

0.1 Funkcja potęgowa

Definicja 1. Funkcją potęgową nazywamy każdą funkcję f postaci

$$f(x) = x^\alpha,$$

gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Dziedzina funkcji potęgowej zależy od parametru α . I tak np.:

- jeżeli $\alpha \in \mathbb{N}_+$, to $D_f = \mathbb{R}$,
- jeżeli $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq 0$, to $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- jeżeli $\alpha = \frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną parzystą, to $D_f = [0, +\infty)$,
- jeżeli $\alpha = -\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną parzystą, to $D_f = (0, +\infty)$.

Uwaga 1. Dziedziny wszystkich funkcji potęgowych zawierają w sobie przedział $(0, +\infty)$.

Przykład 1. Narysuj wykres funkcji

1. $f(x) = x^2$;
2. $f(x) = x^3$;
3. $f(x) = \frac{1}{x}$;
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$;
5. $f(x) = \sqrt{x}$;
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

0.2 Funkcja wykładnicza

Definicja 2. Funkcją wykładniczą nazywamy każdą funkcję f postaci

$$f(x) = a^x,$$

gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą taką, że $a > 0$ i $a \neq 1$.

Naszukujemy wykresy funkcji wykładniczej w dwóch przypadkach $0 < a < 1$ oraz $a > 1$. Z wykresów możemy już odczytać podstawowe własności funkcji wykładniczej:

1. $D_f = \mathbb{R}$;
2. $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$;
3. funkcja wykładnicza nie posiada miejsc zerowych;

4. $f(0) = a^0 = 1$, a zatem wykres każdej funkcji wykładniczej przechodzi przez punkt $(0, 1)$;
5. dla $0 < a < 1$ funkcja wykładnicza o podstawie a jest malejąca, zaś dla $a > 1$ jest rosnąca;
6. funkcja wykładnicza jest różnowartościowa;
7. funkcja wykładnicza nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, nie jest okresowa.

Uwaga 2. Ważną, ze względu na rozliczne zastosowania, jest funkcja wykładnicza, której podstawą jest liczba e . Wartość przybliżona liczby e wynosi

$$e \sim 2,718281828459045.$$

Funkcję taką nazywamy **funkcją eksponencjalną**.

Przykład 2. Rozwiąż równanie:

$$1. \ 27^{3x-4} = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{6-5x};$$

$$2. \ 8^{x^2-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2-2x+6}.$$

Przykład 3. Rozwiąż nierówność:

$$1. \ \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6}{x}} \leq 4^{\frac{1}{3}};$$

$$2. \ 5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}).$$

0.3 Logarytm

Logarytm

Definicja 3. Logarytmem dodatniej liczby x przy dodatniej i różnej od jedności podstawie a nazywamy wykładnik y potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę x .

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \text{ gdzie } x > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Przy stosownych założeniach

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$, gdzie $r \in \mathbb{R}$;
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Przykład 4. 1. Liczba $\log 5 + \log 8 - 2 \log 2$ jest równa

A. 10 B. 2 C. 1 D. 0

Odp. C

2. Wiemy, że $\log_2 a = \sqrt{2}$ i $\log_2 b = -\sqrt{2}$. Liczbą niewymierną jest liczba

A. $\log_2(ab)$ B. $\log_2(\sqrt{2}ab)$ C. $\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ D. $\log_2 \frac{a}{b}$.

Odp. D

Przykład 5. 1. Dane są liczby $x = \log_3 9, y = \log_{16} \frac{1}{4}, z = \log_{\frac{1}{5}} 25, t = \log_4 2$. Najmniejszą z tych liczb jest

A. x B. y C. z D. t

Odp. C

2. Oblicz $\log_3(2 + \log_4 0,25)$.

Odp. 0

3. Oblicz x korzystając z własności logarytmów

$$\log_6 x = 2 \log_2 \sqrt{3} - \log_2 12$$

Odp. $x = \frac{1}{36}$.

0.4 Funkcja logarytmiczna

Definicja 4. Funkcją logarytmiczną nazywamy każdą funkcję f postaci

$$f(x) = \log_a x,$$

gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą taką, że $a > 0$ i $a \neq 1$.

Uwaga 3. Funkcja logarytmiczna o podstawie a jest funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej o podstawie a . Zatem możemy, opierając się na wykresie funkcji wykładniczej, naszkicować wykresy funkcji logarytmicznych.

Podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej, z wykresów możemy odczytać podstawowe własności funkcji logarytmicznej:

1. $D_f = (0, +\infty)$;
2. $f(D_f) = \mathbb{R}$;

3. jedynym miejscem zerowym funkcji logarytmicznej jest 1;
4. dla $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna o podstawie a jest malejąca, zaś dla $a > 1$ jest rosnąca;
5. funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa;
6. funkcja logarytmiczna nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, nie jest okresowa.

Przykład 6. *Rozwiąż równanie*

1. $\log_{\frac{1}{5}} \{5 \log_2 [1 + \log_9 (1 + 4 \log_3 x)]\} = -1;$
2. $x^{\log x} = 100x.$

Przykład 7. *Rozwiąż nierówność*

1. $\log_5 (3x - 4) < 1;$
2. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1.$

Funkcje elementarne

- wielomiany;
- funkcje wymierne;
- funkcja potęgowa;
- funkcje trygonometryczne $\sin$, $\cos$, tg , ctg ;
- funkcje cyklometryczne;
- funkcje wykładnicza i logarytmiczna;
- wszystkie funkcje jakie można otrzymać z powyższych funkcji za pomocą działań arytmetycznych i operacji składania.