

Lista 5: zastosowania pochodnej funkcji

1. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $f(x) = x^3 - 6x$; | (f) $f(x) = \frac{x+4}{2x^2+x+8}$; |
| (b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$; | (g) $f(x) = 6xe^{9-2x}$; |
| (c) $f(x) = 6x^5 + 33x^4 - 30x^3$; | (h) $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 14)$; |
| (d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-6}$; | (i) $f(x) = e^{x^3-2x^2-7x}$. |
| (e) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x-15}$; | |

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4, \quad [-3; 1]$; | (d) $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 80x^3 + 1, \quad [0; 7]$; |
| (b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \quad [0; 3]$; | (e) $f(x) = x^2 \ln x, \quad [1, e]$; |
| (c) $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 11, \quad [-8; 2]$; | (f) $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}, \quad [-1; 1]$. |

3. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5$; | (c) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 84x + 2$; |
| (b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$; | (d) $f(x) = e^{4-x^2}$. |

4. Naskicuj wykres funkcji ciągłej w oparciu o podane dane:

(a)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	—	X	—	—	—	X	—
$f''(x)$	—	X	+	0	—	X	+
$f(x)$		X		0		X	

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

(b)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	X	—	0	+
$f''(x)$	—	—	—	X	+	+	+
$f(x)$		-1		X		0	

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) &= 0. \end{aligned}$$

5. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$; | (d) $f(x) = (x^2 - 1)^3$; |
| (b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 54$; | (e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; |
| (c) $f(x) = x^4 - 4x^3$; | (f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$; |

6. Firma Mieszkanie Marzeń ma do wynajęcia 250 mieszkań, przy czym miesięczny zysk z wynajęcia x mieszkań można obliczyć ze wzoru

$$Z(x) = -8x^2 + 3200x - 80000.$$

- (a) Oblicz miesięczny zysk z wynajęcia 100 mieszkań.
(b) Ile mieszkań powinna wynająć firma MM, żeby zmaksymalizować swój miesięczny zysk?
7. Fabryka jest w stanie wyprodukować 60000 sztuk pewnego produktu w ciągu dnia. Dzienny koszt wyprodukowania x sztuk można obliczyć ze wzoru

$$K(x) = 250000 + 0,08x + \frac{250000000}{x}.$$

Ile sztuk powinna wyprodukować fabryka, aby zminimalizować swoje koszty?