OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA

Optymalizacja wielokryterialna

Optymalizacją wielokryterialną nazwiemy próbę znalezienia wektora *zmiennych decyzyjnych:*

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_k],$$

który *spełnia warunki ograniczające*:

$$g_i(x) \geq 0 \qquad (i = 1 \dots m),$$
$$h_i(x) = 0 \qquad (i = 1 \dots p)$$

oraz *optymalizuje wektor funkcyjny*, którego elementy reprezentują funkcje celu:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

*Polega na znalezieniu optymalnego rozwiązania, które jest akceptowalne z punktu widzenia **każdego** kryterium*

Funkcje celu reprezentują matematyczny opis danego kryterium oraz najczęściej pozostają w konflikcie między sobą.

Przypomnijmy uproszczony problem wyboru nowego systemu informatycznego zarządzania dla firmy. Mamy 6 ofert systemu i zestawienie ich najważniejszych charakterystyk w tabeli

Nr oferty	Ocena elastyczności	Ocena jakości	Obniżka kosztów
1	Mała	Dobra	28
2	Mała	Niedostateczna	27
3	Przeciętna	Idealna	5
4	Przeciętna	Bardzo dobra	17
5	Duża	Dobra	21
6	Duża	dostateczna	27

Przykład

- Problem wyboru systemu sprowadza się do wyboru elementu x ze zbioru Q = {1; 2; 3; 4; 5; 6} na podstawie trzech funkcji oceny $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ wyrażających oceny elastyczności, jakości systemu i obniżkę kosztów działania w odpowiednich skalach.
- Wszystkie trzy oceny mają określony porządek w tym sensie, że większa wartość funkcji oceny wyraża lepszą ocenę.

Przykład

- Wartości funkcji oceny są zestawione w następującej tabeli

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	1	2	28
2	1	0	27
3	2	4	5
4	2	3	17
5	3	2	21
6	3	1	27

- Problem decyzyjny wyboru wariantu systemu polega na wyborze jednego z sześciu trzyelementowych wektorów (wierszy) ocen

$y_1 = (1; 2; 28)$, $y_2 = (1; 0; 27)$, $y_3 = (2; 4; 5)$,
$y_4 = (2; 3; 17)$, y5 = (3; 2; 21), $y_6 = (3; 1; 27)$.

Relacja preferencji

- Z każdym problemem decyzyjnym związany jest pewien model preferencji. Model taki ustala, że dla pewnych par wektorów ocen określone jest, który z nich jest lepszy. Wyrażane jest to za pomocą relacji preferencji.

Preferencje określone na wektorach ocen

- relacja ścisłej preferencji: x P y , *x jest lepszy niż y*
- relacja indyferencji: x *I* y , *x tak samo dobry jak y*
- relacja słabej preferencji: x S y , *x jest nie gorszy niż y*
- istnieją nieporównywalne wektory ocen: x || y

- x S y relacja podstawowa
- x P y , (x S y i nieprawda, że y S x)
- x *I* y , (x S y i y S x)

Relacja preferencji – $\geq$

W przypadku pojedynczych ocen liczbowych (jednowymiarowych wektorów ocen) relacja preferencji określona jako nierówność liczbowa

$$x \succcurlyeq y \quad \text{wiw} \quad x \geq y$$

jest porządkiem liniowym z relacjami ścisłej preferencji i indyferencji określonymi, odpowiednio, jako ostra nierówność $>$ i równość $=$.

Porządek Pareto

- W przypadku wielowymiarowych wektorów oceny $x=[x_1,\ldots,x_m]$, $y=[y_1,\ldots,y_m]$ można zastosować *porządek Pareto (produktowy)*, czyli relację preferencji zdefiniowaną przez nierówności na poszczególnych współrzędnych

$$x \succcurlyeq y \quad \text{wiw} \quad x_i \geq y_i \quad i=1,\ldots,m$$

Wtedy

- $x \succ y$ wiw $x_i \geq y_i \quad i=1,\ldots,m$ i istnieje j takie, że $x_j > y_j$
- $x \cong y$ wiw $x_i = y_i \quad i=1,\ldots,m$

Relacja nierówności wektorowej jest *zwrotna i przechodnia.* Jest ona również *antysymetryczna*, bo odpowiadająca jej relacja indyferencji pokrywa się z równością wektorów. Tym samym relacja nierówności wektorowej jest porządkiem częściowym

Porządek Pareto –diagram Hassego

Nie jest to porządek liniowy, gdyż relacja ta nie jest spójna (istnieją wektory nieporównywalne).

Przykład: Problem decyzyjny wyboru wariantu systemu polega na wyborze jednego z sześciu trzyelementowych wektorów (wierszy) ocen

$y_1 = (1; 2; 28)$, $y_2 = (1; 0; 27)$, $y_3 = (2; 4; 5)$, $y_4 = (2; 3; 17)$,

$y_5 = (3; 2; 21)$, $y_6 = (3; 1; 27)$.

Zapiszmy porządek Pareto, dla uproszczenia nie zapisujemy zwrotności:

$\succcurlyeq = \{(y_1,y_2), (y_6,y_2)\}$

$y_1||y_3$, $y_1||y_4$, $y_1||y_5$, $y_1||y_6$, $y_2||y_3$, $y_2||y_4$, $y_2||y_5$, $y_3||y_4$, $y_3||y_5$, $y_3||y_6$, $y_4||y_5$, $y_4||y_6$, $y_5||y_6$,

Porządek Pareto –diagram Hassego

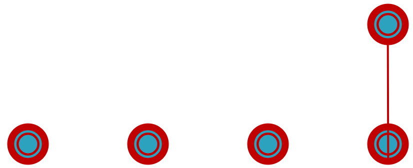
$\succcurlyeq = \{(y_2,y_1), (y_6,y_2)\}$

$y_1 || y_3$, $y_1 || y_4$, $y_1 || y_5$, $y_1 || y_6$, $y_2 || y_3$, $y_2 || y_4$, $y_2 || y_5$, $y_3 || y_4$, $y_3 || y_5$, $y_3 || y_6$, $y_4 || y_5$, $y_4 || y_6$, $y_5 || y_6$,

Zbudujemy diagram Hassego:

$A_1=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ $M_1=\{y_3, y_4, y_5, y_1\}$

$A_2=\{y_2, y_6\}$ $M_2=\{y_2\}$



Porządek Pareto –diagram Hassego

$y_1 = (1; 2; 28)$, $y_2 = (1; 0; 27)$, $y_3 = (2; 4; 5)$, $y_4 = (2; 3; 17)$, $y_5 = (3; 2; 21)$, $y_6 = (3; 1; 27)$.

Zapiszmy porządek Pareto – dla uproszczenia nie zapisujemy zwrotności:

$\succcurlyeq = \{(y_1, y_2), (y_6, y_2)\}$

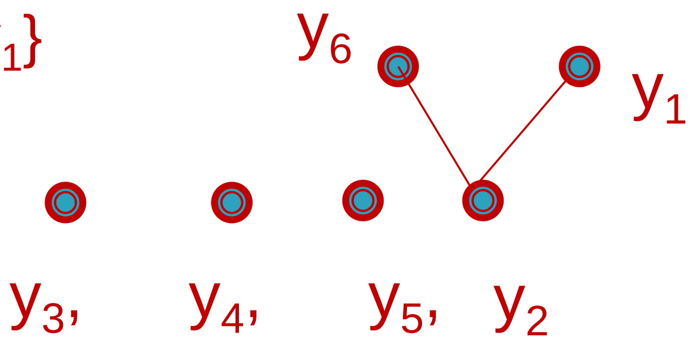
$y_1 || y_3$, $y_1 || y_4$, $y_1 || y_5$, $y_1 || y_6$, $y_2 || y_3$, $y_2 || y_4$, $y_2 || y_5$, $y_3 || y_4$, $y_3 || y_5$, $y_3 || y_6$, $y_4 || y_5$, $y_4 || y_6$, $y_5 || y_6$,

Zbudujemy diagram Hassego:

$A_1 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ $M_1 = \{y_3, y_4, y_5, y_1\}$

$A_2 = \{y_1, y_6\}$ $M_2 = \{y_2\}$

$A_3 = \{y_6\}$ $M_3 = \{y_6\}$



Elementy y_3, y_4, y_5 są jednocześnie minimalne i maksymalne.

Porządek leksykograficzny

Dla wektorów ocen *relacja nierówności leksykograficznej (alfabetycznej)*

$\geq_{lex}$ jest zdefiniowana następująco:

$y >_{lex} x$ wiw, gdy istnieje j takie, że $y_j > x_j$ oraz $y_k = x_k$ dla $k < j$

$y \geq_{lex} x$ wiw, gdy $y >_{lex} x$ lub $y = x$

Relacja nierówności leksykograficznej jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna i spójna. Definiuje ona zatem porządek liniowy.

W przykładzie $y_1 = (1; 2; 28)$, $y_2 = (1; 0; 27)$, $y_3 = (2; 4; 5)$, $y_4 = (2; 3; 17)$, $y_5 = (3; 2; 21)$, $y_6 = (3; 1; 27)$,
stosując relację nierówności leksykograficznej stwierdzamy, że

$y_5 >_{lex} y_6 >_{lex} y_3 >_{lex} y_4 >_{lex} y_1 >_{lex} y_2$

Relacja preferencji wyrażona w postaci porządku leksykograficznego faktycznie wprowadza hierarchię funkcji ocen.

Porządek leksykograficzny

Najważniejsza jest wartość pierwszej współrzędnej a tylko przy jednakowych wartościach pierwszych współrzędnych porównywane są drugie współrzędne itd.

W omawianym przykładzie oznacza to, że przy wyborze systemu za najważniejszą przyjmuje się ocenę elastyczności systemu, następnie ocenę jakości, jako najmniej ważną – obniżkę kosztów.

Zmiana kolejności funkcji ocen oznacza tu przyjęcie innej hierarchii ocen. Na przykład, zamieniając w hierarchii oceny bezpieczeństwa i wydajności systemu i stosując porządek leksykograficzny wyznaczylibyśmy wariant 3 z wektorem ocen $\sim y_3 = (4; 2; 5)$ jako najlepszy wśród sześciu odpowiednich wektorów

$\sim y_1 = (2; 1; 28)$, $\sim y_2 = (0; 1; 27)$, $\sim y_3 = (4; 2; 5)$, $\sim y_4 = (3; 2; 17)$, $\sim y_5 = (2; 3; 21)$, $\sim y_6 = (1; 3; 27)$.

Otrzymujemy wtedy następujące uszeregowanie:

$\sim y_3 >_{lex} \sim y_4 >_{lex} \sim y_5 >_{lex} \sim y_1 >_{lex} \sim y_6 >_{lex} \sim y_2$

Techniki optymalizacji wielokryterialnej- teoretyczne podstawy teorii gier

Skalaryzacją zadania optymalizacji wielokryterialnej nazywamy zadanie optymalizacji jednokryterialnej (*wprowadzenie funkcji użyteczności s)*

$$\max \{s(f_1(x); f_2(x); \ldots; f_m(x)) : x \in Q\}$$

z funkcją użyteczności $s : R^m \to R$.

Maksymalizacja funkcji skalaryzującej s definiuje relację preferencji

$$y' \succcurlyeq_s y \text{ wiw, gdy } s(y') \geq s(y)$$

Techniki optymalizacji wielokryterialnej – skalaryzacja w postaci sumy lub średniej

1. Suma : $\max \{ \sum f_j(x) : x \in Q\}$

2. Średnia : $\max \{ (\sum f_j(x))/m : x \in Q\}$

Zob. kryterium Bayesa w grach z naturą.

Techniki optymalizacji wielokryterialnej – skalaryzacja w postaci ważonej sumy

Powszechnie stosowaną techniką wyznaczania rozwiązań efektywnych jest *metoda ważenia ocen oparta na skalaryzacji za pomocą ważonej sumy ocen*. Zwykle przyjmuje się wagi znormalizowane, tak aby sumowały się do jedności.

Dla dowolnych dodatnich wag $w_i > 0$ rozwiązujemy zadanie *skalaryzacji ważonej*

$$\max \{ \sum w_i f_j(x) : x \in Q \}$$

Zob. kryterium Bayesa-Laplace'a w grach z naturą.

Techniki optymalizacji wielokryterialnej – skalaryzacja maksyminowa

$$\max \{ \min f_j(x) : x \in Q\}$$

Zob. kryterium Walda w grach z naturą.

Techniki optymalizacji wielokryterialnej – ważona skalaryzacja maksyminowa

Skalaryzację maksyminową, podobnie jak sumę ocen, można rozpatrywać z wagami.

Dla dowolnych dodatnich wag $w_i > 0$ szukamy

$$\max \{ \min w_i f_i(x) : x \in Q \}$$

Techniki optymalizacji wielokryterialnej –skalaryzacja maksy-maksyminowa

Dla ustalonego współczynnika $\lambda > 0$ szukamy

$$\max \{ \lambda \cdot \min f_i(x) + (1-\lambda) \cdot \max f_i(x) : x \in Q \}$$

Zob. kryterium Hurwicza w grach z naturą.

PODSTAWY TEORII GIER

W sytuacjach konfliktowych dochodzi do sprzeczności interesów różnych podmiotów. Wiąże się to z podejmowaniem decyzji w warunkach sprzeczności interesów.

Sytuacje konfliktowe można rozwiązać stosując algorytmy z teorii gier.

Teoria gier to matematyczna teoria pewnej klasy modeli, służących podejmowaniu decyzji w warunkach konfliktu, niepewności lub nieokreśloności.

Teoria gier jest więc dziedziną zajmującą się opisem sytuacji, w których podmioty (*gracze*) podejmują świadome decyzje (*nazywane strategiami*), w wyniku których zapadają rozstrzygnięcia mogące zmienić ich położenie.

FUNKCJA KORZYŚCI

Aby mieć matematyczne narzędzia badania wariantów decyzyjnych i wyboru wariantu optymalnego wprowadza się wartości liczbowe dotyczące określonego kierunku działania odpowiadające różnym stanom (lub kierunkom działania przeciwnika). Tym przeciwnikiem może być gracz osobowy lub stan natury.

Ponieważ każdej kombinacji naszego wariantu decyzyjnego i wariantu przeciwnika można przypisać jednoznacznie pewną wartość (korzyść, wypłatę), to mamy do czynienia z zależnością typu funkcyjnego, którą nazwiemy *funkcją korzyści.*

Gdy zbiór wariantów jest n elementowy a zbiór wariantów przeciwnika jest m elementowy, to wartości funkcji korzyści można przedstawić w postaci macierzy nxm nazywanej *macierzą wypłat (macierzą korzyści).*

Wiersz lub kolumnę macierzy wypłat nazwiemy *wektorem wypłat (wektorem korzyści)*

MACIERZ WYPŁAT

Z \ D	Z_1	Z_2	...	Z_j	...	Z_m
D_1	K_{11}	K_{12}	...	K_{1j}	...	K_{1m}
D_2	K_{21}	K_{22}	...	K_{2j}	...	K_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
D_i	K_{i1}	K_{i2}	...	K_{ij}	...	K_{im}
...	...	...	...	...	...	...
D_n	K_{n1}	K_{n2}	...	K_{nj}	...	K_{nm}

Równowaga Nasha

Równowaga Nasha (ang. Nash equilibrium) jest to profil strategii teorii gier, w którym strategia każdego z graczy jest optymalna, przyjmując wybór jego oponentów za ustalony. W równowadze żaden z graczy nie ma powodów jednostronnie odstępować od strategii równowagi. W tym sensie równowaga jest stabilna.

Każda skończona gra ma przynajmniej jedną równowagę Nasha, niekoniecznie w strategiach czystych.

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE ZERO

Są to gry z dwoma graczami**.** *Suma gry* to różnica pomiędzy zyskiem z gry wygrywającego, a stratą przegrywającego, czyli w tych grach suma gry jest *równa zero*
Innymi słowy: wygrana jednego gracza jest równa stracie drugiego gracza. Czyli funkcja korzyści jednego gracza jest przeciwna do funkcji korzyści drugiego gracza.

Założenia:
1. dwóch zantagonizowanych graczy
2. przegrana jednego gracza równa się wygranej drugiego
3. zdeterminowana, skończona liczba strategii

Równowagą Nasha w grze dwuosobowej jest następujący wybór:
Wybieram to, co jest dla mnie najlepsze, gdy ty robisz to, co robisz.
Ty robisz to, co jest dla ciebie najlepsze, gdy ja robię to, co robię.

MACIERZ WYPŁAT dla gracza A

Funkcja korzyści ma wartości K_{ij}

B / A	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	K_{11}	K_{12}	...	K_{1j}	...	K_{1m}
A_2	K_{21}	K_{22}	...	K_{2j}	...	K_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	K_{i1}	K_{i2}	...	K_{ij}	...	K_{im}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	K_{n1}	K_{n2}	...	K_{nj}	...	K_{nm}

MACIERZ WYPŁAT dla gracza B

Funkcja korzyści ma wartości $-K_{ij}$

B / A	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	$-K_{11}$	$-K_{12}$	...	$-K_{1j}$	...	$-K_{1m}$
A_2	$-K_{21}$	$-K_{22}$	...	$-K_{2j}$	...	$-K_{2m}$
...	...	...	...	...	...	...
A_i	$-K_{i1}$	$-K_{i2}$	...	$-K_{ij}$	...	$-K_{im}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	$-K_{n1}$	$-K_{n2}$	...	$-K_{nj}$	...	$-K_{nm}$

Ustalamy, że w grze dwuosobowej o sumie zero będziemy stosowali macierz korzyści jednego gracza wiedząc, że jednocześnie są to straty gracza drugiego.

STRATEGIE

W teorii gier termin *strategia* występuje w dwóch aspektach:

1. Strategią nazywamy wariant decyzyjny danego gracza (dla uniknięcia niejasności czasami będziemy używali po prostu terminu wariant decyzyjny)

2. Strategią nazywamy też sposób postępowania prowadzący do podjęcia optymalnej decyzji

W grze dwuosobowej o sumie zero wyróżnia się następujące strategie:

1. ***strategia wariantu dominującego*** – jeżeli jakiś wariant nie prowadzi do gorszych wypłat niż inny, a w niektórych przypadkach prowadzi do wypłat lepszych, to taki wariant jest *dominujący* w sensie porządku Pareto na wektorach wypłat.

*wariant jest z**dominowany*** – jeżeli jest to *zdominowany* przez inny wariant w sensie porządku Pareto na wektorach wypłat.

STRATEGIE

2. ***strategia maksyminowa*** – jest to strategia, która prowadzi do maksymalizacji najniższych możliwych wypłat w danej grze

Strategie 1. i 2. należą do grupy tzw. ***strategii czystych***

3. ***strategia mieszana*** – jeżeli dla gracza A dane są warianty decyzyjne A_1, $A_2, \ldots A_n$ to strategia mieszana jest dowolną kombinacją tych strategii stosowanych z prawdopodobieństwem, $p_1, p_2, \ldots p_n$, przy czym:
$p_i \geq 0$ dla ($i = 1, 2, \ldots, n$) oraz $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Aby rozwiązać grę

- zmniejszamy rozmiar gry tzn. eliminujemy warianty dominowane
- poszukujemy rozwiązania w zbiorze strategii czystych
    - wyznaczamy wariant dominujący – jeśli nie istnieje, to stosujemy strategię maksyminową

STRATEGIA MAKSYMINOWA

Strategia maksyminowa sprowadza się do następujących czynności:
• wybieramy minimalną wartość w każdym wierszu (przyjmujemy, że gracz *B* wybierze wariant najbardziej niekorzystny dla *A*)
• wybieramy maksymalną wartość w każdej kolumnie (gracz *B* zakłada, że gracz *A* wybierze wariant najgorszy dla *B*)

Jeżeli maksymalna z minimalnych wartości z wierszy jest równa minimalnej z maksymalnych wartości z kolumn, to wtedy mówimy, że istnieje ***rozwiązanie - punkt siodłowy (punkt równowagi)***.

Będzie to punkt równowagi Nasha.
Przy założeniu, że obydwaj gracze maksymalizują swoje zyski wybór punktu siodłowego jest najlepszą strategią dla obydwu graczy.

PRZYKŁAD

Sztaby wyborcze dwóch kandydatów na prezydenta spodziewają się, że decydujący wpływ na wynik kampanii mogą mieć jej dwa ostatnie dni. Obaj politycy zdają sobie sprawę, że kluczową rolę w wyborach mogą odegrać głosy mieszkańców dwóch dużych miast: X i Y.

- Każdy z polityków może wybrać jedną z trzech strategii postępowania:

  A1 =B1 spędzić dwa dni w mieście X

  A2 =B2 spędzić dwa dni w mieście Y

  A3 =B3 spędzić jeden dzień w mieście X i jeden w Y

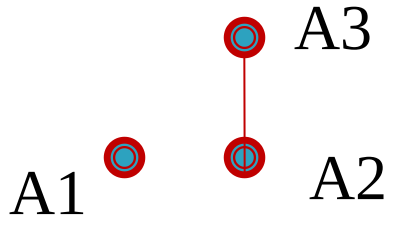
- Sztab wyborczy Polityka A. przygotował prognozy przyrostu głosów na Polityka A. kosztem Polityka B. w zależności od wybranych przez nich strategii.

PRZYKŁAD

Macierz wypłat w tej grze jest następująca:

	B1	B2	B3
A1	-50	-30	40
A2	20	-10	20
A3	50	10	20

Diagram Hassego dla porządku Pareto na wektorach A1, A2, A3:



Zatem A2 jest zdominowana przez A3. Racjonalny gracz nie wybierze strategii prowadzącej do gorszych wypłat.

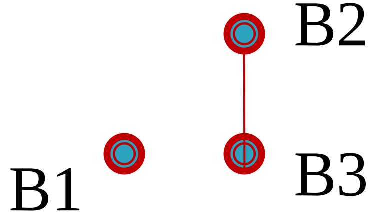
PRZYKŁAD

Pozostaje następująca macierz:

	B1	B2	B3
A1	-50	-30	40
A3	50	10	20

Diagram Hassego dla porządku

Pareto na wektorach B1, B2, B3:



Zatem B3 jest zdominowana przez B2. Racjonalny gracz nie wybierze strategii prowadzącej do gorszych wypłat.

PRZYKŁAD

Pozostaje następująca macierz:

	B1	B2
A1	-50	-30
A3	50	10

Teraz znów dokonujemy porównania strategii:

A3 jest „lepsza" niż A1. Czyli jest to wariant niezdominowany

	B1	B2
A3	50	10

Gracz A wybiera A3. Gracz B aby zminimalizować swoje straty wybiera B2.

PRZYKŁAD

Bez redukcji wariantów możemy zastosować strategię maksyminową

	B1	B2	B3	min
A1	-50	-30	40	-50
A2	20	-10	20	-10
A3	50	10	20	10
max	50	10	40	

Wtedy max(min (A1), min (A2), min (A3))=10

min(max (B1), max (B2), max (B3))=10

Czyli maxmin=minmax, więc istnieje punkt siodłowy. Gra ma rozwiązanie (A3, B2)

PRZYKŁAD 2.

Dwa koncerny samochodowe konkurują ze sobą na rynku pewnego kraju. Koncern A rozważa uruchomienie w lokalnej fabryce jednego z czterech modeli samochodów. Koncern B natomiast jednego z pięciu modeli samochodów.

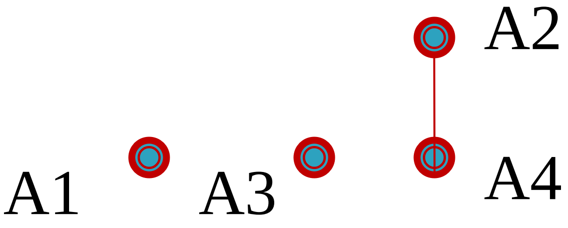
W macierzy wypłat przedstawiono zyski koncernu A (straty koncernu B) przy produkcji poszczególnych samochodów, w zależności od decyzji podjętych przez koncerny.

Należy podjąć decyzję o rodzaju produkcji, będąc dyrektorem koncernu A.

PRZYKŁAD 2

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	200	70	10	30	120
A2	70	80	100	80	110
A3	80	150	0	80	30
A4	70	7	90	20	60

A4 jest dominowana przez A2



PRZYKŁAD 2

Po wykreśleniu A4 otrzymujemy macierz:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	200	70	10	30	120
A2	70	80	100	80	110
A3	80	150	0	80	30

Należy porównać strategie gracza B.

PRZYKŁAD 2

Należy porównać strategie gracza B parami, przy czym większa wartość jest „gorsza”

B1	B2
200	70
70	80
80	150

B1	B3
200	10
70	100
80	0

B1	B4
200	30
70	80
80	80

B1	B5
200	120
70	110
80	30

B2	B5
70	120
80	110
150	30

B2	B3
70	10
80	100
150	0

B2	B4
70	30
80	80
150	80

B3	B4
10	30
100	80
0	80

B3	B5
10	120
100	110
0	30

B4	B5
30	120
80	110
80	30

PRZYKŁAD 2

B5 jest dominowana przez B3, a B2 jest dominowana przez B4

	B1	B3	B4
A1	200	10	30
A2	70	100	80
A3	80	0	80

Wracamy do A:

A1	200	10	30
A2	70	100	80

A1	200	10	30
A3	80	0	80

A2	70	100	80
A3	80	0	80

Nie ma już wariantów dominowanych.
Szukamy punktu siodłowego.

PRZYKŁAD 2

	B1	B3	B4	min
A1	200	10	30	10
A2	70	100	80	70
A3	80	0	80	0
max	200	100	80	

maxmin=70 $\neq$ minmax=80

Nie ma punktu siodłowego. Należy poszukać rozwiązania w postaci strategii mieszanej.

Wartość gry zawsze mieści się w przedziale:
(maxmin ,minmax) tutaj $v \in (70,80)$

Strategii mieszanej szukamy rozwiązując odpowiednie zadanie programowania liniowego.

PRZYKŁAD 2
Strategia mieszana

	B1	B3	B4
A1	200	10	30
A2	70	100	80
A3	80	0	80

Załóżmy, że gracz A będzie stosował:
A1 z częstością (prawdopodobieństwem) p_1
A2 z częstością (prawdopodobieństwem) p_2
A3 z częstością (prawdopodobieństwem) p_3
Niech v oznacza wartość gry, czyli korzyści uzyskane przez gracza A.

Wygrana A w przypadku, gdy B będzie stosował:
B1 : $200p_1 + 70p_2 + 80p_3 = v$
B3: $10p_1 + 100p_2 = v$
B4: $30p_1 + 80p_2 + 80p_3 = v$
Ponadto suma częstości (prawdopodobieństwa) stosowania wszystkich strategii musi być równa 1: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

PRZYKŁAD 2 Strategia mieszana

Strategia optymalna, przy dowolnym postępowaniu gracza B powinna zapewnić graczowi A wygraną nie mniejszą niż wartość gry v. Czyli ograniczenia przyjmują postać:

$$
\begin{aligned}
200p_1 + 70p_2 + 80p_3 &\geq v \\
10p_1 + 100p_2 &\geq v \\
30p_1 + 80p_2 + 80p_3 &\geq v \\
p_1 + p_2 + p_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Gracz A dąży do maksymalizacji swojej wygranej.
Stąd funkcja celu:
$v \rightarrow MAX$
v jest wartością nieznaną więc *r*ozwiązanie zadania programowania liniowego jest niemożliwe.

PRZYKŁAD 2 Strategia mieszana

Aby się uniezależnić od wartości v:

- układ ograniczeń dzielimy obustronnie przez v
- podstawiamy: $x_i = p_i/v$

Otrzymujemy wtedy ograniczenia:

$$200x_1 + 70x_2 + 80x_3 \geq 1$$
$$10x_1 + 100x_2 \geq 1$$
$$30x_1 + 80x_2 + 80x_3 \geq 1$$

Ponadto, mamy

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1/v$$

Stąd funkcja celu:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1/v \rightarrow MIN$$

Strategia mieszana. MODEL MATEMATYCZNY

Funkcja celu:

$x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow MIN$

Ograniczenia:

$$200x_1 + 70x_2 + 80x_3 \geq 1$$
$$10x_1 + 100x_2 \geq 1$$
$$30x_1 + 80x_2 + 80x_3 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Wtedy wartość gry będzie równa $v = 1/(x_1 + x_2 + x_3)$

PRZYKŁAD 2
Strategia mieszana dla gracza B

	B1	B3	B4
A1	200	10	30
A2	70	100	80
A3	80	0	80

Załóżmy, że gracz B będzie stosował:

B1 z częstością (prawdopodobieństwem) q_1

B3 z częstością (prawdopodobieństwem) q_2

B4 z częstością (prawdopodobieństwem) q_3

Przegrana B w przypadku, gdy A będzie stosował:

A1 : $200q_1 + 10q_2 + 30q_3 = v$

A2: $70q_1 + 100q_2 + 80q_3 = v$

A3: $80p_1 + \quad 80q_3 = v$

Ponadto $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

Strategia optymalna, przy dowolnym postępowaniu Gracza A powinna zapewnić Graczowi B przegraną nie większą niż wartość gry v.

PRZYKŁAD 2 Strategia mieszana

Czyli ograniczenia przyjmują postać:

$200q_1 + 10q_2 + 30q_3 \leq v$

$70q_1 + 100q_2 + 80q_3 \leq v$

$80p_1 + \qquad 80q_3 \leq v$

$q_1 + q_2 + q_3 = 1$

Gracz B dąży do minimalizacji swojej przegranej.

Stąd funkcja celu:

$v \rightarrow MIN$

PRZYKŁAD 2 Strategia mieszana

Aby się uniezależnić od wartości v:

- układ ograniczeń dzielimy obustronnie przez v
- podstawiamy: $y_i = q_i/v$

Otrzymujemy wtedy ograniczenia:

$$200y_1 + 10y_2 + 30y_3 \leq 1$$
$$70y_1 + 100y_2 + 80y_3 \leq 1$$
$$80p_1 + \qquad 80y_3 \leq 1$$

Stąd funkcja celu:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1/v \rightarrow MAX$$

Strategia mieszana. MODEL MATEMATYCZNY

Funkcja celu:

$y_1 + y_2 + y_3 = 1/v \rightarrow \text{MAX}$

Ograniczenia:

$200y_1 + 10y_2 + 30y_3 \leq 1$

$70y_1 + 100y_2 + 80y_3 \leq 1$

$80p_1 + \qquad 80y_3 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Wtedy wartość gry będzie równa $v = 1/(y_1 + y_2 + y_3)$

Strategia mieszana. Rozwiązanie dla gracza A

Rozwiązanie

x_1=0,00058

x_2=0,0099

x_3=0,0023

1/v =0,0129 czyli v=77,73

Stąd :

p_1=0,045

p_2=0,773

p_3=0,182

Gracz A powinien stosować A1 z częstością 0,045, A2 z częstością 0,773 , A3 z częstością 0,182. Spodziewana wygrana to 77,73.

Strategia mieszana. Rozwiązanie dla gracza B

Rozwiązanie

y_1= 0,0037

y_2= 0,0004

y_3= 0,0088

1/v =0,0129 czyli v=77,73

Stąd :

q_1= 0,284

q_2= 0,0285

q_3= 0,6875

Gracz B powinien stosować B1 z częstością 0,284, B3 z częstością 0,0285 , B4 z częstością 0,6875. Spodziewana przegrana to 77,73.

ALGORYTM BROWNA

- algorytm Browna jest algorytmem iteracyjnym
- ma zastosowanie w grach o dużych wymiarach
- jest prosty i łatwy w oprogramowaniu
- dla dużej liczby iteracji zapewnia zbieżność rozwiązań
- metoda wrażliwa na liczbę iteracji – aby uzyskać dokładne wyniki należy wykonać dużą liczbę iteracji $\gg 100$.

ALGORYTM BROWNA

Krok 1. Gracz A wybiera arbitralnie strategię

Krok 2. Gracz B sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez A i wybiera najlepszą strategię ze swojego punktu widzenia

Krok 3. Gracz A sumuje elementy strategii dotychczas stosowanych przez B i wybiera najlepszą strategię ze swojego punktu widzenia

Krok 4. Taki jak Krok 2.

Krok 5. Sprawdź, czy wykonano zamierzoną liczbę iteracji, jeśli tak to STOP. Jeśli nie, to Krok 3.

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3
A1	200	10	30	10
A2	70	100	80	100
A3	80	0	80	0
A1	200	10	30	

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3	B3
A1	200	10	30	10	20
A2	70	100	80	100	200
A3	80	0	80	0	0
A1	200	10	30		
A2	270	110	110		

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3	B3	B4
A1	200	10	30	10	20	50
A2	70	100	80	100	200	280
A3	80	0	80	0	0	80
A1	200	10	30			
A2	270	110	110			
A2	340	210	190			

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3	B3	B4	B4
A1	200	10	30	10	20	50	80
A2	70	100	80	100	200	280	360
A3	80	0	80	0	0	80	160
A1	200	10	30				
A2	270	110	110				
A2	340	210	190				
A2	410	310	270				

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3	B3	B4	B4	B4
A1	200	10	30	10	20	50	80	110
A2	70	100	80	100	200	280	360	440
A3	80	0	80	0	0	80	160	240
A1	200	10	30					
A2	270	110	110					
A2	340	210	190					
A2	410	310	270					
A2	480	410	350					

PRZYKŁAD 2
Algorytm Browna

	B1	B3	B4	B3	B3	B4	B4	B4	B4
A1	200	10	30	10	20	50	80	110	140
A2	70	100	80	100	200	280	360	440	520
A3	80	0	80	0	0	80	160	240	320
A1	200	10	30						
A2	270	110	110						
A2	340	210	190						

	B1	B3	B4	B3	B3	B4	B4	B4	B4	B4	B4	B4
A1	200	10	30	10	20	50	80	110	140	170	200	230
A2	70	100	80	100	200	280	360	440	520	600	680	760
A3	80	0	80	0	0	80	160	240	320	400	480	560
A1	200	10	30									
A2	270	110	110									
A2	340	210	190									
A2	410	310	270									
A2	480	410	350									
A2	550	510	430									
A2	620	610	510									
A2	690	710	590									
A2	760	810	670									

Do tej pory wykonaliśmy 9 iteracji i mamy częstość
$p_1=1/9$, $p_2=8/9$, $p_3=0$
$q_1=0$, $q_2=2/9$, $q_3=7/9$. Należy kontynuować algorytm do co najmniej 100 iteracji.

GRY DWUOSOBOWE O SUMIE DOWOLNEJ

Strategia dominująca to najlepsza możliwa reakcja na dowolną strategię zastosowaną przez konkurenta. Jej logika nieuchronnie prowadzi do pogorszenia wyniku, gdy gra ma charakter *niekooperacyjny.*

Historycznym przykładem gry niekooperacyjnej jest *dylemat więźnia.*

Działania A	Działania B			
	Nie przyznawać się		wsypać kompana	
Nie przyznawać się	1 rok	1 rok	10 lat	0 lat
Wsypać kompana	0 lat	10 lat	5 lat	5 lat

Partnerzy skazani są na nieoptymalny wynik. Ze względu na brak bodźców, żaden nie zamierza jednostronnie zmienić swojego zachowania, chyba że w drodze podjęcia skoordynowanej współpracy, opartej na zaufaniu

DYLEMAT WIĘŹNIA

W tej grze „wsyp kompana" jest strategią dominującą: niezależnie od tego co robi przeciwnik, zawsze bardziej opłaca się oszukać kolegę niż milczeć. Jeśli współwięzień milczy, oszukiwanie skróci wyrok z sześciu miesięcy do zera. Jeśli współwięzień zeznaje, oszukiwanie skróci wyrok z dziesięciu lat do pięciu.

Każdy gracz racjonalny będzie zatem oszukiwał i jedyną równowagą Nasha jest sytuacja, gdy obaj gracze oszukują siebie. W efekcie obaj zyskają mniej, niż gdyby obaj współpracowali.

DYLEMAT WIĘŹNIA –PRZYKŁAD

F			F I R M A 2			
I			oszustwo		uczciwość	
R	1	oszustwo	2	2	3,5	1,5
M		uczciwość	1,5	3,5	3	3
A						

Gdyby dwa przedsiębiorstwa stworzyły kartel, dający zyski na poziomie 6 mln PLN i dzielone po połowie, to zyskaliby po 3mln. Rywale zdają sobie sprawę, że jeśli zwiększą sprzedaż, a konkurent pozostanie wierny umowie, to ich zyski wzrosną do 3,5 mln PLN, lecz uczciwym spadną do 1,5 mln PLN. Jeśli obaj będą oszukiwać, to zrealizują zyski na poziomie 2 mln PLN.

RÓWNOWAGA NASHA

Gra o udział w rynku między Toyotą i Hondą

		Toyota: Budować nową wytwórnię		Toyota: Nie budować	
Honda	Budować nową wytwórnię	16	16	20	15
Honda	Nie budować	15	20	18	18

Jeśli gracze oczekują racjonalnego zachowania się przeciwnika, to obaj „optymalizując” wybór, osiągają równowagę Nasha.

RÓWNOWAGA NASHA

Przykładem gier z **więcej niż jedną równowagą Nasha jest gra w tchórza, w której** dwóch nastolatków najeżdża na siebie samochodami po jednopasmowej drodze. Pierwszy, który zjedzie z drogi zostaje tchórzem, drugi – bohaterem. Jeżeli obaj zjadą z drogi, to obaj zostają tchórzami. Jeżeli żaden nie

I		JANEK			
R		zjechać		nie zjechać	
E	Zjechać	1	1	1	2
K	nie zjechać	2	1	0	0

Nie występują strategie dominujące, lecz dwie równowagi Nasha.

GRY Z NATURĄ

- Gry z naturą – gry z przeciwnikiem nierozumnym
- Przeciwnik nierozumny nie jest zainteresowany wynikiem gry
- W grach z naturą mogą wystąpić następujące przypadki:
  - Stany natury są jednakowo prawdopodobne
  - Stany natury nie są jednakowo prawdopodobne
- Wyboru wyniku gry można dokonać na podstawie reguł decyzyjnych:
  - kryterium Walda (reguła maxmin) – wybór pesymisty
  - kryterium Hurwicza
  - kryterium Bayesa – przeciętna wygrana
  - kryterium Savage'a – minimalizacja strat

KRYTERIUM WALDA

- Jest to kryterium pesymistyczne
- Kryterium wybiera maksymalną wygraną przy założeniu, że natura zachowa się jak najbardziej niekorzystnie

Postępowanie jest następujące:

- Wybieramy minimalną wartość w każdym z wierszy – zakładamy, że zajdą warunki najbardziej niekorzystne dla gracza
- Z uzyskanych wyników wybieramy wartość najwyższą a uzyskana wartość to minimalna wygrana jaką może uzyskać gracz

KRYTERIUM HURWICZA

- Wybiera się arbitralnie tzw. *współczynnik ostrożności*

  $0 \leq \gamma \leq 1$

Ewentualnie, *współczynnik optymizmu* $0 \leq \alpha \leq 1$, przy czym $\gamma = 1 - \alpha$

- Dla każdej strategii A_i $(i = 1, \ldots, n)$ gracza wyliczamy wartość $v_i = \gamma \cdot \min K_{ij} + (1 - \gamma) \cdot \max K_{ij}$, gdzie K_{ij} – wartości funkcji korzyści
- Ostatecznie wybieramy strategię spełniającą warunek

  $\max v_i$
- W przypadku, gdy $\gamma = 1$, kryterium Hurwicza staje się kryterium Walda

KRYTERIUM Bayesa

- Zakłada się, że stany natury są jednakowo prawdopodobne
- Według kryterium Bayesa najlepsza jest ta strategia, która daje największą przeciętną wygraną
- Dla każdej strategii należy policzyć średnią wygraną v_i jako średnią arytmetyczną
- Następnie wybiera się tę strategię, która ma największą wartość średniej arytmetycznej

KRYTERIUM SAVAGE'A

- Kryterium Savage'a spełnia postulat minimalizacji oczekiwanych strat wynikłych z podjęcia decyzji gorszej niż najlepsza możliwa dla danego stanu natury (z punktu widzenia gracza)
- Należy wybrać tę strategię, dla której strata relatywna jest najmniejsza

Postępowanie

- Wyznaczenie macierzy strat relatywnych. Strata jest różnicą między największą wygraną możliwą dla danego stanu natury, a wygraną odpowiadającą decyzji gracza
- znajdujemy dla każdej strategii maksymalną stratę i wybieramy jako wynik gry odpowiadającą jej strategie

PRZYKŁAD

Kierowca karetki pogotowia ma do wyboru trzy trasy dojazdu na miejsce wypadku. Mogą być różne utrudnienia opóźniające pojazd – 4 stany natury. Czas dojazdu umieszczono w tabeli:

	A	B	C	D
1	21	15	32	16
2	28	20	10	10
3	13	27	25	15

Stosując poznane kryteria wspomóc podjęcie decyzji, którą trasą przejechać.

PRZYKŁAD

Zauważamy, że poznane kryteria maksymalizują korzyści. Nam natomiast zależy na minimalizacji czasu. Dlatego zmienimy podane czasy na wartości przeciwne.

	A	B	C	D
1	-21	-15	-32	-16
2	-28	-20	-10	-10
3	-13	-27	-25	-15

.

PRZYKŁAD

Kryterium Walda wskazuje trasę 3.

	A	B	C	D	min
1	−21	−15	−32	−16	-32
2	−28	−20	−10	−10	-28
3	−13	−27	−25	−15	-27

Kryterium Hurwicza dla $\gamma = 0{,}8$ wskazuje trasę 3.

	A	B	C	D	v_i
1	−21	−15	−32	−16	-28,6
2	−28	−20	−10	−10	-24,4
3	−13	−27	−25	−15	-24,2

PRZYKŁAD

Kryterium Hurwicza dla γ = 0,6 wskazuje trasę 2.

	A	B	C	D	v_i
1	−21	−15	−32	−16	-25,2
2	−28	−20	−10	−10	-20,8
3	−13	−27	−25	−15	-21,4

Kryterium Hurwicza dla γ = 0 wskazuje trasę 2.

	A	B	C	D	v_i
1	−21	−15	−32	−16	-15
2	−28	−20	−10	−10	-10
3	−13	−27	−25	−15	-13

.

PRZYKŁAD

Kryterium Bayesa wskazuje trasę 2.

	A	B	C	D	średnia
1	−21	−15	−32	−16	-21
2	−28	−20	−10	−10	-17
3	−13	−27	−25	−15	-20

.

PRZYKŁAD

Kryterium Savage'a wskazuje trasę 2 lub 3.

	A	B	C	D
1	−21	−15	−32	−16
2	−28	−20	−10	−10
3	−13	−27	−25	−15
max	−13	−15	−10	−10

Macierz strat:

	A	B	C	D	max
1	8	0	22	6	22
2	15	5	0	0	15
3	0	12	15	5	15

Kryterium Bayesa – Laplace'a

Czasami znane są prawdopodobieństwa $p_1,\ldots,p_m$ wystąpienia danych stanów natury uzyskane np. na podstawie statystycznych danych historycznych.

Wtedy można zmodyfikować kryterium Bayesa i zamiast wartości średniej zastosować wartość oczekiwaną, czyli

$$v_i = K_{i1} p_1 + \ldots + K_{im} p_m, \qquad p_1 + \ldots + p_m = 1$$

a następnie wybrać maksymalną z nich.

PRZYKŁAD

Kierowca karetki pogotowia ma do wyboru trzy trasy dojazdu na miejsce wypadku. Mogą być różne utrudnienia opóźniające pojazd – 4 stany natury z prawdopodobieństwami ich wystąpienia.

	A	B	C	D	vi
pi	0,2	0,3	0,4	0,1	
1	−21	−15	−32	−16	-11
2	−28	−20	−10	−10	- 4,5
3	−13	−27	−25	−15	-10,1

Kryterium Bayesa– Laplace’a wskazuje trasę 2.