

1 Układy równań liniowych o współczynnikach z ciała i ich rozwiązywanie

Definicja 1. Układem m równań liniowych o n zmiennych i współczynnikach rzeczywistych nazywamy układ postaci

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

gdzie $a_{ij}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Układ $(*)$ nazywamy **jednorodnym**, jeżeli $b_1 = \dots = b_m = 0$ i **niejednorodnym** w przeciwnym wypadku. Rozwiązaniem układu $(*)$ nazywamy taki ciąg $(s_1, \dots, s_n)$ liczb rzeczywistych, że po zastąpieniu w równaniach tego układu zmiennych $x_1, \dots, x_n$ liczbami $s_1, \dots, s_n$ otrzymujemy równości prawdziwe. Układ równań liniowych, który nie posiada rozwiązania nazywamy **sprzecznym**.

Komentarz 1. Z układem $(*)$ stowarzyszyć można macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A^U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

zwane odpowiednio **macierzą główną** i **macierzą rozszerzoną** układu $(*)$.

Komentarz 2. Mając do dyspozycji powyższe macierze, układ $(*)$ możemy zapisać w postaci

$$A \cdot X = B,$$

gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (macierz niewiadomych), $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ (macierz wyrazów wolnych).

Przykład 1. Układy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \cdot x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}, \begin{cases} x_1 + \sin x_2 = 1 \\ x_1 + \cos x_2 = 5 \end{cases}$$

nie są liniowe. Układ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

jest liniowy, przy czym

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Definicja 2 (Układ Cramera). *Układ równań $(*)$, w którym:*

1. $n = m$;
2. $\det A \neq 0$

nazywamy układem Cramera.

Twierdzenie 1. *Układ Cramera posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ i wyraża się ono wzorami*

$$s_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A oznacza macierz główną układu, zaś A_i macierz powstającą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Przykład 2. Dla układu $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,
 $\det A = -6, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\det A_1 = -6, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\det A_2 =$
 $-12, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\det A_3 = -18$. Stąd $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3$.

Definicja 3. *Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, jeżeli ich zbiory rozwiązań są takie same.*

Komentarz 3. *Następujące operacje nie zmieniają zbioru rozwiązań układu równań liniowych, prowadząc tym samym do układów równoważnych*

- zamiana miejscami dowolnych dwóch równań w układzie;
- pomnożenie (obustronne) równania przez liczbę rzeczywistą różną od 0;
- dodanie (stronami) do równania innego równania układu pomnożonego przez element ciała.

Wszystkie powyższe operacje nazywać będziemy elementarnymi.

Przykład 3. Rozważmy układ postaci

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}.$$

Odejmując stronami od drugiego i trzeciego równania pierwsze pomnożone odpowiednio przez 2 i 1 dostajemy układ równoważny wyjściowemu

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases}.$$

Ze względu na postać równań (2) i (3) widzimy, że taki układ rozwiązań mieć nie może, czyli innymi słowy jest sprzeczny. Ponieważ jest on równoważny układowi wyjściowemu, to tamten także rozwiązań nie posiada.

Przykład 4. Rozważmy teraz układ postaci

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}.$$

Stosując pewne operacje elementarne dostajemy układ równoważny układowi wyjściowemu

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Twierdzenie 2 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych (*) posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rz } A = \text{rz } A^U,$$

tzn. wtedy gdy rząd macierzy głównej układu jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej.

Przykład 5. Układ $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 4x + y - z = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny, bo $\text{rz } A = 2$, a $\text{rz } A^U = 3$.

Stwierdzenie 1 (O liczbie rozwiązań układu równań liniowych). 1. Jeżeli $\text{rz } A \neq \text{rz } A^U$, to układ (*) jest sprzeczny.

2. Jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } A^U = n$, to układ (*) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

3. Jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } A^U = r < n$, to układ (*) ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 6.

1. Układ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$
 ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru.

2. Układ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$
 ma dokładnie jedno rozwiązanie.