

Lista 2: Wyznacznik macierzy i jego własności. Macierz odwrotna.

1. Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix},$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

$$(e) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix},$$

2. Wyznacz x , jeżeli

$$(a) \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(b) \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0,$$

$$(c) \begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Sprawdź, czy zachodzi równość:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y),$$

$$(b) \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b).$$

4. Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Rozwiązać podane równanie macierzowe:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(d) X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right),$$