

1 Wyznaczniki i metody ich oblicznia. Problem odwracania macierzy

Definicja 1 (Wyznacznik macierzy). *Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ przypisuje liczbę $\det A$, a określona jest wzorem indukcyjnym:*

1. jeżeli A ma stopień 1, to

$$\det A = a_{11};$$

2. jeżeli A ma stopień $n \geq 2$, to

$$\det A = a_{11} \cdot D_{11} + a_{12} \cdot D_{12} + \dots + a_{1n} \cdot D_{1n},$$

gdzie $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, przy czym A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A poprzez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Uwaga 1. Wyznacznik macierzy A oznaczamy: $\det[a_{ij}]$, $|A|$, a w formie rozwiniętej

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład 1. 1. $|-126| = -126$;

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot |5| + (-1)^{1+2} \cdot 3|1| = 7;$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Komentarz 1. W celu obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego bezpośrednio można zastosować wzory:

$$1. \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

$$2. \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Twierdzenie 1 (Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika). *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ oraz niech liczby naturalne i oraz j będą ustalone, $1 \leq i, j \leq n$. Do obliczenia wyznacznika macierzy A można zastosować wzory:*

$$1. \det A = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots + a_{in} \cdot D_{in};$$

$$2. \det A = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot D_{nj}.$$

Uwaga 2. W praktyce możemy zatem wybrać samodzielnie względem, którego wiersza (kolumny) będziemy obliczać wyznacznik. W celu maksymalnego uproszczenia rachunków, oczywiście będziemy zawsze wybierać ten wiersz (kolumnę), w której jest najwięcej zer.

Przykład 2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Twierdzenie 2 (Własności wyznacznika). Niech $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez zamianę miejscami dwóch wierszy (kolumn) macierzy A , to

$$\det B = -\det A.$$

2. Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez dodanie pomnożonego przez liczbę wiersza (kolumny) macierzy A do innego wiersza (kolumny) macierzy A , to

$$\det B = \det A.$$

3. Jeżeli macierz B można otrzymać z macierzy A poprzez pomnożenie jej wiersza (kolumny) przez liczbę $\lambda \in \mathbb{K}$, to

$$\det B = \lambda \cdot \det A.$$

Twierdzenie 3. Jeżeli dla macierzy A spełniony jest jeden z warunków

1. cały wiersz (albo kolumna) jest zerowy;
2. dwa wiersze (albo dwie kolumny) są równe;
3. dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne,

to $\det A = 0$.

Twierdzenie 4 (Inne własności wyznacznika). Jeżeli $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, to

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (tw. Cauchy'ego);
2. $\det A^T = \det A$.

Definicja 2 (Macierz odwracalna). Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy odwracalną, jeżeli istnieje macierz $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy A^{-1} . Macierz, która nie posiada macierzy odwrotnej nazywamy nieodwracalną.

Twierdzenie 5 (Jednoznaczność istnienia macierzy odwrotnej). *Macierz odwracalna posiada dokładnie jedną macierz odwrotną.*

Dowód. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $A', A'' \in M_n(\mathbb{R})$ są macierzami odwrotnymi do A . Wtedy

$$A \cdot A' = I_n = A \cdot A'' / \cdot A'$$

$$A' \cdot (A \cdot A') = A' \cdot (A \cdot A'')$$

$$(A' \cdot A) \cdot A' = (A' \cdot A) \cdot A''$$

$$A' = A''$$

Przykład 3. 1. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = B$.

2. Macierz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie posiada macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 6. 1. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

2. Jeżeli macierz A jest odwracalna, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, przy czym A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A poprzez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Przykład 4. 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ jest nieodwracalna.

Stwierdzenie 1. Załóżmy, że macierz C jest odwracalna. Wtedy

1. jeżeli $A \cdot C = B \cdot C$, to $A = B$;

2. jeżeli $C \cdot A = C \cdot B$, to $A = B$.

Dowód. Pokażemy, że zachodzi np. (1) (dowód drugiej własności jest analogiczny).

$$A \cdot C = B \cdot C / \cdot C^{-1};$$

$$(A \cdot C) \cdot C^{-1} = (B \cdot C) \cdot C^{-1};$$

$$A \cdot (C \cdot C^{-1}) = B \cdot (C \cdot C^{-1});$$

$$A \cdot I_n = B \cdot I_n;$$

$$A = B.$$

2 Rząd macierzy i metody jego obliczenia

Definicja 3 (Minor macierzy). *Minorem stopnia $k \in \mathbb{N}_+$ macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu dowolnie wybranych k kolumn i k wierszy.*

Przykład 5. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, minory stopnia 2, to np. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$,
minor stopnia 3, to np. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Definicja 4. Rzędem macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0. Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $\text{rz } A$.

Przykład 6. $\text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 3$, bo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Stwierdzenie 2 (Własności rzędu macierzy). 1. Rząd macierzy odwracalnej jest równy jej stopniowi.

2. $\text{rz } A^T = \text{rz } A$.

Oserwacja 1. Wszystkie operacje, które nie zmieniają wartości wyznacznika, albo zmieniają tylko jego znak, zastosowane do macierzy nie zmieniają jej rzędu. Nie zmienia również rzędu macierzy skreślenie wiersza (kolumny) złożonego z samych zer lub jednego z dwóch wierszy (kolumn) równych lub proporcjonalnych.

Komentarz 2. Powyższa obserwacja upraszcza sprawę obliczania rzędu macierzy. Zamiast obliczać go od razu wprost z definicji, poszukując największego niezerowego minora, możemy po prostu przekształcać macierz bez zmiany rzędu do takiej postaci, z której w łatwy sposób możemy go już odczytać.

Przykład 7. Obliczymy rzędy następujących macierzy: $\text{rz } \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} \text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 + w_1, w_4 - 2w_1} \text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 = -6w_4, w_3 = 6w_4} \text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$
2,

Przykład 8. $\text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 5w_1, w_4 - 7w_1} \text{rz } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 = 2w_2}$

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \stackrel{w_3-2w_2}{=} \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3.$$