

# 1 Macierze, operacje na macierzach i ich własności

Od tej pory przyjmujemy zawsze, że  $m, n \in \mathbb{N}_+$ .

**Definicja 1.** Macierzą rzeczywistą  $m \times n$  nazywamy prostokątną tablicę, w której znajduje się  $mn$  liczb rzeczywistych ustawionych w  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach.

**Uwaga 1.** Zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach oznaczamy symbolem  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Macierz, w której liczba wierszy wynosi  $n$  i jest równa liczbie kolumn nazywamy macierzą kwadratową stopnia  $n$ . Zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych stopnia  $n$  oznaczamy  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Uwaga 2** (Sposoby notowania macierzy). W zależności od potrzeby stosujemy

- wielkie litery  $A, B, C, \dots$ ;
- odwołanie do wyrazów macierzy  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ;
- wypisanie jawnie całej tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

**Przykład 1** (Przykłady macierzy). •  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ;

•  $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

**Definicja 2.** Macierze  $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  nazywamy równymi, jeżeli

$$a_{ij} = b_{ij}$$

dla  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

**Uwaga 3** (Szczególne postaci macierzy): • macierz  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  nazywamy macierzą diagonalną jeżeli  $a_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$ . Przykładowo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

są macierzami diagonalnymi.

- macierz  $[a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , w której  $a_{ij} = 0$  dla  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  nazywamy macierzą zerową i oznaczamy  $O_{mn}$ .

**Uwaga 4** (Szczególne postaci macierzy cd:). • *macierz kwadratową*  $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ , w której

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy *macierzą jednostkową* i oznaczmy  $I_n$ .

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

## 1.1 Operacje na macierzach i ich własności

**Definicja 3** (Transponowanie macierzy). Niech  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Macierz  $A^T = [a_{ji}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  nazywamy *macierzą transponowaną* macierzy  $A$ .

**Przykład 2.**  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

**Definicja 4** (Dodawanie macierzy). Jeżeli  $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , to sumę macierzy  $A$  i  $B$  nazywamy *macierz wymiaru  $m \times n$  postaci*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

**Uwaga 5.** Suma macierzy różnych wymiarów nie jest zdefiniowana.

**Przykład 3.** Jeżeli  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , to

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Definicja 5** (Mnożenie macierzy przez skalar). Niech  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$ . Iloczynem macierzy  $A$  przez liczbę  $a$  nazywamy *macierz*

$$a \cdot A = [a \cdot a_{ij}].$$

**Umowa 1.**  $-A := (-1) \cdot A, A - B := A + (-B)$ .

**Przykład 4.** Dla  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$3A - B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Stwierdzenie 1.** Niech  $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}$ .

1.  $A + B = B + A$ ;
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
3.  $A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$ ;
4.  $A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$ ;
5.  $1 \cdot A = A$ ;
6.  $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$ ;
7.  $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$ ;
8.  $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$ .

**Definicja 6** (Mnożenie macierzy). Niech  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), B = [b_{ij}] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ . Iloczynem macierzy  $A$  i  $B$  nazywamy macierz

$$A \cdot B = [c_{ij}] \in M_{m \times p}(\mathbb{R}),$$

w której

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

dla  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$ .

**Przykład 5.** Dla macierzy  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  nie istnieją

iloczyn  $A \cdot B, B \cdot A$ . Dla  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  nie istnieje iloczyn  $B \cdot C$ , ale  $C \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ .

**Stwierdzenie 2** (Własności mnożenia macierzy).

1.  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ ;
2.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ;
3.  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ ;
4. dla  $a \in \mathbb{R}, a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B)$ .

**Uwaga 6.** W powyższym stwierdzeniu, w każdym z podpunktów zakładamy, że wymiary macierzy są takie, że odpowiednie mnożenia, dodawania są wykonalne.

**Stwierdzenie 3.** Dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

**Przykład 6** (Mnożenie macierzy - dalsze przykłady). Dla  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Uwaga 7.** Widzimy na powyższym przykładzie, że mnożenie macierzy nie jest przemienne. Bywa również i tak, że mnożenie "w drugą stronę" (w przypadku tablic niekwadratowych) może nawet wcale nie być wykonalne!