

Definicja 1 (nieformalna definicja granicy funkcji w punkcie). *Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji f przy x dążącym do a i piszemy*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g,$$

jeżeli możemy sprawić, by wartości $f(x)$ były dowolnie bliskie liczbie g (tak bliskie jak tylko chcemy) przyjmując za x liczby odpowiednio bliskie a (z którejkolwiek strony a), ale różne od a .

Uwaga 1. *Innymi słowy, oznacza to po prostu, że wartości $f(x)$ dążą do liczby g , gdy x dąży do a .*

Przykład 1. *Rozważmy funkcję*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}.$$

Spróbujemy odgadnąć wartość granicy

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

x	1,9	1,99	1,999	$\circ$	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,8	3,98	3,998	$\circ$	4,002	4,02	4,2

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Przykład 2. *Spróbujemy odgadnąć wartość granicy*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}.$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2,5	2,2	1,5	3,0
2,1	2,428571	1,9	2,578947
2,01	2,492537	1,99	2,507538
2,001	2,499250	1,999	2,500750
2,0001	2,499925	1,9999	2,500075
2,00001	2,4999925	1,99999	2,5000075

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} = 2,5.$$

Definicja 2 (otoczenie i sąsiedztwo punktu). *Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ zbiory*

1. $(a - \delta, a + \delta),$
2. $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$

3. $(a - \delta, a)$,

4. $(a, a + \delta)$

nazywamy odpowiednio

1. otoczeniem punktu a ,

2. sąsiedztwem punktu a ,

3. lewostronnym sąsiedztwem punktu a ,

4. prawostronnym sąsiedztwem punktu a .

Niech funkcja f określona będzie w pewnym sąsiedztwie punktu a .

Definicja 3 (Cauchy'ego). Liczbę g nazywamy **granica** (właściwą) funkcji f w punkcie a , jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego x spełniającego nierówność

$$0 < |x - a| < \delta$$

jest spełniona nierówność

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Definicję tę można zapisać symbolicznie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon).$$

Uwaga 2. Definicję powyższą należy rozumieć następująco: liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego x należącego do sumy przedziałów $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ wartość funkcji $f(x)$ należy do przedziału $(g - \epsilon, g + \epsilon)$.

Definicja 4 (nieformalna definicja granicy lewostronnej funkcji w punkcie). Mówimy, że liczba g jest granicą lewostronną funkcji f przy x dążącym do a i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g,$$

jeżeli możemy sprawić, by wartości $f(x)$ były dowolnie bliskie liczbie g , przyjmując za x liczby odpowiednio bliskie a i mniejsze od a .

Niech funkcja f będzie określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu a , czyli w przedziale $(a - \delta, a)$, $\delta > 0$.

Definicja 5 (Cauchy'ego). Liczbę g nazywamy **granica lewostronną** funkcji f w punkcie a , jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego x spełniającego nierówność

$$a - \delta < x < a$$

jest spełniona nierówność

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Definicję tę można zapisać symbolicznie

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon).$$

Niech funkcja f będzie określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a , czyli w przedziale $(a, a + \delta)$, $\delta > 0$.

Definicja 6 (Cauchy'ego). *Liczbę g nazywamy granicą prawostronną funkcji f w punkcie a , jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego x spełniającego nierówność*

$$a < x < a + \delta$$

jest spełniona nierówność

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Definicję tę można zapisać symbolicznie

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon).$$

Twierdzenie 1 (granica a granice jednostronne).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \text{ i } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g.$$

Przykład 3. *Przyjrzyj się uważnie wykresowi funkcji narysowanemu na tablicy, następnie wyznacz*

1. $f(-5)$

5. $f(2)$

9. $f(4)$

2. $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$

6. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

10. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$

7. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

11. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

12. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Przykład 4. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, gdzie $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ 7 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$,

2. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, gdzie $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$.

Uwaga 3. *Zapamiętaj, że pytanie o granicę w punkcie a jest pytaniem o to, co funkcja robi wokół punktu a , a nie o to co dzieje się konkretnie w punkcie a .*

Granice niewłaściwe - nieformalnie

Definicja 7 (Nieformalna definicja granicy nieskończonej). *Niech funkcja f będzie funkcją zdefiniowaną po obu stronach a , ale niekoniecznie w samym a . Wówczas*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

oznacza, że możemy uzyskać dowolnie wielkie ujemne wartości, przyjmując za x liczby odpowiednio bliskie a , ale różne od a .

Definicja 8. *Niech funkcja f będzie funkcją zdefiniowaną po obu stronach a , ale niekoniecznie w samym a . Wówczas*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

oznacza, że możemy uzyskać dowolnie wielkie wartości, przyjmując za x liczby odpowiednio bliskie a , ale różne od a .

Granice niewłaściwe - formalnie

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu a .

Definicja 9. *Funkcja f ma w punkcie a **granice niewłaściwą** $-\infty$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego x spełniającego nierówność*

$$0 < |x - a| < \delta$$

jest spełniona nierówność

$$f(x) < M.$$

Definicję tę można zapisać symbolicznie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M).$$

Definicja 10. *Funkcja f ma w punkcie a **granice niewłaściwą** $+\infty$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego x spełniającego nierówność*

$$0 < |x - a| < \delta$$

jest spełniona nierówność

$$f(x) > M.$$

Definicję tę można zapisać symbolicznie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

Analogicznie do granic właściwych jednostronnych wprowadza się pojęcie granic niewłaściwych jednostronnych w punkcie a .

Definicja 11. 1.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M).$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

Przykład 5. Odgadnij wartość granic

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
-0,1	-10	0,1	10
-0,01	-100	0,01	100
-0,001	-1000	0,001	1000
-0,0001	-10000	0,0001	10000

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ nie istnieje.}$$

Przykład 6. Wyznacz

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty,$	4. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-2}{x+3} = -\infty,$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^2} = +\infty,$	5. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2}{x+3} = +\infty,$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2} = +\infty,$	6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{x+3} \text{ nie istnieje.}$

Definicja 12. Prosta $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** funkcji f , gdy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Analogicznie określamy **asymptotę pionową prawostronną**. Mówimy, że prosta $x = a$ jest **asymptotą obustronną** funkcji f , gdy jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

Definicja 13 (Nieformalna definicja granicy dla x dążącego do plus nieskończoności).
 Jeżeli dla rosnącego w sposób nieograniczony x wartości funkcji zbliżają się do liczby g , to liczbę g nazywamy granicą funkcji przy x dążącym do $+\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g.$$

Jeżeli wartości funkcji rosną, bądź maleją nieograniczenie, to mówimy, że funkcja dąży do $+\infty$ lub $-\infty$ i zapisujemy odpowiednio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, a)$.

Definicja 14. Funkcja f ma w $-\infty$ granicę g , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g,$$

jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje δ taka, że dla każdego x spełniającego warunek

$$x < \delta,$$

spełniona jest nierówność

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, a)$.

Definicja 15. Funkcja f ma w $-\infty$ granicę $-\infty$ ($+\infty$), co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \right),$$

jeżeli dla każdego M istnieje δ taka, że dla każdego x spełniającego warunek

$$x < \delta,$$

spełniona jest nierówność

$$f(x) < M \quad (f(x) > M).$$

Uwaga 4. Podobnie określamy granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$ i granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Definicja 16. Prosta $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną** funkcji f w $+\infty$, gdy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Analogicznie określamy asymptotę ukośną w $-\infty$.

Uwaga 5. Ta sama funkcja może mieć różne asymptoty ukośne w $+\infty$ i $-\infty$. W celu wyznaczenia asymptoty ukośnej najpierw obliczamy

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i jeżeli ta granica istnieje i jest właściwa, to

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Arytmetyka granic

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje f, g mają w punkcie a granice właściwe, to

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x),$ gdzie $c \in \mathbb{R},$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$ o ile $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$

Uwaga 6. Powyższe własności zachodzą także dla granic prawo i lewostronnych oraz w przypadku, gdy $a = \pm\infty$. Zastrzeżenie, że granice mają być właściwe bierze się stąd, że działania na wielkościach nieskończonych nie zawsze są dobrze określone, np.

$$\infty - \infty = ?, 0 \cdot \infty = ?, \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Przykład 7. Obliczmy granice:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 5x - 9),$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^2 - 3x + 6}{-2x^4 + 7x^3 + 1},$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^4 - 2x^2 - 8x),$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2}{5x^3 - 1},$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x - 9}{2x^4 + 3x^3}.$

Definicja 17. Funkcję f określoną w otoczeniu punktu a nazywamy ciągłą w punkcie a , jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Mówimy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze A , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Twierdzenie 3. 1. Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych na zbiorze A są funkcjami ciągłymi na A .

2. Iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji ciągłych na A jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru A , w którym, funkcja g jest różna od zera.

Uwaga 7. Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach naturalnych.