

Całka nieoznaczona

Definicja 1 (Funkcja pierwotna). Niech I będzie przedziałem w zbiorze liczb rzeczywistych. Funkcję F nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I , jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in I.$$

Przykład 1. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x.$$

Wielomian

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2020$$

jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $(-\infty, +\infty)$, czyli na w zbiorze $\mathbb{R}$. Czy jest to jedyna funkcja pierwotna funkcji f w $\mathbb{R}$?

Przykład 2. Nie! Funkcjami pierwotnymi funkcji f są także funkcje

$$F_1(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2021,$$

$$F_3(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3,$$

$$F_4(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \pi$$

...

A teraz pomyśl, czym różnią się te funkcje?

Twierdzenie 1 (O funkcji pierwotnej). Dwie dowolne funkcje pierwotne tej samej funkcji f różnią się o stałą. Innymi słowy, jeżeli F i G są funkcjami pierwotnymi na przedziale I funkcji f , to istnieje $C \in \mathbb{R}$ takie, że

$$F(x) = G(x) + C \text{ dla każdego } x \in I.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Definicja 2. Rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f w przedziale I nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji f w przedziale I i oznaczamy ją symbolem

$$\int f(x)dx.$$

Zatem

$$\int f(x)dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x).$$

Uwaga 1. Wprost z definicji wynikają dwie następujące własności całki nieoznaczonej:

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Poniżej podajemy listę całek nieoznaczonych podstawowych funkcji elementarnych:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 0dx = C$, | 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$, |
| 2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ dla $\alpha \neq -1$, | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, | 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$, | 10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ dla $0 < a \neq 1$, | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, | 12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$. |

Twierdzenie 3 (Podstawowe własności całki nieoznaczonej). *Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to*

1. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
2. $\int (af(x)) dx = a \int f(x)dx$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Przykład 3. Oblicz całkę

1. $\int \left(x^6 + \frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{x^7} \right) dx$;
2. $\int \left(\sin x - 2^{x-3} + e^x - \frac{1}{x} \right) dx$;
3. $\int x^{13}(x^2 + x + 1)dx$;
4. $\int \frac{x^5+x^4-x^3}{x} dx$;
5. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$;
6. $\int \frac{x^2}{3x^2+3} dx$;
7. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

Przegląd podstawowych metod całkowania

- Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ gdzie } t = g(x).$$

Przykład 4. Obliczmy poniższe całki stosując metodę podstawiania

1. $\int (7x^6 + 5x^4)(x^7 + x^5)^{2020} dx;$
2. $\int \frac{x+3}{\sqrt[5]{x-1}} dx$
3. $\int (5x^4 + 4x^3 + 1) \cos(x^5 + x^4 + x) dx;$
4. $\int (3x^2 + 2x + 6) e^{x^3 + x^2 + 6x + 16} dx;$
5. $\int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)};$
6. $\int \cos(3-x)(10 - \sin(3-x))^6 dx.$

- całkowanie przez części

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 5. Poniższe całki obliczymy stosując metodę całkowania przez części

1. $\int (3x + 2) \cos x dx;$
2. $\int (x + 1) \cdot 6^x dx;$
3. $\int (x^2 + x + 1) e^{-x} dx;$
4. $\int (x^3 + x^2 + 3) \ln x dx;$
5. $\int \ln(x^2 + 1) dx;$
6. $\int x^2 \cdot 2^x dx;$
7. $\int \ln^2 x dx;$
8. $\int \frac{x \sin x}{\cos^6 x} dx.$

Podział odcinka

- $[a, b]$ - przedział;
- $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, - tzw. podział odcinka $[a, b]$ na n części, przy czym $x_0 = a, x_n = b$;
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, n$;
- $\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_k, k = 1, \dots, n\}$;
- $c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$ - wybrane punkty pośrednie.

Całka oznaczona

Definicja 3. Załóżmy, że funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną **Riemanna** z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k,$$

o ile granica ta jest właściwa i nie zależy od sposobów podziału $\mathcal{P}$ odcinka $[a, b]$, ani od wyboru punktów pośrednich. Przyjmujemy przy tym, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Twierdzenie 4 (O całkowalności funkcji ciągłej). *Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest całkowalna.*

Twierdzenie 5 (Twierdzenie Newtona-Leibniza). *Dla funkcji f ciągłej na przedziale $[a, b]$ prawdziwy jest wzór*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f (tzn. $F'(x) = f(x)$) na przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 6 (Liniowość całki oznaczonej). *Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to prawdziwe są wzory*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
2. $\int_a^b (cf(x))dx = c \int_a^b f(x)dx,$ gdzie $c \in \mathbb{R}.$

Twierdzenie 7 (Addytywność całki względem przedziałów całkowania). *Założmy, że funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, $c \in (a, b)$. Prawdziwy jest wzór*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Obliczymy całki oznaczone i geometrycznie zinterpretujemy uzyskane wyniki:

Przykład 6. 1. $\int_2^4 xdx;$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x;$$

$$3. \int_0^2 (3x^2 + 1)dx;$$

$$4. \int_0^1 x(x - 6)dx;$$

$$5. \int_4^{\frac{4}{3}} \frac{\cos(e^{6x} + 3^x)}{x^4 + x^7} dx.$$

Przykład 7. Wiedząc, że $\int_5^1 f(x)dx = 3$, $\int_5^{12} f(x)dx = -6$, $\int_5^{12} g(x)dx = 7$ oblicz całki

$$1. \int_{12}^5 7f(x)dx;$$

$$2. \int_5^{12} (2f(x) + 3g(x))dx;$$

$$3. \int_1^{12} f(x)dx.$$