

0.1 Funkcje

Treści omawiane na wykładzie:

1. Przypomnienie podstawowych pojęć związanych z funkcjami: dziedzina, zbiór wartości, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość, wykres funkcji. Od funkcji starych do nowych, czyli składanie funkcji.
2. Funkcja liniowa i kwadratowa.
3. Wielomiany.
4. Funkcje wymierne, dziedzina.
5. Funkcja potęgowa (wykładnik wymierny).
6. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

Definicja 1. Niech X i Y będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Jeżeli każdemu elementowi $x \in X$ został przyporządkowany **dokładnie jeden** element $y \in Y$, to mówimy, że określona została **funkcja** f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y . Symbolicznie piszemy

$$f : X \rightarrow Y.$$

Innymi słowy, funkcja f to **reguła**, która każdemu elementowi x w zbiorze X przypisuje dokładnie jeden element, zwany $f(x)$, w zbiorze Y .

Uwaga 1. Element y przyporządkowany elementowi x nazywamy **wartością** funkcji f na elemencie x i oznaczamy symbolem $f(x)$. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji. **Zbiór wartości** f to zbiór wszystkich możliwych wartości $f(x)$, kiedy x przebiega całą dziedzinę.

Uwaga 2. Zamiast słowa funkcja używać będziemy zamiennie także słów odwzorowanie, przekształcenie, przy czym zawsze mamy w pamięci powyższą definicję. Możemy wyobrażać sobie funkcję jako urządzenie, pewną maszynę. Jeżeli x należy do dziedziny funkcji f , to x wchodzi do maszyny - staje się daną wejściową, a maszyna produkuje daną wyjściową, czyli $f(x)$ zgodnie z regułą odpowiadającą tej funkcji. Możemy zatem myśleć o dziedzinie jak o zbiorze wszystkich możliwych danych wejściowych, a o zbiorze wartości jak o zbiorze wszystkich danych wyjściowych.

Uwaga 3. Jeżeli zbiory X i Y nie są z góry zadane, to przyjmujemy wówczas, że dziedziną funkcji f jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których wyrażenie $f(x)$ ma sens liczbowy. Taki zbiór nazywamy **dziedziną naturalną** funkcji. Jako zbiór Y przyjmujemy wtedy zbiór liczb rzeczywistych.

Przedstawianie funkcji:

- werbalnie (opis słowami);
- numerycznie (w postaci tabeli wartości);
- wizualnie (wykres);

- algebraicznie (zapisanie, podanie wzoru).

Przykład 1. Poniżej podajemy przykłady funkcji określonych algebraicznie za pomocą łatwych "w obsłudze" recept:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 4;$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{1+x^2};$
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^7 + 3x + 1;$

Przykład 2. Dla funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ oblicz (jeżeli jest to możliwe):

1. $f(5)$ i $g(5);$
2. $f(-10)$ i $g(-10);$
3. $g(t);$
4. $f(t+1)$ i $f(x+1);$
5. $f(x^3);$
6. $g(x^2 - 2).$

Przykład 3. Wyznacz dziedzinę funkcji:

1. $p(x) = \frac{x+4}{x^2+x-6};$
2. $g(x) = \sqrt{6-12x};$
3. $h(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{x^2-4}.$

Przykład 4. Jeżeli $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, a $h \neq 0$, oblicz

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Wyrażenie podane w przykładzie nazywamy **ilorazem różnicowym** - pojawi się ono w rachunku różniczkowym.

Definicja 2. Jeżeli X i Y są pewnymi zbiorami liczb rzeczywistych, to funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **funkcją liczbową**. Jej **wykres** jest zbiorem uporządkowanych par

$$W_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Innymi słowy, wykres funkcji f składa się ze wszystkich punktów (x, y) w układzie współrzędnych, takich, że $y = f(x)$, a x należy do dziedziny funkcji f .

Uwaga 4. Wykres funkcji daje nam często bardzo użyteczny obraz zachowania funkcji. Ponieważ współrzędna dowolnego punktu (x, y) na wykresie spełnia równanie $y = f(x)$, to możemy odczytać wartość $f(x)$ z wykresu. Wykres umożliwia nam też przedstawienie dziedziny na osi x -ów i jej zbioru wartości na osi y .

Pytanie: Czy każda krzywa na płaszczyźnie jest wykresem jakiejś funkcji?

TEST PROSTEJ PIONOWEJ Krzywa na płaszczyźnie xy jest wykresem funkcji zmiennej x wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta pionowa przecina tę krzywą co najwyżej raz.

Definicja 3. Niech $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. **Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję**

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Przykład 5. Niech

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2.$$

Wtedy np. dla $x = 2$ mamy

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2 \cdot 2 + 1) = 5^2 = 25,$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2^2) = f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Ogólnie dla $x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

podczas, gdy

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1.$$

Definicja 4. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy

1. **rosnącą** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ stąd, że $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$;
2. **malejącą** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ z tego, że $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) > f(x_2)$;
3. **niemalejącą** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ z tego, że $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \leq f(x_2)$;
4. **nierosnącą** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ z tego, że $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Przykład 6. 1. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

2. Zbadaj monotoniczność funkcji $f : \{2, 3, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2) = 5$, $f(3) = 0$, $f(6) = 10$.
3. Wykaż, że funkcja $y = x^2 + 1$ jest rosnąca na przedziale $[0; +\infty)$.
4. Wykaż, że funkcja $y = \frac{x+2}{x-1}$ jest malejąca na przedziale $(-\infty; 1)$.

Definicja 5. Funkcję $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **okresową**, gdy istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego $x \in X$, zachodzą warunki $x \pm T \in X$ oraz $f(x \pm T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**. Jeżeli istnieje najmniejszy okres dodatni, to nazywamy go **okresem podstawowym**.

Definicja 6. Funkcję f nazywamy **parzystą**, gdy dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f liczba $-x$ także należy do dziedziny oraz

$$f(x) = f(-x).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

Definicja 7. Funkcję f nazywamy **nieparzystą**, gdy dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f liczba $-x$ także należy do dziedziny oraz

$$f(-x) = -f(x).$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.

Przykład 7. Wykaż, że poniższe funkcje są parzyste:

1. $f(x) = x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5} - 2$, $x \in \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + 2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 8. Pokaż, że następujące funkcje są nieparzyste:

1. $f(x) = 3x^3 - 7x$, $x \in \mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
3. $f(x) = \frac{x^7}{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.