorze (12.7) jest równy 0.
a2: Mamy wykazać: Jeżeli $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$ dla każdej koalicji T nie zawierającej i, j, to $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
Ustalmy gracza i. We wzorze (12.7) sumowanie jest po wszystkich koalicjach S dla których $i \in S$. Dla takich S zdefiniujmy $T := S\backslash\{i\}$. Mamy $i \notin T$, $|S| = |T| + 1$, oraz

$$\phi_i(v) = \sum_{S: i \in S} |T|!(n - |T| - 1)![v(T \cup \{i\}) - v(T)] =$$

$$= \sum_{T: i \notin T} |T|!(n - |T| - 1)![v(T \cup \{i\}) - v(T)] =$$

$$= \sum_{T \subset N} |T|!(n - |T| - 1)![v(T \cup \{i\}) - v(T)].$$

Analogiczny wzór otrzymujemy dla $\phi_j(v)$ i korzystamy z założenia $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$.
a1: Wynika z nastepującej interpretacji wzoru na $v(N)$. Niech gracze dochodzą do wielkiej koalicji jeden po drugim. Rozważmy wszystkie możliwe sposoby czyli wszystkie permutacje n graczy i załóżmy że każda zachodzi z jednakowym prawdopodobieństwem $1/n!$. Wkład gracza i do koalicji $S : i \in S$ wynosi $[v(S) - v(S\backslash\{i\})]$ Przy każdej realizacji $\{i_1, ..., i_n\}$ kolejności wchodzenia do wielkiej koalicji mamy [utożsamiamy $v(i) \equiv v(\{i\})$ itp.]:

$$v(N) = v(i_1) + v(i_1 \cup i_2) - v(i_1) + \cdots + v(N) - v(i_1 \cup ... \cup i_{n-1}). \tag{12.8}$$

Niech Z_k są zmiennymi losowymi (bo koalicje są tworzone losowo) których wartości

$$Z_k := v(i_1 \cup ... \cup i_k) - v(i_1 \cup ... \cup i_{k-1}), \quad k = 2, ...n, \quad Z_1 := v(i_1)$$

dają wkład gracza wchodzącego do koalicji $\{i_1, ..., i_{k-1}\}$ graczy.
Piszemy $n!$ razy wyrażenie na $v(N)$, dla wszystkich permutacji graczy, czyli wszystkich sposobów formowania się wielkiej koalicji, sumujemy i dzielimy przez $n!$. Lewa strona otrzymanego wyrażenia to $v(N)$. Prawa strona jest równa $\sum_{i \in N} \phi_i(v)$. Tak więc $v(N) = \sum_{i \in N} \phi_i(v)$, co kończy dowód Lematu (12.2).
Przykładowo: dla $N = \{1, 2, 3\}$:

$$v(N) = v(i_1) + v(i_1 \cup i_2) - v(i_1) + v(N) - v(i_1 \cup i_2).$$

Piszemy odpowiednie wzory dla wszystkich permutacji $\{1, 2, 3\}$:

$$v(N) = v(1) + v(12) - v(1) + v(N) - v(12),$$

$$v(N) = v(1) + v(13) - v(1) + v(N) - v(13),$$

$$v(N) = v(2) + v(21) - v(2) + v(N) - v(21),$$
$$v(N) = v(2) + v(23) - v(2) + v(N) - v(23),$$
$$v(N) = v(3) + v(31) - v(3) + v(N) - v(31),$$
$$v(N) = v(3) + v(32) - v(3) + v(N) - v(32),$$

i dodajemy, otrzymujemy tezę. □

Wcześniej pokazaliśmy (Fakt 6) że każda wartość Shapley'a (jeżeli istnieje) jest postaci

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subset N, S: i \in S} \frac{c_S}{|S|}, \quad i = 1, ..., n,$$

z jednoznacznie (indukcyjnie) wyznaczonymi stałymi c_S. Wzór 12.7 także daje c_S. Wartość Shapley'a jest więc wyznaczona jednoznacznie, co kończy dowód Twierdzenia. □

Uwaga 12.2. W dowodzie nie zakładaliśmy superaddytywności v.

Uwaga 12.3. Każdą współrzędną wartości Shapley'a można wyrazić jako unormowaną sumę wkładów marginalnych: $\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_R \Delta_i(S_i(R))$, gdzie sumujemy po wszystkich permutacjach R zbioru N graczy, $S_i(R)$ oznacza zbiór graczy poprzedzających gracza i w permutacji R wraz z graczem i.

Wzór (12.7) ma nastepującą interpretację: $\phi_i(v)$ jest to wartość oczekiwana wkładu gracza i do koalicji do której nie należy (do której dołącza), przy założeniu że wszystkie permutacje graczy w procesie formowania się wielkiej koalicji są jednakowo prawdopodobne (inaczej mówiąc, że proces formowania się wielkiej koalicji jest losowy).

Uwaga 12.4. Wartość Shapley'a superaddytywnej GK jest indywidualnie racjonalna. Wartość Shapley'a nie superaddytywnej GK nie musi być indywidualnie racjonalna, patrz Cwiczenie 12.10.

Relację między rdzeniem GK a jej wartością Shapley'a daje

Twierdzenie 12.2 (Ichiishi)**.** *Jeśli GK z (niepustym) rdzeniem C ma własność rosnących wkładów:*

$$\forall S, T, i : \quad (T \subset S, \ i \in T) \Rightarrow v(T) - v(T \backslash i) \leqslant v(S) - v(S \backslash i)),$$

to wartość Shapley'a $\phi \in C$. Tak więc dla takich gier (por. gry wypukłe) rdzeń jest niepusty.

12.2. Indeks siły Shapley'a–Shubika

(*Shapley–Shubik Power Index*) Indeks siły Shapley'a–Shubika jest miarą siły graczy w ważnej klasie tzw. gier głosowania, w których proponoway kontrakt, decyzja, kandydat jest albo zaakceptowany albo odrzucony. Koalicje które są w stanie przegłosować dane propozycje są nazywane wygrywającymi, pozostale–przegrywającymi. Przyjmujemy że wartość zwycięskiej koalicji wynosi 1, przegrywającej 0.

Definicja 12.4. Gra Prosta (*Simple Game*). GK jest prosta jeżeli $\forall \ S \in 2^N \ v(S) \in \{0, 1\}$.
W grach prostych jeżeli $v(S) = 0$ to S nazywa się koalicją przegrywającą, jeżeli $v(S) = 1$–wygrywającą.

Wniosek 12.3. *W grach prostych dowolny podzbiór (nadzbiór) koalicji przegrywającej (wygrywającej) jest przegrywający (wygrywający).*

Przykład 12.1. Gra na jednomyślność (*The unanimity game*)

$$v(S) = \begin{cases} 1, & gdy \quad S = N \\ 0, & wpp. \end{cases} \tag{12.9}$$

Przykład 12.2 (Gra na większość)**.**

$$v(S) = \begin{cases} 1, & gdy \quad |S| > n/2 \\ 0, & wpp. \end{cases} \tag{12.10}$$

Na przykład dla $n = 3$ jedynie singletony i koalicja pusta są przegrywające.

Przykład 12.3. Gra głosowania ważonego (*The weighted voting game*)

$$v(S) = \begin{cases} 1, & gdy \quad \sum_{i\in S} w_i > q, \\ 0, & wpp. \end{cases} \tag{12.11}$$

gdzie $w_i,\ i = 1, ...n$ sa nieujemnymi wagami, $q > 0$ (*quota*). Dla $q = (1/2)\sum_{i\in N} w_i$ grę nazywamy grą głosowania ważonego większościowego (*the weighted majority voting game*). Dla $w_i = \frac{1}{n}$ $q = \frac{1}{2}$; $v(S) = 1 \Leftrightarrow |S| > \frac{1}{2}$.

Uwaga 12.5. Dla gier prostych wzór (12.7) upraszcza się, gdyż różnica $[v(S) - v(S\backslash\{i\})]$ ma wartość 0 lub 1.

Definicja 12.5. Jeżeli $i \in S$, $v(S\backslash\{i\}) = 0$, oraz $v(S) = 1$ to i jest graczem krytycznym (*critical player, swing voter*) koalicji S.

Licząc wartość Shapley'a gier prostych sumujemy w (12.7) jedynie po takich S dla których gracz i jest krytyczny. Otrzymujemy tzw. Indeks Siły Shapley'a–Shubika:

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S:i \ krytyczny \ S} (|S| - 1)!(n - |S|)! \quad \forall i = 1, ...n. \tag{12.12}$$

Indeks siły Shapleya-Shubika jest to wektor, którego współrzędne dają ułamek układów, w których dany głosujący (gracz) jest graczem krytycznym, czyli tym po przyłączeniu którego koalicja jest wygrywająca.

Przykład 12.4 (Gra prosta: głosowanie (patrz [36]) *A simple voting game*)**.** $[6; 4, 3, 2, 1]$: koalicja wygrywająca potrzebuje conajmniej 6 głosów, gracz A dostarcza 4 głosy, B 3, C 2, D 1 głos. Koalicje wygrywające to AB, AC, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD. A jest graczem krytycznym w 5 koalicjach, B i C w 3, D w jednej, więc indeks Banzhafa wynosi $5/12, 3/12, 3/12, 1/12$.

Przykład 12.5. Wartość Shapley'a dla gry Właściciel–Pracownicy dla $p = 2$ pracowników

$$\phi_1(v) = 1/6[2!1!(f(2) - f(1)) + 1!1!f(1)] = 1/6[2f(2) - f(1)].$$

Przyjmujemy normalizację $f(2) = 1, \quad f(1) = \alpha \in [0, 1]$, otrzymując

$$\phi_1 = \phi_2 = 1/6(2 - \alpha), \quad \phi_0 = f(2) - \phi_1 - \phi_2 = 1/3(1 + \alpha).$$

Gdy drugi pracownik wnosi coraz mniejszy marginalny wkład do wielkiej koalicji, czyli dla $f(1) \longrightarrow f(2)$, wartość Shapley'a właściciela: ϕ_0 rośnie do $2/3$.

Przykład 12.6. Wartość Shapley'a dla gry Rekawiczki dla n lewych i n+1 prawych rękawiczek wynosi:
Dla n=1: $(4/6, 1/6, 1/6)$. Dla rosnacych n sumy wartości Shapley'a dla włascicieli lewych i prawych rękawiczek zbliżają się. Suma wartości Shapley'a dla $m = 10^6, n = 10^6 + 1$ wynosi $0,500428$ dla właścicieli lewych rękawiczek, $0,499572$ dla prawych.

Oto następne przykłady pokazujące różnicę między wartością Shapley'a (indeksem siły Shapley'a–Shubika) a rdzeniem.

Przykład 12.7. Rynek z jednym sprzedawcą (1) i dwoma klientami (2,3).
$v(1, 2, 3) = v(1, 3) = v(2, 3) = 1, v(S) = 0$ dla pozostałych S. $\phi(v) = (4/6, 1/6, 1/6)$, $C = \{(1, 0, 0)\}$.

Przykład 12.8. Gra ważonego głosowania: 4 graczy, wagi [2,1,1,1], suma wag = 5, wygrywa większość 3. Gracz 1 jest krytyczny gdy wchodzi do koalicji jako drugi lub trzeci. Pozostali gracze są symetryczni. Wartość Shapley'a to $(3/6, 1/6, 1/6, 1/6)$, rdzeń jest pusty. Gracz 1 ma 40% głosów, ale jego wartość Shapley'a to połowa wartości wielkiej koalicji.

Przykład 12.9. Gra ważonego głosowania: 5 graczy, wagi [3,3,1,1,1].
Wartość Shapley'a to $(9/30, 9/30, 4/30, 4/30, 4/30)$, rdzeń jest pusty. Tu proporcja jest odwrotna: Gracz 1 ma $33,33\%$ głosow, jego wartość to $(9/30 \simeq 30\%$ wartości wielkiej koalicji.

Uwaga 12.6. Indeks siły Banzhafa (*Banzhaf power index*).
Istnieje szereg innych metod opisu siły graczy, wyborców. Jedną z najważniejszych jest Indeks Banzhafa. Indeks Banzhafa gracza jest wprost proporcjonalny do liczby koalicji, w których dany gracz jest wyborcą krytycznym, przy czym suma indeksów Banzhafa wszystkich graczy jest równa 1.

12.3. Zbiory stabilne

Zbiory stabilne zostały zaproponowane w monografii J. von Neumanna i O. Morgensterna [16] jako "rozwiązanie" GK. Przystepne omówienie i przykłady mozna znaleźć np. w [36].

Definicja 12.6. W GK podział x przebija podział y jeżeli istnieje koalicja S t. że

$$\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S) \quad \text{oraz } \forall i \in S \; x_i > y_i.$$

Uwaga 12.7. Rdzeń GK jest to zbiór jej podziałów nieprzebijalnych (przez żadne inne podziały).

Definicja 12.7. Zbiór Π podziałów w GK jest zbiorem stabilnym tej GK jeżeli
1. $x \in \Pi$, $y \in \Pi \Rightarrow x$ nie przebija y.
2. $z \notin \Pi \Rightarrow \exists x \in \Pi : x$ przebija z.

Twierdzenie 12.3. *[Dla danej GK z rdzeniem C]*
1. *Każdy zbiór stabilny zawiera C*
2. *Jeśli C jest zbiorem stabilnym, to jest jedynym*
3. *Jeśli A, B są zbiorami stabilnymi, to A nie jest podzbiorem właściwym B.*

Gry na ogół mają wiele zbiorów stabilnych, mogą też (dla $n \geqslant 10$) ich nie mieć.

12.4. Nukleous

Nukleous został wprowadzony jako alternatywna koncepcja "rozwiązania" GK. Przystepne omówienie i przykłady mozna znaleźć np. w [36]. W szczególności zachodzi

Twierdzenie 12.4. *Nukleous jest jednoelementowy.*
Jeśli rdzeń jest niepusty, to nukleous należy do rdzenia.

Przykład 12.10.

$$v(1) = v(2) = 0, v(3) = 1, v(\{1,2,3\} = 5, v(1,2) = 3.5, v(1,3) = v(2,3) = 0.$$

Wartość Shapley'a $\phi(v) = (25/12, 25/12, 10/12)$, a więc warunek indywidualnej racjonalności

$$\phi_i(v) \geqslant v(\{i\})$$

nie jest spełniony dla $i = 3$. Koalicja $\{1, 2\}$ nie spełnia warunku superaddytywności.

Ćwiczenie 12.1. Znaleźć wartość Shapley'a 3–osobowej GK Podział 1 \$, w której koalicje 2 graczy mają wartość $\alpha \in [0, 1]$, jednoosobowe 0, wielka 1.
Rozwiązanie. Wstawiając do wzoru Shapley'a obliczamy $\phi_i = 1/3,\ i = 1, 2, 3$. Można też zgadnąć z symetrii graczy.

Ćwiczenie 12.2. Znaleźć wartości Shapleya dla Gry Bankructwo 11.1, 11.2, 11.3.
Odp. $\phi = (7, 12, 17),\ (6, 11, 19),\ (11, 11, 14)$.

13. Gry iterowane

13.1. Motywacje

Używa się też nazwy gry powtarzane (*repeated games, infinitely repeated games, iterated games*).
W świecie realnym podmioty interakcji, gracze często wchodzą w interakcje z tymi samymi przeciwnikami, partnerami. Perspektywa przyszłych interakcji z tym samym graczem może istotnie wpływać na wybór strategii graczy.
Gry powtarzane opisują np. sytuacje wielokrotnych interakcji społecznych, altruizmu, kary etc. Gracz musi uwzględnić wpływ granej akcji na przyszłe akcje przeciwników. Pojedyńcza interakcja jest opisywana pewną grą strategiczną (*stage game, one–shot game*). Gracze wielokrotnie powtarzają tę grę, podejmując za każdym razem decyzję o wyborze akcji jednocześnie (ogólniej–nie znając decyzji pozostałych graczy), natomiast znając poprzednie akcje pozostałych graczy.
Jest wiele przykładów powtarzalnych interakcji z których każda jest np. opisywana tą samą jednokrotną grą strategiczną i które nie mają określonego terminu zakończenia, horyzontu czasowego. Z drugiej strony w wielu przypadkach termin zakończenia takich interakcji nie odgrywa istotnej roli w planowaniu strategii graczy. W takich przypadkach model z nieskończona liczbą interakcji może być lepszy do opisu strategii graczy.
Gry iterowane dzielimy na skończone i nieskończone. Gra skończona to ciąg skończenie n razy powtarzanej gry jednokrotnej, przy czym n jest znaną liczbą.

Przykład 13.1. n-krotny Dylemat Więźnia.
Metoda indukcji wstecznej zastosowana do równoważnej EGwII pokazuje że racjonalny gracz gra defekcję w każdej grze pojedynczej.

Gra nieskończona (będziemy uzywać skrótu GN lub GI: Gra Iterowana) to nieskończony ciag takich gier. Będziemy zajmowali się powtarzanymi grami nieskończonymi. Motywacją do ich wprowadzenia jest np. fakt że w wielu sytuacjach nie znamy liczby przyszłych interakcji.
Ponieważ nie można zastosować metody indukcji wstecznej, więc w nieskończonym Dylemacie Więźnia nie jest oczywiste jakie akcje powinien podejmować racjonalny gracz–świadomość kary w przyszłych grach za defekcję w pewnej chwili (czyli obniżenia wypłaty) może spowodować wybór kooperacji.
Wypłaty będziemy opisywać jako sumę wypłat z gier pojedynczych. Aby uniknąć wypłat nieskończonych wprowadzimy czynnik dyskontujący wypłaty. Formalnie będzie to odpowiadało sytuacji gdy po każdej grze pojedynczej jest niezerowe prawdopodobieństwo w że bedzie grana nastepna gra pojedyncza. Wartość oczekiwana liczby takich gier jest wtedy równa $1/(1-w)$.

Przykład 13.2. Iterowany Dylemat Więźnia (IDW) (*Iterated Prisoner's Dilemma, IPD*)
Jest to najbardziej–ze względu na zastosowania–popularny przykład gry nieskończenie powtarzanej. Gdy nie jest explicite powiedziane inaczej, wyjściową grą pojedyńczą jest dwuosobowy Dylemat Więźnia $[R, S, T, P]$, $T > R > P > S$. Aby utrzymywanie kooperacji było bardziej opłacalne niż naprzemienne zdradzanie i kooperowanie, zakłada się dodatkowo że $2R > T + S$.

13.2. Definicje

Niech GS=$< N, (A_i), (u_i) >$ będzie grą strategiczną, rozgrywaną w dyskretnych chwilach czasu $t = 1, 2, ...$ (*stage game*). Zakładamy że w chwili t gracze znają akcje przeciwników podejmowane w $t-1, ...$. Założenie to będzie w szczególności potrzebne do zdefiniowania strategii graczy. Oznaczmy

$$a^t \in \times_{i \in N} A_i$$

–profil akcji granych w chwili t.

Definicja 13.1. Historia do (chwili) t (*in time t*) jest to ciąg profili akcji

$$h^t = (a^0, a^1, ..., a^{t-1}), \quad t = 1, 2, ...,$$

gdzie a^0 oznacza profil pusty, formalnie potrzebny do określenia akcji granej początku gry.

Na przykład dla dwóch graczy historia do t jest to ciąg $t-1$ par akcji.
Używając nomenklatury z teorii GE mówimy że historia jest zakończona wtedy i tylko wtedy gdy jest nieskończona. Formalnie historia zakończona to nieskończony ciag profili $(a^0, a^1, a^2, ...)$.
W celu zdefiniowania strategii w GN oznaczmy:
H^t–zbiór wszystkich historii do t. Możemy napisać

$$H^t = \times_{s=1}^{t-1} A.$$

Definicja (ważna) 13.2. Strategia (czysta) gracza i jest to nieskończony ciąg funkcji

$$s_i := (s_i^1, ..., s_i^t, ...),$$

gdzie $s_i^t : H^t \to A_i$–funkcja zwracająca akcję gracza i po historii do t; $s_i^t(h^t)$ jest to akcja gracza i po historii h^t (czyli w chwili t) gdy stosuje strategię s_i.

Przykład 13.3. Strategia grim–trigger (strategia cynglowa) w Iterowanym DW (IDW):
$s_i^1(a^0) = C$,

$$s_i^t(a^0, a^1, ..., a^{t-1}) = \begin{cases} C, & gdy\ a_{-i}^\tau = C\ dla\ \tau = 1, 2, ..., t-1 \\ D, & wpp., \end{cases} \tag{13.1}$$

Gracz stosujący tę strategię zaczyna akcją C i gra C do chwili gdy przeciwnik zagra D, i od tego momentu gra D niezależnie od akcji przeciwnika.
Przykłady innych strategii w IDW.

1. All C–zawsze kooperuj.
2. All D–zawsze zdradzaj.
3. TFT–Wet Za Wet (Tit For Tat): w pierwszej rundzie koperuj, następnie powtarzaj ostatni ruch przeciwnika.
4. TFT2–Wet Za 2 Wety (Tit For 2 Tats): zdradzaj gdy przeciwnik zdradził w 2 poprzednich rundach, wpp. kooperuj.
5. BRUTAL: w pierwszym ruchu kooperuj. Następnie: jeżeli przeciwnik kooperuje, zdradzaj co drugą rundę, jeśli w pewnej rundzie zdradzi, graj cały czas D.
6. WIN–STAY, LOSE–SHIFT (PAVLOV): Graj C w pierwszej rundzie, po (C,C) i po (D,D) wpp. graj D.
7. STAND1: w pierwszym ruchu zdradź. Jeżeli przeciwnik też zdradził, to zdradzaj we wszystkich kolejnych rundach, jeśli kooperował to kooperuj we wszystkich kolejnych rundach, w obu przypadkach niezależnie od akcji przeciwnika.

8. STAND2: w pierwszych 2 ruchach zdradź. Jeżeli w nich przeciwnik chociaż raz zdradził, to zdradzaj we wszystkich kolejnych rundach, jeśli nie, to kooperuj we wszystkich kolejnych rundach, w obu przypadkach niezależnie od akcji przeciwnika.

Uwaga 13.1. Analogicznie jak dla GE, profil strategii wszystkich graczy $(s_1, ..., s_n)$ wyznacza historię zakończoną. Na przykład dla $n = 2$ jeżeli obaj gracze grają grim-trigger, historią zakończoną będzie nieskończony ciąg par (C,C) (poprzedzony a^0).

Definicja 13.3. Wypłata gracza i z nieskończonego ciągu profili akcji $h = (a^1, a^2, ...)$ jest dana wzorem

$$U_i(h) = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(a^t).$$

Normalizacja $1 - \delta$ pozwala obliczać wypłaty gry pojedynczej i powtarzalnej w tych samych jednostkach. Na przykład jeżeli wypłaty mają postać $u_i(a^t) = 2$, to $U_i(h) = 2$.

13.3. Równowaga Nasha

Zdefiniujemy równowagę Nasha.
Ponieważ profil strategii $s = (s_1, ...s_n)$ generuje nieskończony ciąg akcji h, więc użyjemy symbolu $U_i(s)$ na oznaczenie wypłaty gracza i z profilu strategii s. Formalnie:

$$\tilde{U}_i(s) := U_i(h),$$

gdzie h jest zakończoną historią generowaną przez profil strategii s. Na przykład dla dwoch graczy stosujących strategię grimm–trigger w DW [2,0,3,1], $\tilde{U}_i(s) = 2$.

Definicja (ważna) 13.4. Profil s jest RN w GI jeżeli

$$\tilde{U}_i(s_i, s_{-i}) \geqslant \tilde{U}_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Przykład 13.4. W IDW profil w którym strategia każdego gracza to: graj D po każdej historii do t jest RN.

Okazuje się że nie jest to jedyna RN w IDW.

Przykład 13.5. Profil $s := (GT, GT)$ (GT=grim–trigger) jest RN.
Pokażemy to dla 2-osobowego IDW z macierzą wypłat gry pojedynczej $[2, 0, 3, 1]$. Wypłata np. 1-go gracza z $s := (GT, GT)$ to $U_1((GT, GT)) = 2$.
Jeżeli pewna inna strategia $\tilde{s}_1$ gracza 1 ma dać wyższą wypłatę, gracz 1 musi zdradzić w pewnej rundzie T+1 po raz pierwszy. Gracz 2 gra strategię grimm–trigger, czyli nie zdradza do T+1, natomiast gra D poczynając od rundy T+2. Najlepsza odpowiedź gracza 1 jest wtedy D we wszystkich kolejnych rundach. Generuje to nastepujący ciąg profili akcji:

$$h = ((C, C), (C, C), ...(C, C), (D, C), (D, D), (D, D), ...),$$

gdzie (D, C) jest grane w rundzie $T + 1$, oraz ciag wypłat

$$(2, 2, ..., 2, , 3, 1, 1, ...).$$

Znormalizowana wypłata:

$$U_i(\tilde{s}_1, GT) = (1 - \delta)[2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... + 2\delta^{T-1} + 3\delta^T + 1\delta^{T+1} + 1\delta^{T+2} + ...] = 2 + \delta^T - 2\delta^{T+1}.$$

Łatwo widać że dla $s := GT$

$$U_i(s, s) \geqslant U_i(\tilde{s}, s) \Leftrightarrow \delta \geqslant 1/2.$$

Tak więc, gdy czynnik dyskontowy jest conajmniej 0.5 to para strategii grim–trigger jest RN w nieskończenie powtarzanym (iterowanym) Dylemacie Więźnia z macierzą wypłat $[2, 0, 3, 1]$.

Uwaga 13.2. Analogiczny rachunek dla ogólnego Dylematu Więźnia daje warunek $\delta \geqslant \frac{T-R}{T-P}$ na to by para strategii (GT, GT) była RN.

Przykład 13.6. Para strategii (TFT, TFT) jest RN w nieskończenie powtarzanym Dylemacie Więźnia dla dostatecznie dużego czynnika dyskontowego.
Obaj gracze stosując TFT grają w każdej rundzie C i mają w IDW znormalizowane wypłaty równe R każdy. Załóżmy że gracz 2 zmienia strategię. Aby dała ona wyższą wypłatę niż z pary TFT, w pewnej rundzie T gracz 2 musi zagrać D, czyli w T jest grany profil (C, D). W rundzie $T + 1$ gracz 1 gra D i kontynuuje D do rundy w której gracz 2 powraca do C (włącznie z tą rundą). Gracz 2 ma od $T+1$ dwie możliwości: powrót do C lub kontynuowanie D, co daje dwie możliwe strategie: $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$. W pierwszym przypadku, czyli gdy w $T + 1$ grane jest (D, C), gracz 1 w $T + 2$ gra C, czyli 2 ma taką sytuację jak na początku gry. W drugim gracz 1 kontynuuje D.
W pierwszym przypadku historia ma postać

$$h = ((C, C), (C, C), ...(C, C), (C, D), (D, C), (C, D), ...),$$

gdzie pierwsze (C, D) jest grane w T. Odpowiadający jej ciąg wypłat gracza 2 w grach pojedynczych to

$$(R, R, ..., R, T, P, T, ...).$$

Ponieważ przez pierwsze $T - 1$ rund wypłaty gracza 2 pokrywają się z jego wypłatami z pierwotnej strategii TFT, więc przy porównywaniu wypłat za rundę 1 przyjmiemy chwilę T. Znormalizowana wypłata 2 od rundy T ze strategii $\tilde{S}_1$:

$$U_2(\tilde{S}_1, TFT) = (1-\delta)[T\delta^0 + S\delta^1 + T\delta^2 + ...] = \frac{T}{1+\delta} + \frac{\delta S}{1+\delta}.$$

Łatwo widać że

$$U_2(\tilde{S}_1, TFT) \leqslant U_2(TFT, TFT) = R \Leftrightarrow \delta \geqslant (T-R)/(R-S).$$

W drugim przypadku historia ma postać

$$h = ((C, C), (C, C), ...(C, C), (C, D), (D, D), (D, D), ...),$$

gdzie (C, D) jest grane w T. Odpowiadający mu ciąg wypłat gracza 2 w grach pojedynczych to

$$(R, R, ..., R, T, P, P, ...).$$

Znormalizowana wypłata gracza 2 ze strategii $\tilde{S}_2$ od rundy T:

$$U_2(\tilde{S}_2, TFT) = (1-\delta)[T + P\frac{\delta}{1-\delta}] = (1-\delta)T + P\delta$$

Widać że

$$U_2(\tilde{S}_2, TFT) \leqslant U_2(TFT, TFT) = R \Leftrightarrow \delta \geqslant (T-R)/(T-P).$$

Identyczne rozumowanie przeprowadzamy dla gracza 1. Tak więc, gdy czynnik dyskontowy jest dostatecznie duży, para strategii TFT jest RN w nieskończenie powtarzanym Dylemacie Więźnia.

13.4. Twierdzenia o istnieniu

Dla twierdzeń o istnieniu w grach iterowanych uzywa się też np. nazw: twierdzenia potoczne, ludowe, które biorą się stąd że były one znane od pewnego czasu, a nie są znani ich pierwsi autorzy.
Typowe twierdzenie potoczne mówi że w grze powtarzalnej prawie każdy wynik (ciąg wypłat graczy) może być zrealizowany w pewnej RN, o ile czynnik dyskontowy jest dostatecznie duży. Różne założenia dają różne postacie twierdzenia potocznego.

Definicja 13.5. Gwarantowana wypłata (reservation payoff) w 2-osobowej GN gracza i jest to liczba

$$U_i^* = min_{S_{-i}} max_{S_i} U_i(S_i, S_{-i}).$$

Jest to wypłata jaką i może sobie zagwarantować zakładając że przeciwnik będzie chciał by była ona jak najmniejsza. Na przykład dla IDW gracz AllD ma gwarantowaną wypłatę $P/(1-\delta)$.

Definicja 13.6. Procentem (udziałem) kooperacji w zakończonej historii IDW jest to granica

$$lim_{t\to\infty} \frac{t_{CC}}{t},$$

gdzie t_{CC} jest liczbą gier pojedynczych do rundy t, w których była grana para akcji (C, C).

Twierdzenie 13.1. *Dla dowolnej liczby $\alpha \in (0,1)$ istnieje, dla dostatecznie dużego czynnika dyskontowego δ RN w IDW indukująca zakończoną historię h taką że α jest procentem (udziałem) kooperacji w h.*

Ćwiczenie 13.1. IDW jako gra jednokrotna
Niech $w \in [0,1)$ oznacza prawdopodobieństwo każdej następnej gry. Niech T oznacza wypłatę w grze jednokrotnej. Wtedy wypłatę ze strategii w której gracz otrzymuje w każdym kroku T definiujemy

$$T + wT + w^2T + ... = T + Tw\sum_{n=0}^{\infty} w^n = T + T\frac{w}{1-w} = T\frac{1}{1-w}.$$

Rozważmy grę 2-osobowa w której każdy z graczy może grać jedną ze strategii: AllD, TFT, z wypłatami $T, R, P, S,\ T > R > P > S$ jednokrotnego Dylematu Więźnia. Macierz wypłat ma postać

	TFT	AllD
TFT	R/(1-w),R/(1-w)	S+Pw/(1-w),P/(1-w)
AllD	T+Pw/(1-w),S+Pw/(1-w)	P/(1-w),P/(1-w)

lub, oznaczając x = w/(1-w):

	TFT	AllD
TFT	R(1+x),R(1+x)	S+Px,T+Px
AllD	T+Px,S+Px	P(1+x),P(1+x)

Oprócz "nieefektywnej" równowagi Nasha $(AllD, AllD)$ istnieje dla $1 > w \geqslant w_0 := \frac{T-R}{T-P}$ symetryczna RN: (TFT, TFT). Zmienił się typ gry.
W każdej z dwóch RN gracze grają te same akcje.

14. Przetargi

14.1. Wprowadzenie

Przetargi (ang. bargaining) formalizują sytuacje w których nie ma zgody co do akcji które powinni podjąć gracze by uzyskać jak najlepszy wynik i możliwe są negocjacje pomiędzy graczami. Wynikiem może być np. podział zysku między właściciela i pracowników, podział różnicy między ofertą sprzedawcy i kupującego.
Istnieją dwa zasadnicze podejścia do problemu przzatargu.
1. Model aksjomatyczny (normatywny, statyczny): wynik przetargu (chciałoby się by był określony jednoznacznie) jest rezultatem spełnienia możliwie rozsądnych aksjomatów. Model taki nie opisuje procedury przetargowej, czyli reguł i przebiegu negocjacji, a jedynie analizuje możliwe wyniki, uwzględniające możliwe akcje graczy i ich preferencje, i na podstawie ustalonych aksjomatów daje jednoznacznie określone rozwiązanie.
2. Model strategiczny (dynamiczny): wynik przetargu jest konsekwencją ciągu sekwencyjnie składanych ofert. W standardowej, podstawowej wersji taki model jest opisany pewną grą ekstensywną z doskonałą informacją.
W tym rozdziale bedziemy zajmować się głównie modelem aksjomatycznym. Opiszemy procedurę (zestaw aksjomatów) która każdemu zbiorowi możliwych "wyników" stosowania różnych akcji przez graczy przyporządkowuje dokładnie jeden wynik, który będziemy nazywać rozwiązaniem przetargu.

Uwaga 14.1. W szczególności wymaga się by nie istniał taki wynik gry który byłby lepszy od zaproponowanego (wynegocjowanego) dla conajmniej jednego gracza i nie gorszy dla wszystkich (innych) graczy (Pareto-optymalność). Nie może też być wynegocjowany wynik gry który conajmniej jednemu graczowi daje wypłatę niższą niż gdyby nie brał udziału w negocjacjach.
Załóżmy że oddają decyzję dotyczącą tego co ma być grane, tzn. jakie strategie i jaki ma być wynik (wypłata) każdego gracza, w ręce arbitra. Jakimi regułami powinni się kierować gracze i arbiter by istniał taki wynik i był jednoznaczny?

14.2. Aksjomatyczny model przetargu Nasha (schemat arbitrażowy Nasha)

$N = 2$ graczy może się porozumieć lub nie. Niech X oznacza pewien zbiór, nazywany zbiorem możliwych wyników, porozumień graczy, D - zbiór jednoelementowy, oznaczający brak porozumienia, $u_i : X \cup D \to R, i = 1, 2$ - funkcja wypłat gracza i. X generuje zbiór par wypłat

$$\{(v_1, v_2) : v_i = u_i(x), x \in X, i = 1, 2\}. \tag{14.1}$$

Elementy tego zbioru to możliwe do wynegocjowania wypłaty graczy. Dodatkowo zbiór D generuje parę wypłat $d = (d_1, d_2) = (u_1(\tilde{d}), u_2(\tilde{d})) : \tilde{d} \in D$ (jest to jedyny element D).
Powyższy zbiór obiektów precyzuje pewną sytuację przetargową $< N, X, D, (u_i), i \in N >$.
Będziemy chcieli każdej takiej sytuacji przetargowej jednoznacznie przyporządkować parę wypłat, którą będziemy nazywać rozwiązaniem zagadnienia przetargu.

Definicja 14.1. Przetarg jest to para (U, d) taka że

1.$U \subset R^2$ – zbiór możliwych wyników przetargu (wypłat graczy).
2. $d = (d_1, d_2) \in U$. Jeśli d nazwiemy brakiem zgody to brak zgody jest możliwym wynikiem przetargu.
3. $\exists (v_1, v_2) \in U : v_1 > d_1, v_2 > d_2$ – istnieje wynik przetargu lepszy od braku zgody.
4. U jest wypukły i zwarty w R^2.

Przetarg możemy identyfikować z wypukłym i zwartym zbiorem $U \subset R^2$ z wyróżnionym punktem $d : \exists (v_1, v_2) \in U : v_i > d_i, i = 1, 2$.
Zwartość pociąga w szczególności ograniczoność wypłat.
$d \in U$ oznacza że niezgoda, brak porozumienia, daje graczom także pewne wypłaty.
$v_i > d_i, i = 1, 2$ zapewnia że istnieje inny wynik niż niezgoda, lepszy dla obojga graczy niż niezgoda.
Niech B oznacza zbiór wszystkich przetargów.

Definicja 14.2. Schemat arbitrażowy jest to funkcja $f : B \to U \subset R^2$.

Schemat arbitrażowy przyporządkowuje każdemu przetargowi (U, d) pewien element zbioru U. Ten element nazywamy rozwiązaniem przetargu (U, d).
Oczywiście takich schematów jest "bardzo wiele". J.F. Nash zaproponował cztery akceptowalne aksjomaty które implikują jednoznaczność schematu arbitrażowego.

14.3. Aksjomaty Nasha

I. Aksjomat optymalności Pareto.
Niech (U, d) – przetarg, $(v_1, v_2) \in U, (v_1', v_2') \in U$. Jeżeli $v_1 > v_1', v_2 > v_2'$, to $(v_1', v_2') \notin f((U, d))$, tzn. (v_1', v_2') nie może być rozwiązaniem przetargu (U, d).
II. Aksjomat symetrii.

Definicja 14.3. Przetarg (U, d) jest symetryczny jeżeli $d_1 = d_2$ oraz $(v_1, v_2) \in U \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in U$.

Jeżeli (U, d) jest symetryczny to $f_1((U, d)) = f_2((U, d))$, gdzie $f = (f_1, f_2)$ jest schematem arbitrażowum.
Interpretacja: Jeżeli gracze są nierozróżnialni, to rozwiązanie przetargu musi dać każdemu z nich taką samą wypłatę.
III. Aksjomat niezmienniczości względem afinicznych transformacji wypłat.
Niech (v_1^*, v_2^*) będzie rozwiązaniem przetargu (U, d), niech $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2$. Zdefiniujmy drugi przetarg (U', d'):

$$U' = \{(a_1 v_1 + b_1, a_2 v_2 + b_2) : (v_1, v_2) \in U\},$$

oraz stałe $d_i' := a_i d_i + b_i, i = 1, 2$.
Wtedy rozwiązaniem przetargu $(U', d') : d' = (d_1', d_2')$ jest para wypłat $(a_1 v_1^* + b_1, a_2 v_2^* + b_2)$.
Inaczej mówiąc, równość

$$f((U, d)) = (v_1^*, v_2^*)$$

implikuje równość

$$f_i((U', d')) = a_i f_i((U, d)) + b_i, \quad f_i((U, d)) = v_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Przykład 14.1. $d = (0, 0), a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = b + 2 = 0$

IV. Aksjomat niezależności od nieistotnych alternatyw.
Niech $(U,d),(U^{'},d^{'})$ przetargi t. że $U^{'}\subset U$. Niech $v^*=(v_1^*,v_2^*)$–rozwiązanie przetargu (U,d), oraz niech $v^*\in U^{'}$, tzn. $f((U,d))\in U^{'}$. Wtedy v^* jest rozwiązaniem przetargu $(U^{'},d^{'})$, tzn. $f((U,d))=f((U^{'},d^{'}))$.
Interpretacja: Jeżeli "zawęzimy" przetarg nie usuwając pierwotnego rozwiązania przetargu, to pozostaje ono rozwiązaniem przetargu z zawężonym przetargu.
Komentarze do aksjomatów.
I: Gracze nie zgadzają się na rozwiązanie gorsze dla obojga.
II. Jeżeli gracze są nierozróżnialni to rozwiązanie przetargu musi dać każdemu z nich taką samą wypłatę.
III. Oba rozwiązania przetargowe "reprezentują tę samą sytuację".
IV. Kalai i Smorodinsky zaproponowali w 1975 roku inny schemat arbitrażowy, nie spelniający aksjomatu IV. Omówienie tego schematu i przykłady można znaleźć np. w monografii Straffina.

Twierdzenie (ważne) 14.1. *Istnieje dokłądnie jeden schemat arbitrażowy $f^N : B\Rightarrow R^2$ spełniający aksjomaty I-IV. Przyporządkowuje on każdemu przetargowi (U,d) rozwiązanie przetargu będące rozwiązaniem zagadnienia maksymalizacji:*

$$max_{(d_1,d_2)\leqslant(v_1,v_2)\in U}(v_1-d_1)(v_2-d_2).$$

Inaczej:

$$f^N((U,d))=argmax_{(d_1,d_2)\leqslant(v_1,v_2)\in U}(v_1-d_1)(v_2-d_2).$$

Uwaga: f^N ma dwie współrzedne.

Definicja 14.4. Schemat arbitrażowy z powyższego twierdzenia nazywamy rozwiązaniem przetargowym Nasha.

Dowód. Krok 1: f^N jest dobrze określona: zbiór $\{v\in U : v_i\geqslant d_i, i=1,2\}$ jest zwarty, funkcja $H:U\Rightarrow R^{:}H(v_1,v_2):=(v_1-d_1)(v_2-d_2)$ jest ciągła, więc istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu maksymalizacji definiującego f^N. Jest ono jedyne, gdyż:
1. H jest ściśle quasi–wklęsła na $\{v\in U : v_i\geqslant d_i, \quad i=1,2\}$
2. $\exists v\in U : v_i>d_i, i=1,2$
3. U jest wypukły.
Krok 2: f^N spełnia aksjomaty I-IV:
III: Niech $(U,d),(U^{'},d^{'})$–jjak w aksjomacie I. Wtedy

$$v^{'}\in U^{'}\Leftrightarrow \exists v\in U : v_i^{'}=a_iv_i+b_i, i=1,2.$$

Ponieważ

$$(v_1^{'}-d_1^{'})(v_2^{'}-d_2^{'})=a_1a_2(v_1-d_1)(v_2-d_2),$$

więc $(v_1^*,v_2^*)=f^N((U,d))$ maksymalizuje prawą stronę ostatniej równości po U wtedy i tylko wtedy gdy $(a_1v_1^*,a_2v_2^*+b_2)=f^N((U^{'},d^{'}))$ maksymalizuje lewa stronę po $U^{'}$.
II: Niech (U,d)–przetarg symetryczny. Niech (v_1^*,v_2^*) maksymalizuje funkcję H po zbiorze U. Ponieważ H jest funkcją symetryczną, więc również (v_2^*,v_1^*) maksymalizuje H po U. Z jednoznaczności maksymizera (v_1^*,v_2^*)=(v_2^*,v_1^*).
IV: Niech $U^{'}\subset U$. Jeżeli $v^{'}\in U^{'}$ maksymalizuje H po U, to tym bardziej po $U^{'}$.
I. Niech $v\in U, v^{'}\in U : v_i>v_i^{'}, i=1,2$. Ponieważ H jest rosnąca w każdym swoim argumencie, więc $v^{'}$ nie może maksymalizować H.

Pokażemy jednoznaczność f^N. Niech f–rozwiązanie przetargu spełniające aksjomaty I-IV.
Krok I.
Niech $f^N((U,d)) = (z_1, z_2)$. Ponieważ istnieje $(s_1, s_2) \in U : s_i > d_i, i = 1,2$, więc $z_i > d_i, i = 1,2$. Niech (U', d')–przetarg otrzymany z (U,d) przez taką transformację $s_i \longrightarrow a_i s_i + b_i, i = 1,2$ która przeprowadza punkt d do $(0,0)$ a rozwiązanie $f^N((U,d))$ do $1/2, 1/2$ (można policzyć). Ponieważ f i f^N spełniają aksjomat III, więc

$$f_i((U',0)) = a_i f_i((U,d)) + b_i, \quad f_I^N((U',0)) = a_i f_i^N((U,d)) + b_i, \ i = 1,2.$$

Stąd

$$f^N((U,d)) = f((U,d) \Leftrightarrow f^N((U',0)) = f((U',0)).$$

Ponieważ $f^N((U',0)) = (1/2, 1/2)$, więc wystarczy pokazać że $f((U',0)) = (1/2,1/2)$. Wykażemy to w krokach II-V.
Krok II.

Stwierdzenie 14.1. *U' nie zawiera punktów (v_1', v_2') t. że $v_1' + v_2' > 1$.*

Dowód. W przeciwnym przypadku niech

$$(t_1, t_2) := (\frac{1}{2}(1-\epsilon) + \epsilon v_1', \frac{1}{2}(1-\epsilon) + \epsilon v_2') \tag{14.2}$$

U' jest wypukly, więc $(t_1, t_2) \in U'$ jako wypukla kombinacja liniowa punktów $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i (v_1', v_2'). Dla dostatecznie małego ϵ łatwo sprawdzić że $t_1 t_2 > \frac{1}{4}$.
W ten sposób znaleźliśmy punkt $(t_1, t_2) \in U'$ taki że $(t_1 - 0)(t_2 - 0) > \frac{1}{4}$, podczas gdy wiadomo że maksimum iloczynu współrzednych punktów w U' (pamietajmy że $d_i' = 0$) jest realizowane przez parę $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, co kończy dowód Stwierdzenia. □

Krok III. Ponieważ U' jest ograniczone, więc z kroku II wynika istnienie prostokata T, symetrycznego względem prostej $v_1 = v_2$, zawierającego U', na którego brzegu jest punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Otaczamy U' prostokatem mającym z U' tylko jeden punkt wspólny: $f^N(U', 0)$.
Krok IV.
$f(T,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, gdyż z aksjomatu II obie współrzędne rozwiązania przetargowego muszą być takie same (tzn. leżeć na prostej $v_1 = v_2$, a z aksjomatu I wynika że nie mogą leżeć wewnątrz T na tej prostej. Z aksjomatu IV mamy

$$f(U'0) = f(T,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

□

Ćwiczenie 14.1. Sprawdzić że para $(U', (d_1', d_2'))$ z Aksjomatu II Nasha jest przetargiem.

Ćwiczenie 14.2. Niech $U \in R^2$–czworokąt o wierzchołkach $A = (0,0), B = ((2,0), c = (4,2), D = (1,5)$, niech $d = 2,1)$. Znaleźć rozwiązanie przetargu (U,d).
Rozwiązanie: Niech N–odcinek prostej przechodzącej przez CiD o wspołrzędnej $x \in [2,4]$. Szukamy $(x,y) \in N$: maksymalizującego iloczyn $(x-2)(y-1)$. Otrzymujemy $x_{max} = 7/2, y_{max} = 5/2$.
Interpretacja: 2 graczy wybiera wyniki A, B, C, D, każdy z pewwnym prawdopodobieństwem: dokładniej, każdy wybiera pewną loterię na $\{A, B, C, D\}$. Jeśli nie uzgodnią wyboru loterii dostają $d = (2,1)$. Schemat arbitrażowy Nasha daje loterię $5/2C + 1/6D$, która daje wypłaty

$$u_1 = \frac{5}{6}4 + \frac{1}{6}1 = 7/2, \quad u_2 = \frac{5}{6}2 + \frac{1}{6}5 = 5/2.$$

Uwaga 14.2. Punkty wewnatrz wieloboku nie mogą być rozwiązaniem przetargu, a więc loteria na nich daje zero.

Uwaga 14.3. Przykład zastosowania schematu arbitrażowego Nasha do (teoretycznej) sytuacji negocjacyjnej pomiędzy pracodawcą a pracownikami można znaleźć w [36] (rozdział 17). Jednakże, jak stwierdza autor w ostatnim akapicie, "...Niestety nie jest mi znany żaden rzeczywisty przypadek zastosowania schematu arbitrażowego Nasha do mediacji w sporze pomiędzy pracodawcami a pracownikami..." . Kwestia możliwych zastosowań schematu Nasha i związanych z nim trudności jest omówiona w [24] (rozdział 16).

Przykład 14.2. Niech U-koło o promieniu R i środku w $d = (0,0)$. Dla każdej liczby rzeczywistej c $\{(v_1, v_2) \in U : (v_1 - d_1)(v_2 - d_2) = c$ jest hiperbolą. Rozwiązaniem zagadnienia maksymalizacji jest punkt $(R\sqrt{2}/2, R\sqrt{2}/2)$.

Przykład 14.3. $f(U,d) = d\ \forall (U,d)$ spełnia aksjomaty II,III, IV, ale nie spełnia I.

14.4. Uwagi o strategicznym modelu przetargu

Strategiczne (dynamiczne) modele przetargu zakładają możliwość składania i odrzucania ofert, propozycji znalezienia "rozwiązania" przez graczy. Model ze skończoną liczbą możliwych ofert został zaproponowany przez I. Staehla w monografii [35]. A. Rubinstein zaproponował w 1982r istotne rozszerzenie tego modelu na continuum ofert [30, 29].
W modelu przetargu Rubinsteina–Staehla dwóch graczy muszą zgodzić się na podział tortu o wielkości 1. Podstawowa wersja modelu jest następująca. Czas jest dyskretny. W parzystych chwilach czasu (poczynajac od t=0) gracz 1 proponuje podział $(x, 1-x)$, który gracz 2 może zaakceptować lub nie. W pierwszym przypadku gra się kończy, w drugim gracz 2 proponuje 1 podział $(y, 1-y)$ (y niekoniecznie musi być różne od x), który gracz 2 może zaakceptować lub nie. W pierwszym przypadku gra się kończy, w drugim gracz 1 proponuje 2 kolejny podział itd. Jeżeli podział jest zaakceptowany w chwili $t = 0, 1, ...$, to wypłaty graczy mają postać $(\delta_1^t x, \delta_2^t (1-x))$, gdzie gracz 1 otrzymuje część x tortu, a 2 $1-x$, δ_i są czynnikami dyskontowymi (tort schnie z czasem). Z punktu widzenia taksonomii gier można ten model opisać jako grę ekstensywną z contimuum ofert, z nieskończonym horyzontem czasowym i doskonałą informacją. Gra ma nieskończenie wiele równowag Nasha, ale przy pewnych dodatkowych założeniach ma tylko jedną równowagę doskonałą. WMożna też pokazać że w określonych sytuacjach granicznych rozwiązania tego modelu pokrywają się z rozwiązaniem schematu arbitrażowego Nasha.
Omówienie przetargu Rubinsteina–Staehla można znaleźć np. w monografiach [6, 14].

15. Elementy teorii uczenia się w grach

15.1. Uwagi wstępne

Sformułowanie "uczenie się", lub "uczenie" (będziemy oba te terminu używać wymiennie) w modelach teoriogrowych ma szeroki sens. W ogólności oznacza zmianę, dopasowywanie strategii przez graczy. Celem tych zmian jest optymalizacja użyteczności granych strategii, przy uwzględnieniu reakcji przeciwników, i ewentualne osiągnięcie równowagi. Jest wiele sposobów definiowania, opisu, za pomocą teoriogrowych modeli formalnych, procesu uczenia się. W szczególności rozważa się zarówno modele w których uczenie się jest wynikiem powtarzalnych interakcji między skończoną grupa graczy (np. między dwoma graczami), jak i uczenie w populacjach z continuum graczy. Rozważa się zarówno interakcje opisywane przez gry ekstensywne, jak i powtarzalne gry strategiczne.
W [5], str. 3 autorzy określają w nastepujący sposob model uczenia:
A "learning model" is any model that specifies the learning rules used by individual players and examines their interaction when the game (or games) is played repeatedly.
"Strategicznym" celem różnych modeli uczenia się jest modelowanie rzeczywistych procesów ekonomicznych i społecznych. Teoria gier odgrywa tu ważną rolę jako środek opisu interakcji między podmiotami. Z formalnego punktu widzenia efekt uczenia sie to pewien stan, na ogół stacjonarny, o własnościach stabilności, który jest osiągany w wyniku procesu uczenia. Na ogół chce się by formalnym wynikiem procesu uczenia się byłoosiagnięcie pewnego stanu równowagi, typu równowagi Nasha, opisywanego przez atraktor odpowiedniego układu dynamicznego.
Istnieje wiele bardzo różnych modeli formalnych uczenia. Różnorodność modeli uczenia się odzwierciedla różnorodność możliwych założeń dotyczących graczy, stopnia złożoności ich zdolności analizowania sytuacji i możliwych reakcji, zakresu i złożoności uzyskiwanych informacji o grze, o przebiegu gry itp. Poszczególne modele uczenia się zależą w szczególności od
1. funkcji użyteczności (wypłat) graczy
2. informacji posiadanej przez graczy
3. Pamięci (o poprzednich rundach) posiadanej przez graczy i od ich zdolności obliczeniowych (np. można założyć zdolność wykonywania operacji arytmetycznych).
4. Typu zbioru graczy: może to być np. zbiór dwóch graczy, skończony zbiór graczy grających w gry dwu- lub wieloosobowe, zbiór continuum graczy–mamy wtedy do czynienia z grami populacyjnymi.
Najprostsze modele sa opisywane angielskim terminem *reinforced learning*, króry będziemy tłumaczyć jako uczenie się przez wzmacnianie, i opisują graczy reagujących na bodźce które podwyższają lub obniżają prawdopodobieństwo grania danymi strategiami. Przykładowe modele omówimy w następnym podrozdziale. Prostota tych modeli jest pozorna, odpowiednie modele formalne, opisywane za pomocą procesów Markowa, są na ogół skomplikowane (w szczególności gdy nie są to łańcuchy Markowa) i trudne do ścisłej analizy matematycznej. Jest też szeroka gama bardziej wyrafinowanych formalnie modeli, w których gracze mają określoną wiedzę o przeciwnikach, o używanych przez nich strategiach i otrzymywanych przez nich wypłatach, i którzy mają możliwości prognostyczne przewidywania kolejnych etapów gry. Gracze mają pewne przewidywania, przekonania (*predictions, beliefs*) dotyczące wyboru akcji przez przeciwników w przyszłej rundzie (ogólniej—-w przyszłych rundach) i grają "optymalne" akcje. Do takich modeli

należą modele imitacji, modele lepszych i najlepszych odpowiedzi (*myopic better or myopic best response*) oraz modele gry fikcyjnej (*fictitious play*) i gry fikcyjnej z szumem (*smooth fictitious play*).

Uwaga 15.1. Historycznie Cournot i Bertrand stworzyli pierwsze modele formalne oparte o uczenie się graczy. Co więcej, wynikiem odpowiednich algorytmów uczenia się była równowaga Nasha.

15.2. Uczenie się przez wzmacnianie

Uczenie się przez wzmacnianie (*reinforcement learning*) jest jednym z najprostszych modeli uczenia. Można go rozpatrywać zarówno dla gier rozgrywanych wielokrotnie między dwoma graczami, jak i dla gier populacyjnych. W literaturze stosowana jest też nazwa *stimulus–response models*, używana np. w modelu Busha–Mostellara zaproponowanym w latach 50ych XX wieku. Podstawową cechą takich modeli jest fakt że strategie które daja "satysfakcjonujący" wynik (np. nie gorszy od oczekiwań, aspiracji) będa w przyszłej rundzie grane z większym prawdopodobieństwem. W modelu tym jedyną informacją jaka posiada gracz jest jego wypłata w danej rundzie. Opiszemy modele w którym stopień wzmocnienia tendencji (prawdopodobieństwa) grania daną strategią w nastepnej rundzie zależy od różnicy między wypłatą uzyskiwaną z tej strategii, a pewnym poziomem aspiracji. W ogolności poziom aspiracji może być endogeniczny, ulegający zmianie w trakcie kolejnych rund. W opisywanym modelu poziom aspiracji będzie stały, egzogeniczny.
Model jest w pewnym sensie "prymitywny"–gracze nie znają strategicznej postaci gry, a jedynie otrzymywaną wypłatę. Gracze nie potrzebuja znać wypłat z poszczególnych strategii, a nawet nie muszą wiedzieć że biorą udział w grze.

Uwaga 15.2. Uczenie się przez wzmacnianie nazywa się też uczeniem adaptacyjnym (*learning through adaptation*). Inne przedstawione niżej typy uczenia się będziemy nazywać uczeniem wyrafinowanym (*sophisticated learning*) (inne tłumaczenia tego zwrotu: "wymyślne", czy też "finezyjne" uczenie się, wydają się jeszcze gorsze).

15.2.1. Model Rotha i Ereva

Omówimy model zaproponowany przez Rotha i Ereva [28]. Rozważamy dwuosobową GS z dodatnimi wypłatami. Gracz i ma $r_i, i = 1, 2$ strategii. Każdej z nich jest przypisana zależna od czasu nieujemna liczba, która nazwiemy inklinacją (*propensity*) $\theta_{ij}(t),\ i = 1, 2,\ k = 1, ...r_i$. Jest to "tendencja, skłonność" gracza i do grania strategią k. Każdemu graczowi jest w ten sposób przypisany wektor wag

$$\sigma_i(t) = (\sigma_{i1}(t), ...\sigma_{ir_i}(t)) : \quad \sigma_{ik} = \frac{\theta_{ik}}{\sum_{l=1}^{r_i} \theta_{il}} \quad i = 1, 2. \tag{15.1}$$

Mając dany wektor wag $\sigma_i(t)$ będziemy mówili że gracz i stosuje (gra) w chwili t strategię mieszaną $\sigma_i(t)$. Znajdziemy równanie ewolucji $\sigma_i(t)$.
Niech $s_i = s_i(t),\ i = 1, 2$ oznacza strategię czystą graną przez i w t, a (z pewną nieścisłością oznaczeń) $\pi_i \equiv \pi_i(t)$ wypłatę i gdy gracze grają tymi strategiami. Wprowadzimy też dla każdej strategii czystej $s_{ik} \in A_i, i = 1, 2,\ k = 1, ...r_i$ jej funkcję indykatorową, pomnożoną przez wartość wypłaty ("skalowaną przez wypłatę"):
$\psi_{ik} = \pi_i$ gdy $s_i = s_{ik}$, czyli gdy w chwili t jest grana strategia s_{ik}, $\ i = 1, 2$,
$\psi_{ik} = 0$ wpp.
Definiujemy dynamikę zmian inklinacji graczy:

$$\theta_{ik}(t + 1) = \theta_{ik}(t) + \psi_{ik}(t), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, ...r_i. \tag{15.2}$$

Każda grana strategia otrzymuje wzmocnienie w wysokości uzyskanej z niej wypłaty. Jeżeli założymy że kazdy gracz ma staly poziom aspiracji równy zero, to równoważnie możemy powiedziec że wzmocnienie jest równe różnicy pomiędzy wypłata a poziomem aspiracji. W tym sensie model ten zakłada dodatnie wzmocnienie (*positive stimulus*). Istnieje cała gama modeli w których wzmocnienie może być ujemne oraz w których poziom aspiracji jest zmienną endogeniczną i może być inny dla każdego gracza, patrz np. [38, 22, 23].
Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy, zakładając jednostajną ograniczoność ψ_{ij}, π_i

$$\sigma_{ik}(t+1) = \sigma_{ik}(t) + \frac{1}{\Theta(t)}[\psi_{ik}(t) - \pi_i(t)\sigma_{ik}(t)] + 0(\frac{1}{[\Theta_i]^2}), \quad i = 1,2, \quad k = 1, ...r_i, \tag{15.3}$$

gdzie $\Theta_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} \theta_{ik}(t),\ 0(a)$ oznacza skladnik rzędu a. Ponieważ ψ_{ij}, π_i są zmiennymi losowymi (ich realizacje zależą od wybory strategii czystych przez graczy), więc mamy w ten sposób określony proces stochastyczny. Okazuje się że równanie na wartości oczekiwane przyrostów wag $\sigma_{ik}(t+1) - \sigma_{ik}(t)$ są analogiczne do równań replikatorowych dla dwóch populacji. Dla gier 2×2 zostały udowodnione odpowiednie twierdzenia aproksymacyjne, patrz np. [21].
Formalna prostota modelu jest wynikiem minimalnych założeń o wiedzy i "kognitywnych" umiejętnościach graczy–znają oni jedynie swoje wypłaty (np. z poprzedniej rundy) i na podstawie tej wiedzy podejmują decyzję o wyborze przyszłej akcji.

15.2.2. Model Busha-Mostellera

Jest to drugi podstawowy model uczenia przez wzmacnianie. Jest 2 graczy, każdy ma do wyboru dwie (takie same) akcje, każda z nich wybiera z pewnym prawdopodobieństwem. Po wyborze akcji i otrzymaniu wypłat każdy z graczy uaktualnia prawdopodobieństwa. Jeżeli wypłata jest wyższa od pewnego poziomu aspiracji to prawdopodobieństwo użycia w następnym kroku akcji zagranej poprzednio rośnie, wpp. maleje.
Niech $y = (y_1, y_2),\ y_i \in A_i,\ i = 1,2$–profil strategii czystych graczy, $u_i(y_1, y_2)$–wypłata gracza i z takiego profilu. Niech $p = (p_1, p_2)$–profil strategii mieszanych graczy: p_i oznacza prawdopodobieństwo grania pierwszej strategii przez gracza i.
Niech $y^n = (y_1^n, y_2^n)$–profil strategii czystych zagrany w n–tym kroku. Definiujemy stymulus (*stimulus*) gracza i:

$$s_i(y^n) = \frac{u_i(y^n) - As_i}{sup_{a \in A_1 \times A_2}|u_i(a) - As_i|}, \tag{15.4}$$

gdzie As_i oznacza ustalony poziom aspiracji gracza $i, i = 1,2$.
Zauważmy że $s_i \in [-1,1]$–stymulus może być dodatni lub ujemny. Widać że do obliczenia stymulusa gracza potrzebna jest jego wypłata, poziom aspiracji oraz znajomość wypłat z wszystkich profili czystych, natomiast gracze nie znają wypłat i wyboru akcji przeciwników.
Stymulus posłuży nam do zdefiniowania (dyskretnej) dynamiki układu, czyli u nas do uaktualniania prawdopodobieństwa grania np. pierwszej strategii przez obu graczy.
Niech p_{i,y_i}^{n+1} oznacza prawdopodobieństwo że gracz i w $n+1$ rundzie zagra y_i. Dynamika ma postać:

$$p_{i,y_i}^{n+1} = p_{i,y_i}^n + l_i s_i(y^n)(1 - p_{i,y_i}^n) \tag{15.5}$$

jezeli $s_i(y^n) \geqslant 0$, oraz

$$p_{i,y_i}^n + l_i s_i(y^n) p_{i,y_i}^n \tag{15.6}$$

jeżeli $s_i(y^n) < 0$. Parametr $l_i \in [0,1]$ nazywamy tempem uczenia się (*learning rate*).
Prawdopodobieństwo akcji nie zagranej jest uaktualniane tak by w sumie z prawdopodobieństwem akcji zagranej dawały 1. Im większy iloczyn $l_i s_i(y^n)$ tym większa zmiana prawdopodobieństwa.

Otrzymaliśmy pewien model stochastyczny, ze stanem układu opisywanym przez wektor losowy (p_1, p_2). Realizacja zmiennej losowej $p_i,\ i = 1, 2$ to prawdopodobieństwo zagrania przez gracza i w kolejnym kroku pierwszej z dwóch dostepnych mu strategii. Model ten jest dyskretnym w czasie procesem Markowa z ciagłą przestrzenią stanów.
Przedstawiony model obejmuje dowolne gry 2x2, niekoniecznie symetryczne.
Używając symulacji komputerowych Flache i Macy [4] znaleźli dwa rodzaje równowag w modelu BM, które nazwali *selfreinforcing equilibria* oraz *selfcorrecting equilibria*. Te równowagi profile strategii do których dąży układ. Matematyczną formalizację tych pojęć można znaleźć w [12].

15.3. Inne typy uczenia

15.3.1. Uczenie się przez imitację

O imitacji mówimy gdy gracz w następnej rundzie rozgrywanej gry symetrycznej gra pewną strategią innego gracza (adoptuje, imituje innego gracza). Wybór strategii jest na ogół uzależniony od wypłaty uzyskiwanej przez poszczególne strategie. Możliwość imitowania zależy od modelu. Może być opisana przez pewne stałe prawdopodobieństwo, może zależeć od tego czy wypłata jest czy nie powyżej pewnego progu itd.
Po otrzymaniu możliwości imitacji gracz wybiera gracza którego strategię może imitować. Wybór gracza może być losowy, a może zależeć od wypłat uzyskiwanych przez innych graczy w poprzednich rundach. Kandydaci do "bycia imitowanym" mogą być brani z calego zbioru graczy lub też–w przypadku gier ze strukturą przestrzenną–z odpowiednio zdefiniowanego otoczenia gracza imitującego. Można też np. wprowadzić mozliwość eksperymentowania przez dopuszczenie wyboru losowego: gracz imituje strategię przeciwnika z pewnym prawdopodobieństwem.

15.3.2. Procedury lepszej/najlepszej odpowiedzi

W modelach lepszej (*better response*) i najlepszej odpowiedzi (*best response*) zakładamy że każdy gracz zna wypłatę jaką otrzymałby z każdego możliwego wybory strategii przez wszystkich graczy oraz zna akcje wszystkich graczy w poprzedniej rundzie. Przy wyborze swojej kolejnej akcji każdy gracz zakłada że akcje przeciwników nie ulegną zmianie. Można to nazywać statycznym postrzeganiem otoczenia. Modele te opisuje się też przymiotnikiem (*myopic*) co odzwierciedla fakt że gracze nie biorą pod uwagę wpływu aktualnego wyboru strategii na przyszłe wybory i wypłaty uczestników gry.
W modelu lepszej odpowiedzi gracz identyfikuje wszystkie strategie które dadzą mu wyższą niż aktualna wypłate i wybiera losowo jedną z nich. W modelu najlepszej odpowiedzi gracz wybiera strategię tak aby zmaksymalizować swoja wypłatę przy oczekiwanych przez niego strategiach którymi będą grali pozostali gracze.

15.3.3. Procedura gry fikcyjnej

Jest to najstarszy i jeden z najbardziej popularnych modeli uczenia. W porównaniu z poprzednim modelem (naj)lepszych odpowiedzi mamy dalej do czynienia ze statycznym postrzeganiem otoczenia, natomiast gracze wykazują wyższy stopień "wyrafinowania". Po pierwsze każdy gracz zna całą dotychczasową historię gry, tzn. wszystkie akcje grane przez wszystkich graczy. Po drugie każdy gracz zakłada że każdy z pozostałych graczy będzie grał w następnej rundzie pewną strategią mieszaną, którą definiuje następujaco. Prawdopodobieństwo każdej dostepnej strategii czystej każdego z pozostałych graczy jest równe częstości dotychczasowego jej używania przez tego gracza. W kolejnej rundzie "uczący się" gracz wybiera najlepszą odpowiedź na tak zdefiniowany profil strategii mieszanych gry.

W przypadku dwuosobowych gier strategicznych procedura gry fikcyjnej zakłada że gracz zapamiętuje wszystkie grane przez przeciwnika strategie czyste (historię gry) i na jej podstawie tworzy rozkład prawdopodobieństwa grania przez przeciwnika poszczególnych strategii czystych–strategię mieszaną–w nastepnej rundzie, w której gra najlepszą odpowiedź na tę strategię mieszaną.
Można pokazać że w przypadku gry z więcej niż jednym przeciwnikiem, przy założeniu że gracz będzie przewidywał rozkład łączny, finalnym efektem procedury jest na ogół równowaga skorelowana.
Dla wielu typów gier procedura gry fikcyjnej jest zbieżna to równowagi Nasha. Istnieją jednak proste kontrprzykłady, związane z brakiem ciągłości odwzorowania najlepszej odpowiedzi, z których pierwszy był skonstruowany w pracy [32]. Metody "uzbieżniania" procedury polegają na wprowadzeniu różnych typów niedużych zaburzeń do gry, lub rozważanie populacji graczy zamiast jednego, patrz [26].
Równowaga Nasha została wprowadzona w 1950 r. Rok później zostały zaproponowane algorytmy znajdowania równowag Nasha. Algorytmy te zostały później zinterpretowane jako modele uczenia się w grach, w szczegolności jako procedury gry fikcyjnej patrz np. [2, 27].

15.3.4. Uczenie się przez testowanie

Gracz rozgrywa z przeciwnikiem $|S|$ gier jednokrotnych, używając kolejno wszystkich dostępnych mu strategii czystych, i używa do gry tę która mu dała największa wypłatę (w przypadku kilku takich strategii wybiera losowo jedna z nich). Ta procedura nosi nazwę procedury jednokrotnego testowania. Przy k–krotnym powtórzeniu takiego algotytmu n-krotnego otrzymujemy procedurę k–krotnego testowania, por. [18]

15.3.5. Procedury porównań

Powyższe modele uczenia się można uogólnić na jeden model który nazwiemy modelem porównywania ([25]).
Załóżmy że gracz gra pewną strategią i. Dokonuje sie w pewien sposób (losowy lub nie) wyboru pewnego elementu $\omega \in \Omega$ (lub zbioru elementów) który nazwiemy próbką.
Wyjściowym formalnym obiektem modelu jest rodzina przestrzeni probabilistycznych $<\Omega, B, P>$, gdzie zbiór próbek Ω jest metryzowalna przestrzenią topologiczną, B jest σ–algebrą zbiorów Borelowskich, a P jest zbiorem wszystkich miar probabilistycznych na B.
Próbka ω jest losowana zgodnie z pewnym rozkładem $\mu \in P$. Prawdopodobieństwo zamiany strategii i na j jest dane wzorem

$$p_{ij} = \int_\Omega r_{ij}(\omega) d\mu(\omega) \tag{15.7}$$

gdzie $r_{ij} \in [0,1]$ jest tzw. funkcją reakcji, taką że wektor $(r_{i1}(\Omega), ..., r_{i|S|}(\Omega))$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze strategii czystych S dla każdej strategii $i \in S$.
W przypadku uczenia się przez imitację przestrzeń próbek Ω jest zbiorem jednoelementowych zbiorów $\{i\}, i = 1, ...|S|$. Funkcje reakcji są takie jak w poprzednim przykładzie, ograniczonym do dwóch strategii.
Dla procedury lepszej/najlepszej odpowiedzi $\Omega = S$, tzn. przestrzeń próbek jest jednoelementowa, $\mu = 1$, a $r_{ij} = 1/m$ jeżeli j jest najlepszą odpowiedzią na i, $r_{ij} = 0$ wpp., gdzie m jest liczbą najlepszych odpowiedzi.

15.3.6. Inne modele uczenia

Uczenie się racjonalne (*rational learning*). Jest to najbardziej "wyrafinowany" z prezentowanych modeli. Zakładamy że gracze znają sytuację strategiczna oraz że mają subiektywny (zależny od gracza) zbiór przekonań (*beliefs*) o strategiach behawioralnych pozostalych graczy. Gracze reagują optymalnie na przekonania–strategie behawioralne–pozostałych graczy (w sensie najlepszej odpowiedzi: tak aby zmaksymalizować zdyskontowana sumę wszystkich swoich przyszłych wypłat).

Uczenie się behawioralne: Odpowiednie modele te są tworzone na podstawie wyników eksperymentalnych, które w szczególności pokazują że ludzie często nie zachowują sie "racjonalnie", powoduja się emocjami, popełniają błędy, mają ograniczony horyzont czasowy planowania strategicznego i pamięć o historii (zapominanie), ograniczoną wiarę w racjonalność, umiejętności pozostałych graczy itp.

Literatura

[1] R. Aumann, S. Hart. *Handbook of Game Theory.* North-Holland, vol. I: 1992, vol. II: 1994, vol. III: 2002.

[2] G. Brown. *Iterative solutions of games by fictituous play.* in T.C.Koopmans, ed. "Activity Analysis of Production and Allocation, NY: Wiley, 374-376, 1951.

[3] L.A. Dugatkin, H.K. Reeve. *Game Theory and Animal Behavior.* Oxford University Press, 1998.

[4] A. Flache, M. Macy. *Stochastic collusion and the power law of learning: a general reinforcement learning model of cooperation.* Journal of Conflict Resolution, 46(5) 629-653, 2002.

[5] D. Fudenberg, D. K. Lewin. *Theory of Learning in Games.* MIT Press, 1998.

[6] D. Fudenberg, J. Tirole. *Game Theory.* MIT Press, 1998.

[7] R. Gibbons. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton Univ. Press, 1992.

[8] H. Gintis. *The Bounds of Reason. Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences.* Princeton Univ. Press, 2009.

[9] H. Gintis. *Game Theory Evolving.* Princeton Univ. Press, 2009.

[10] J. Harsanyi, R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games.* MIT Press, 1988.

[11] J. Hofbauer, K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics.* 1998, Cambridge Univ. Press.

[12] L.R. Izquierdo, N.M. Gotts, J.G. Polhill. *Case-based reasoning, social dilemmas and a new equilibrium concept.* Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 7(3) Article 1, 2004.

[13] D. Luce, H. Raiffa. *Gry i decyzje.* 1994, 1994.

[14] M. Malawski, A. Wieczorek, H. Sosnowska. *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

[15] E. R. Nelson, S. G. Winter. *An Evolutionary Theory of Economic Change Belknap Press.* Belknap Press, 1982.

[16] J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton Univ. Press, 1944.

[17] M. J. Osborne. *An Introduction to Game Theory.* 2004, Oxford Univ. Press.

[18] M. J. Osborne, A. Rubinstein. *Games with procedurally rational players.* American Economic Review, 88, 834-847, 1998.

[19] M. J. Osborne, A. Rubinstein. *A Course in Game Theory.* NIT Press, 2002.

[20] G. Owen. *Teoria Gier.* PWN, 1975.

[21] M. Posch. *Cycling in a stochastic learning algorithm for normal-form games.* Journal of Evolutionary Economics, 7, 193-207, 1997.

[22] T. Płatkowski. *Enhanced cooperation in prisoner's dilemma with aspiration.* Applied Mathematic Letters, 22, 1161-1165, 2009.

[23] T. Płatkowski, P. Bujnowski. *Cooperation in aspiration-based N-person prisoner's dilemmas.* Physical Review E, 79, 036103, 2009.

[24] H. Raiffa. *The Art and Science of Negotiations.* Harvard University Press, 1982.

[25] M. Ramsza. *Elementy modelowania ekonomicznego opartego na teorii uczenia się w grach populacyjnych.* Oficyna Wydawnicza SGH Warszawa, 2010.

[26] M. Ramsza, R.M. Seymour. *Fictitious play in an evolutionary environment.* Games and Economic Behavior, 68 (2010) 303-324, 2010.

[27] J. Robinson. *An iterative method of solving a game.* The Annals of Mathematics 54(2) 296-301, 1951.

[28] A.E. Roth, I. Erev. *Learning in extensive–form game: experimental date and simple dynamic models in the intermediate term.* Games and Economic Behavior, 8, 164-212, 1995.

[29] A. Rubinstein. *Perfect equilibrium in a bargaining game.* Econometrica 52 (1982) 1351-1364, 1982.

[30] A. Rubinstein. *Perfect equilibrium in a bargaining model.* Econometrica, 50, 97-109, 1982.

[31] A. Rubinstein. *Modeling Bounded Rationality.* MIT Press, 1998.
[32] L.S. Shapley. *Some topics in two-person games.* Annals of Mathematics Study, vol. 52, (1964) 1-28, 1964.
[33] M. Shubik. *Game Theory in the Social Sciences. Concepts and Solutions.* The MIT Press, 1984.
[34] B. Skyrms. *The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure.* Cambridge Univ. Press, 2004.
[35] I. Staehl. *Bargaining Theory.* Stockholm School of Economics, 1972.
[36] P. D. Straffin. *Teoria Gier.* Scholar, 2001, 2001.
[37] F. Vega-Redondo. *Evolution, games and economic behaviour.* Oxford Univ. Press, 1996.
[38] F. Vega-Redondo. *Economics and the Theory of Games.* Cambridge University Press, 2003.
[39] J. Weibull. *Evolutionary Game Theory.* MIT Press, 1995.
[40] H. Peyton Young. *Individual Strategies and Social Structure. An Evolutionary Theory of Institutions.* Princeton Univ. Press, 1997.