

Definicja 1 (Iloraz różnicowy). Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w otoczeniu $(a - \delta, a + \delta)$ punktu a , $\delta > 0$. **Ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie a dla przyrostu h , gdzie $0 < |h| < \delta$ nazywamy liczbę

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Uwaga 1. Iloraz różnicowy funkcji f w punkcie a dla przyrostu h jest to **tangens kąta**, który tworzy prosta przechodząca przez punkty

$$(a, f(a)), \quad (a+h, f(a+h))$$

z dodatnią częścią osi x .

Komentarz 1. Powszechnie używa się następujących oznaczeń dla funkcji $y = f(x)$:

1. Liczbę h , czyli przyrost zmiennej niezależnej oznacza się przez Δx .
2. Liczbę $f(a+h) - f(a)$, czyli przyrost zmiennej zależnej oznacza się przez Δy .
3. Przy takich oznaczeniach iloraz różnicowy przyjmuje postać:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Definicja 2 (Pochodna funkcji w punkcie). Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w otoczeniu $(a - \delta, a + \delta)$ punktu a , $\delta > 0$. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

to nazywamy ją **pochodną właściwą** w punkcie a i oznaczmy symbolem $f'(a)$. O funkcji, która ma pochodną w punkcie a mówimy, że jest **różniczkowalna** w punkcie a .

Uwaga 2. Przy założeniu, że funkcja f jest ciągła w punkcie a analogicznie określa się pochodne niewłaściwe $+\infty$ i $-\infty$.

Twierdzenie 1 (Różniczkowalność a ciągłość funkcji). Jeżeli istnieje właściwa lub niewłaściwa pochodna $f'(a)$, to funkcja jest ciągła w punkcie a .

Uwaga 3. • Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , to $f'(a)$ jest tangensem kąta, który tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$ z dodatnią częścią osi x .

- Jeżeli $f'(a) = \pm\infty$, to styczna do wykresu jest prostą pionową.
- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , to równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(a, f(a))$ jest postaci

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Pochodna jest miarą szybkości przyrostu funkcji w chwili a .
- Jeżeli funkcja $s = s(t)$ jest funkcją drogi w zależności od czasu, to pochodna $s'(a)$ jest prędkością w chwili a .
- Jeżeli $v = v(t)$ jest funkcją prędkości w zależności od czasu, to $v'(a)$ jest przyspieszeniem w chwili a .

Przykład 1. Obliczymy z definicji pochodną funkcji $f(x) = 2x^2 - 16x + 7$ w punkcie $a = 4$:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (h+4)^2 - 16 \cdot (h+4) + 7 - (2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 7)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2}{h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0. \end{aligned}$$

Zatem $f'(4) = 0$. Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(4, -25)$ jest prosta $y = -25$.

Definicja 3. Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym przedziale $[a, a+b]$, gdzie $b > 0$ oraz istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

to granicę tę nazywamy **pochodną prawostronną** funkcji f w punkcie a i oznaczamy przez $f'_+(a)$. Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym przedziale $[a-b, a]$, gdzie $b > 0$ oraz istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

to granicę tę nazywamy **pochodną lewostronną** funkcji f w punkcie a i oznaczamy przez $f'_-(a)$.

Uwaga 4. Funkcja f określona w otoczeniu punktu a ma w tym punkcie pochodną dokładnie wtedy, gdy ma w tym punkcie pochodną prawostronną oraz pochodną lewostronną i obie te pochodne są sobie równe.

Przykład 2. Obliczymy pochodną prawo i lewostronną funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $a = 0$.

- $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1;$
- $f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$

Pochodne jednostronne co prawda istnieją, ale nie są sobie równe, a zatem funkcja f ostatecznie nie posiada pochodnej w punkcie 0. Przyjrzyj się uważnie wykresowi funkcji f . Co zauważyłeś?

Komentarz 2. Pojęcie pochodnej wprowadził do matematyki Izaak Newton w drugiej połowie XVII w. Współtwórcą rachunku pochodnych, nazywanego rachunkiem różniczkowym, był niemiecki matematyk i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje f, g mają pochodne w a , to

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
2. $(cf)'(a) = cf'(a)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$,
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, o ile $g(a) \neq 0$.

Twierdzenie 3. 1. Jeżeli f ma pochodną w punkcie a , zaś g ma pochodną w punkcie $f(a)$, to

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

2. Jeżeli funkcja f jest ciągła i ściśle monotoniczna w otoczeniu punktu a oraz ma pochodną $f'(a) \neq 0$, to

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Definicja 4. Funkcję f nazywamy **różniczkowalną w zbiorze A** , jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję, która każdemu $a \in A$ przyporządkowuje **pochodną** $f'(a)$ w tym punkcie nazywamy **pochodną f' na zbiorze A** .

Poniżej podajemy pochodne funkcji elementarnych

1. $c' = 0$ (pochodna funkcji stałej jest równa 0),
2. $(x^p)' = px^{p-1}$ dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$,
3. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
5. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$,
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
8. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Przykład 3. Oblicz pochodne podanych funkcji

1. $f(x) = x^{10} + x^7 - 3x^2 + 8x + 2019$;
2. $f(x) = 5^x - 3 \sin x + \cos x - 5 \ln x$;
3. $f(x) = (3x^2 + 6x + 2)(x^3 + 3x^2 - x + 7)$;
4. $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 - x + 7}$;
5. $f(x) = \ln^7(x^3 + 3x^2 - x + 1)$;
6. $f(x) = \sin^4(x^2 + 1)$;
7. $f(x) = \frac{3^{x^2+x+1} + 2 \sin 5x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Twierdzenie 4 (Pochodna a monotoniczność). Niech I będzie dowolnym przedziałem. Jeżeli funkcja f spełnia dla wszystkich $x \in I$ warunek:

1. $f'(x) = 0$, to jest stała w tym przedziale;
2. $f'(x) > 0$, to jest rosnąca w tym przedziale;
3. $f'(x) \geq 0$, to jest niemalejąca w tym przedziale;
4. $f'(x) < 0$, to jest malejąca w tym przedziale;
5. $f'(x) \leq 0$, to jest nierosnąca w tym przedziale.

Przykład 4. Określ przedziały, w których funkcja

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$$

jest rosnąca lub malejąca.

Definicja 5 (Ekstrema funkcji). Funkcja f ma w punkcie a

1. **minimum lokalne** (odp. minimum lokalne właściwe), jeżeli

$$f(x) \geq f(a) \quad (\text{odp. } f(x) > f(a))$$

dla wszystkich punktów x z pewnego sąsiedztwa punktu a ;

2. **maksimum lokalne** (odp. maksimum lokalne właściwe), jeżeli

$$f(x) \leq f(a) \quad (\text{odp. } f(x) < f(a))$$

dla wszystkich punktów x z pewnego sąsiedztwa punktu a .

Maksima i minima lokalne nazywamy **ekstremami lokalnymi**.

Twierdzenie 5 (Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum). Jeżeli funkcja f ma

1. pochodzą $f'(a)$
2. ekstremum lokalne w punkcie a ,

to $f'(a) = 0$.

Uwaga 5. Funkcja może mieć ekstremum tylko w punktach, w których pochodna zeruje się lub nie istnieje, czyli w tzw. **punktach krytycznych**. Ze znikania pochodnej $f'(a)$ nie wynika jeszcze wcale, że f ma w tym punkcie ekstremum.

Twierdzenie 6 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum). Jeżeli $f'(a) = 0$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że

1. $f'(a) < 0$ dla $x \in (a - \delta, a)$ i $f'(a) > 0$ dla $x \in (a, a + \delta)$, to f ma minimum lokalne właściwe w a ,
2. $f'(a) > 0$ dla $x \in (a - \delta, a)$ i $f'(a) < 0$ dla $x \in (a, a + \delta)$, to f ma maksimum lokalne właściwe w a .

Twierdzenie 7 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum II). Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$,
2. $f^{(n)}(a) < 0$,
3. n jest liczbą parzystą, $n \geq 2$

to f ma w a maksimum lokalne właściwe.

Uwaga 6. Jeżeli w założeniach twierdzenia zamienimy warunek (2) na $f^{(n)}(a) > 0$, to f ma w a minimum lokalne właściwe. Jeżeli natomiast n jest liczbą nieparzystą i $f^{(n)}(a) \neq 0$, to f nie ma ekstremum w a .

Przykład 5. Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3.$$

Jak znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji

Poniżej przedstawiamy schemat znajdowania wartości największej i najmniejszej (czyli ekstremów absolutnych) funkcji f ciągłej na przedziale $[a, b]$

1. znajdujemy punkty krytyczne w przedziale (a, b) ;
2. wyznaczamy wartości $f(a), f(b)$ funkcji f na krańcach przedziału,
3. wybieramy wartość największą i najmniejszą wśród uzyskanych wyników.

Przykład 6. Znajdziemy wartość największą i najmniejszą funkcji

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$$

w przedziale $[-2, 2]$.

Wklęsłość i wypukłość

Definicja 6 (funkcja wypukła a funkcja wklęsła). Funkcję f nazywamy **wypukłą** w przedziale I , jeżeli dla każdych dwóch punktów $x_1, x_2 \in I$ i dla każdego $t \in (0, 1)$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Oznacza to, że odcinek siecznej wykresu funkcji f łączącej punkty $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ leży nad wykresem lub pokrywa się z wykresem tej funkcji pomiędzy tymi punktami. Jeżeli odwrócimy znak nierówności, to otrzymamy definicję funkcji **wklęsłej**. Jeżeli nierówności zamienimy na ostre, to funkcję nazywamy **ściśle wypukłą**, bądź odpowiednio **ściśle wklęsłą**.

Twierdzenie 8. Niech I będzie dowolnym przedziałem. Jeżeli funkcja f spełnia dla wszystkich $x \in I$ warunek:

1. $f''(x) > 0$, to jest ściśle wypukła w tym przedziale;
2. $f''(x) \geq 0$, to jest wypukła w tym przedziale;
3. $f''(x) < 0$, to jest ściśle wklęsła w tym przedziale;
4. $f''(x) \leq 0$, to jest wklęsła w tym przedziale.

Punkt przegięcia funkcji

Definicja 7. Niech funkcja f określona będzie przynajmniej w otoczeniu punktu c oraz ma w tym punkcie pochodną (właściwą lub niewłaściwą). Punkt $(c, f(c))$ nazywamy **punktem przegięcia** wykresu funkcji f , jeżeli f jest ściśle wypukła w prawostronnym lub lewostronnym sąsiedztwie punktu c , natomiast ściśle wklęsła w drugim z tych jednostronnych sąsiedztw.

Twierdzenie 9 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia). Jeżeli f ma w punkcie c punkt przegięcia i drugą pochodną, to $f''(c) = 0$.

Uwaga 7. Funkcja może mieć punkt przegięcia jedynie w punktach, w których druga pochodna zeruje się lub nie istnieje.

Twierdzenie 10 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia). Jeżeli funkcja f

1. ma pochodną $f'(c)$ (właściwą lub niewłaściwą)
2. istnieje takie $\delta > 0$, że
 - (a) $f''(x) < 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$,
 - (b) $f''(x) > 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$,

to punkt $(c, f(c))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f .

Twierdzenie 11 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia II). Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$,
2. $f^{(n)}(c) \neq 0$,
3. n jest liczbą nieparzystą większą od 2,

to punkt $(c, f(c))$ jest punktem przegięcia funkcji f .

Przykład 7. Wskaż przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3.$$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Celem badania przebiegu zmienności danej funkcji jest podanie jej podstawowych własności i naskicowanie wykresu. Badanie obejmuje zwykle następujące czynności

- wyznaczenie dziedziny funkcji,
- zbadanie parzystości, nieparzystości i okresowości (jeżeli podejrzewamy, że któraś z własności zachodzi),
- wyznaczenie miejsc zerowych funkcji oraz punktów przecięcia z osią Oy,
- wyznaczenie granic lub wartości na końcach przedziałów określoności funkcji,
- wyznaczenie asymptot pionowych i ukośnych,
- wyznaczenie przedziałów monotoniczności i ekstremów lokalnych,
- wyznaczenie przedziałów wypukłości i punktów przegięcia,
- narysowanie wykresu funkcji.

Przykład 8. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$,
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.