

0.1 Wielomiany

Definicja 1. Niech n będzie liczbą naturalną. **Wielomianem** nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi zwanymi **współczynnikami wielomianu**. Wielomian $W(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ nazywamy **wielomianem zerowym**. Mówimy, że wielomian W jest stopnia n i piszemy $\deg(W) = n$, jeżeli $a_n \neq 0$. Przyjmujemy, że wielomian zerowy nie ma stopnia.

Szczególne przypadki wielomianów:

1. dla $n = 0$ mamy $W(x) = a_0$, czyli W jest funkcją stałą;
2. dla $n = 1$ mamy $W(x) = a_1 x + a_0$, czyli W jest funkcją liniową;
3. dla $n = 2$ mamy $W(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, czyli W jest funkcją kwadratową.

Definicja 2. Dwa wielomiany W i Q nazywamy równymi, jeżeli są tego samego stopnia oraz ich współczynniki przy odpowiednich potęgach są równe, tzn., jeżeli

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

to $m = n$ oraz $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

Przykład 1. Dla jakich wartości parametrów a, b wielomiany W i Q są równe?

1. $W(x) = 3x^5 + 4x^2 - x + 5, Q(x) = 3x^5 - ax^3 + 4x^2 - bx + 5$;
2. $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, Q(x) = ax^4 + (a - b)x^3 + x^2 + x + 1$.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że W, P są wielomianami, przy czym P nie jest wielomianem zerowym. Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany Q, R takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$W(x) = P(x)Q(x) + R(x),$$

przy czym $\deg(R) < \deg(P)$ lub R jest wielomianem zerowym.

Definicja 3. Mówimy, że wielomian W jest podzielny przez wielomian P , jeżeli istnieje wielomian Q taki, że

$$W(x) = P(x)Q(x).$$

Przykład 2. Wielomian W podzielić przez wielomian P , jeżeli

1. $W(x) = x^3 + 3x - 2, P(x) = x - 2$;
2. $W(x) = 2x^4 - x^3 + 5x, P(x) = x^2 - 1$;

$$3. W(x) = x^4 + x^2 + x + 1, P(x) = x^3 - x^2 + 2.$$

$$4. W(x) = 5x^7 - 4x^6 - x^4 + 3x^3 + 2x + 1, P(x) = x + 3.$$

Definicja 4. Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu W , jeżeli $W(a) = 0$. Innymi słowy, pierwiastkiem wielomianu jest każde miejsce zerowe tego wielomianu.

Twierdzenie 2 (Bezouta). Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Przykład 3. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12.$$

Liczba 3 jest jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$.

Twierdzenie 3. Każdy wielomian daje się przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych o ujemnym wyróżniku.

Uwaga 1. W praktyce, dokonanie rozkładu dowolnego wielomianu na takie czynniki może być bardzo trudne. Tak naprawdę, tylko w nielicznych przypadkach jesteśmy w stanie dokonać takiego rozkładu. Mamy jednak twierdzenia, które w pewnych sytuacjach ułatwiają rozłożenie wielomianu na takie czynniki.

Twierdzenie 4. Załóżmy, że wszystkie współczynniki wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

są liczbami całkowitymi. Jeżeli a jest wymiernym pierwiastkiem wielomianu W , to $a = \frac{p}{q}$, gdzie p jest dzielnikiem współczynnika a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n i ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny.

Podane wielomiany rozłóż na czynniki:

$$1. W(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x + 18,$$

$$2. W(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8,$$

$$3. W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2.$$

Definicja 5. Niech a będzie pierwiastkiem wielomianu W i $k \in \mathbb{N}$. Pierwiastek a nazywamy k -krotnym, jeżeli wielomian W dzieli się przez $(x - a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$.

Szkicowanie wykresu wielomianu

Niech $x_1, \dots, x_l$ będą uporządkowanymi pierwiastkami wielomianu W , tzn. $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ o krotnościach odpowiednio $k_1, \dots, k_l$. Wykres wielomianu szkicujemy od prawej strony do lewej. Jeżeli współczynnik przy najwyższej potęgce jest dodatni, to wykres zaczynamy szkicować od wartości dodatnich, a jeżeli jest on ujemny, to zaczynamy szkicować od wartości ujemnych. Jeżeli krotność pierwiastka x_l jest nieparzysta, to wykres przecina oś ox w punkcie $(x_l, 0)$ i przechodzimy do pierwiastku x_{l-1} . Jeżeli krotność pierwiastka x_l jest parzysta, to pozostajemy po tej samej stronie osi ox i przechodzimy do następnego pierwiastka. Dalszą analizę przy szkicowaniu wykresu prowadzimy w ten sam sposób.

Rozwiązać nierówności:

1. $W(x) = (x-2)^2(x+1), W(x) > 0;$
2. $W(x) = -\frac{1}{2}(x^2-4)(x^2+x+1), W(x) \leq 0;$
3. $W(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4, W(x) \geq 0;$
4. $W(x) = \frac{1}{3}(4x^4 - 17x^2 + 4), W(x) < 0;$
5. $W(x) = \frac{1}{4}(x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 24x), W(x) \geq 0.$

Definicja 6. Funkcję wymierną nazywamy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)},$$

gdzie W, P są pewnymi wielomianami, przy czym P nie jest wielomianem zerowym. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór tych argumentów, które nie są pierwiastkami wielomianu P , czyli $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$.

Uwaga 2. W przypadku, gdy P jest funkcją stałą, różną od zera, funkcja wymierna jest po prostu wielomianem, stąd każdy wielomian jest szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej. Zbiór miejsc zerowych funkcji wymiernej pokrywa się ze zbiorem tych pierwiastków wielomianu W , które nie są pierwiastkami wielomianu P .

Przykład 4. Wyznacz dziedzinę funkcji wymiernej

1. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4};$
2. $f(x) = \frac{(x-4)(x^3+2x^2-7x+8)}{(x-2)(x+5)}.$

Przykład 5. Rozwiąż równania wymierne:

1. $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2};$
2. $2 + \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{2}{x}.$

Przykład 6. Rozwiąż nierówności wymierne:

$$1. \frac{3x+2}{x-1} > 0;$$

$$2. \frac{(x+4)(x-2)(x-3)}{x^2+3x+2} \leq 0.$$

Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest tzw. funkcja homograficzna, albo po prostu homografia, która jest ilorazem wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego, dokładnie

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

przy czym zakłada się, że $ad - bc \neq 0$ oraz $c \neq 0$. Dziedziną funkcji homograficznej jest $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{d}{c}\}$.