

0.1 Funkcja liniowa

Definicja 1. Funkcją liniową nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$f(x) = ax + b,$$

gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi zwanymi odpowiednio **współczynnikiem kierunkowym** i **wyrazem wolnym**.

Twierdzenie 1. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta przechodząca przez punkt $(0, b)$ leżący na osi Oy i nachylona do osi Ox pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Uwaga 1. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe tylko w przypadku, gdy na obu ośiach układu współrzędnych przyjęto te same jednostki.

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest:

1. rosnąca dla $a > 0$;
2. malejąca dla $a < 0$;
3. stała dla $a = 0$.

Łatwo sprawdzić, że funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma, w przypadku, gdy $a \neq 0$, dokładnie jedno miejsce zerowe $x = -\frac{b}{a}$.

Przykład 1. 1. Narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x - 5$.

2. Znaleźć wzór funkcji liniowej f , której wykres przechodzi przez punkty $(0, 2)$ i $(2, 1)$. Czy funkcja f jest rosnąca, malejąca, czy stała?
3. Dana jest prosta o równaniu $y = -3x + 4$. Czy punkt $(1, 2)$ należy do tej prostej?
4. Czy punkty $(-1, -4)$, $(0, -2)$, $(3, 4)$ są współliniowe, tzn. czy leżą na tej samej prostej?

0.2 Funkcja kwadratowa

Definicja 2. Funkcją kwadratową lub inaczej trójmianem kwadratowym nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (współczynnikami), przy czym $a \neq 0$.

Wzór opisujący trójmian kwadratowy daje się przekształcić przy zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia do tzw. postaci kanonicznej, która umożliwi nam rysowanie wykresu dowolnej funkcji kwadratowej

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
&= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},
\end{aligned}$$

gdzie symbolem Δ oznaczamy liczbę $b^2 - 4ac$ nazywaną zwykle wyróżnikiem trójmianu kwadratowego. Mając w pamięci ostatnią równość, otrzymujemy przedstawienie funkcji f w dwóch postaciach:

1. $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$
2. $f(x) = a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right),$ o ile $\Delta \geq 0.$

Postać funkcji f z punktu drugiego nazywamy postacią iloczynową tej funkcji (o ile $\Delta \geq 0$). Z analizy postaci iloczynowej i kanonicznej wynika, że funkcja kwadratowa może mieć co najwyżej dwa miejsca zerowe, które nazywa się zwykle pierwiastkami:

- $\Delta > 0$: wówczas funkcja kwadratowa ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$\text{mamy } f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- $\Delta = 0$: wówczas funkcja f ma dokładnie jeden pierwiastek

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

$$\text{mamy } f(x) = a(x - x_0)^2.$$

- niech $\Delta < 0$. Wówczas funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków. Wynika to z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej: wyrażenie $(x + \frac{b}{2a})^2$ jest nieujemne, zaś składnik $-\frac{\Delta}{4a^2}$ jest dodatni, a zatem w zależności od tego, czy współczynnik a jest dodatni, czy ujemny, funkcja kwadratowa przyjmuje odpowiednio albo tylko wartości ujemne, albo tylko wartości dodatnie.

Pierwiastki funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ spełniają równanie $f(x) = 0$, czyli $ax^2 + bx + c = 0$. Ostatnie równanie nazywamy równaniem kwadratowym.

Przykład 2. Rozwiąż następujące równanie kwadratowe

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$;

2. $x^2 - 3 = 0$;

3. $x^2 = 16$.

Przykład 3. Sprawdź dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2x + m + 4 = 0$

1. ma 2 rozwiązania;

2. ma 1 rozwiązanie;

3. nie ma rozwiązań.

Wzory Viete'a

Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$. Wtedy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Przykład 4. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$2mx^2 + (m - 1)x + 2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, których suma wynosi 1?

Wykres funkcji kwadratowej

Rozważmy sytuację ogólną

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Wtedy

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$p := -\frac{b}{2a}, q := -\frac{\Delta}{4a}.$$

Wtedy postać kanoniczna przyjmuje postać

$$f(x) = a(x - p)^2 + q.$$

Wykres funkcji f powstaje z wykresu funkcji danej wzorem $y = ax^2$ przez przesunięcie równoległe o wektor $[p, q]$, czyli przez przesunięcie o p w poziomie

i o q w pionie. Otrzymana parabola ma wierzchołek w punkcie (p, q) . Często współrzędne wierzchołka oznacza się przez (x_w, y_w) . Mamy zatem

$$\begin{cases} x_w = -\frac{b}{2a} \\ y_w = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}.$$

Dla $a > 0$ funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca w przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ oraz dla argumentu $-\frac{b}{2a}$ przyjmuje swoją wartość najmniejszą, która wynosi $-\frac{\Delta}{4a}$. Dla $a < 0$ funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca w przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ oraz dla argumentu $-\frac{b}{2a}$ przyjmuje swoją wartość największą, która wynosi $-\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 5. *Narysuj wykres funkcji:*

1. $f(x) = 2x^2 - 4$;
2. $f(x) = x^2 + 4x - 4$;
3. $f(x) = 3x^2 + x - 1$.